УДК 539.377

© 2003р. О.І. Ярошенко, П.М. Шпатар, В.В. Брайловський, О.М. Станіцька, Г.І. Ластівка

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРЕДАЧІ ДЕФОРМАЦІЇ У ЄМНІСНОМУ ДИЛАТОМЕТРІ

Проведено математичне моделювання процесу передачі деформації п'єзоелектричного матеріалу. Цей матеріал використовується для калібрування ємнісного давача дилатометра. Отримано аналітичну залежність ємності давача від деформації п'єзоелектрика.

The mathematical modeling of the process of transfer of deformation of a piezoelectric material was conducted. This piezoelectric material is used for calibration of a capacity sensor of the dilatometer. The analytical dependence between sensor's capacitance and deformation of a piezoelectric is obtained.

Для вирішення різноманітних наукових і практичних задач при дослідженні теплових властивостей матеріалів, виникає необхідність проведення дилатометричних вимірювань – визначення температурного коефіцієнту лінійного розширення (ТКЛР), а також зміни розмірів під дією тиску, електричних і магнітних полів, іонізуючих випромінювань і інших чинників.

Створення великого числа нових конструктивних матеріалів із заданими властивостями, застосування цих матеріалів у складних температурних умовах, використання з'єднань матеріалів з різними ТКЛР вимагають знання цієї характеристики з високою точністю.

Дилатометри вищої точності розробляють, як правило, на основі безконтактних методів вимірювання ТКЛР. До таких приладів відносять, зокрема, компараторні, інтерференційні дилатометри, рентгенівські установки для вимірювань теплового розширення кристалічних ґраток, а також дилатометри на основі γ-випромінювання.

До приладів підвищеної точності визначення теплового розширення матеріалів відносяться ємнісні дилатометри.

Ємнісний метод вимірювання лінійних переміщень, оснований на ідеї трисекційного конденсатора, знаходить все більш широке застосування в дилатометрії [1, 2]. Крім цього даний метод має реальні можливості забезпечувати більш високу чутливість [3].

Проблема калібрування при значних лінійних розширеннях зразка вирішується з допомогою мікрометра. Якщо величина калібровочних переміщень не співрозмірна з вимірюваними, а значно перевищує їх, виникає питання про правомірність екстраполяції величин вихідного сигналу дилатометра, при калібровочних переміщеннях, до рівня вимірюваних, тобто виникає питання про пропорційність та достовірність аналітичної залежності зміни ємності від переміщення. При високій чутливості дилатометра низька роздільна здатність мікрометра не забезпечує можливості проведення надійних калібровочних переміщень. В зв'язку з цим в конструкцію ємнісного давача введено п'єзокристал, зміна розмірів якого під дією прикладеної напруги, використовується в якості калібровочних.

Дана робота присвячена математичному моделюванню процесу передачі деформації п'єзоелектрика у ємнісному давачі дилатометра, що враховує тримірність пружного стану його складових, рівень температури в широкому діапазоні зміни.

Математичне моделювання процесу передачі деформації у ємнісному давачі має важливе значення на рівні конструювання. Воно дає змогу оптимально підібрати геометричні параметри його складових елементів, вказати фізичні характеристики, розрахувати вплив рівня температури на зміну параметрів чутливого елементу.

Конструкція ємнісного давача дилатометра зображена на рис.1. Вважаємо, що всі його складові деформуються пружно, відрізняються один від одного фізико-механічними характеристиками матеріалу.

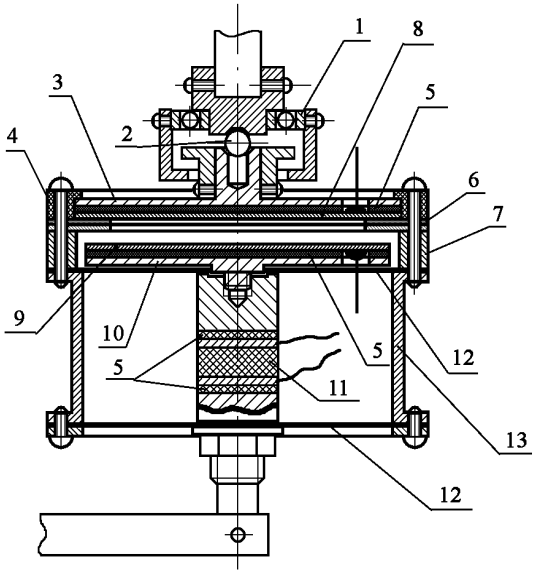

Рис. 1. Конструкція ємнісного давача дилатометра: підшипник (1), кулькова опора (2), основа верхньої обкладинки (3), текстолітове кільце (4), слюда (5), охоронне кільце (6), кільце (7), верхня обкладинка (8), нижня обкладинка (9), основа нижньої обкладинки (10), п'єзоелектрик (11), плоска пружина (12), циліндрична основа (13).

Позначимо γ_j, μ_j і α_{tj} (j=1, 2, 3) відповідно коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву та коефіцієнт лінійного теплового розширення нижньої обкладинки конденсатора, слюди та п'єзоелектрика (рис.1). Позначимо також $2h_j$, (j=1, 2, 3) товщини, а $U_{kj}(X^*)$ – компоненти вектора переміщення аналогічних елементів. Індекс k=1, 2, 3 відповідає переміщенням уздовж координатних осей OX_k.

Оскільки всі елементи деформуються пружно, то компоненти переміщень $U_{kj}(X^*)$ повинні задовольняти рівняння рівноваги теорії термопружності [4]:

$$(1-2\nu_j)\Delta_j^* U_{kj}(X^*)+\frac{\partial\Theta_j(X^*)}{\partial X_{kj}}= 2\alpha_{tj}^{(0)}\frac{\partial T_j(X^*)}{\partial X_{kj}}, \tag{1}$$

де $\Delta_j^*=\sum_{k=1}^{3}\left(-\frac{\partial}{\partial X_{kj}^2}\right)$, $\Theta_j=\frac{\partial U_{1j}}{\partial X_{1j}}+\frac{\partial U_{2j}}{\partial X_{2j}}+\frac{\partial U_{3j}}{\partial X_{3j}}$

k=1, 2, 3, j=1, 2, 3, X^* – точка з координатами (X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}), $\alpha_{tj}^{(0)}=(1+\gamma_j)\alpha_{tj}$, T_j – температура j-го елемента, яку вважаємо відомою.

Оскільки всі елементи конструкції перебувають у контактній взаємодії між собою, то переміщення в одному елементі залежать від переміщення в іншому. На межі розподілу повинні виконуватись умови ідеального теплового та механічного контакту [5]. Якщо область контакту між п'єзоелектриком та слюдою позначити S_{23}, то в цій області повинні виконуватися співвідношення:

$$U_{k3}^{+}(X^*)=U_{k2}^{-}(X^*),\quad \sigma_k^{(3)}=\sigma^{-}(X^*),\quad X^*\in S_{23},\ \ k=1,2,3, \tag{2}$$

де $U_{kj}^{\pm}$ і $\sigma_{kj}^{\pm}$ – переміщення і напруження в j-му шарі відповідно на верхній та нижній поверхнях (знак + та –). Звичайно п'єзоелектрик та слюда мають однакову площу перекриття.

Якщо позначити поверхню з'єднання нижньої обкладки конденсатора з п'єзоелектриком S_1, а область S_{01}, що доповнює S до області S_{23} ($S_{23}=S\cup S_{01}$), за значенням об'єднання областей S S_{01} співпадає з S_{23}, то в цих областях умови контакту визначають такими математичними співвідношеннями:

$$U_{k2}^{+}(X^*)=U_{k1}^{-}(X^*),\quad \sigma_{k3}^{(2)}=\sigma^{-}(X^*),\quad X^*\in S,\ \sigma_{k3}^{(2)-}(X^*)=0,\quad X^*\in S_{01},\ \ k=1,2,3. \tag{3}$$

Крім цього, відомі зусилля на верхній поверхні обкладки конденсатора та зусилля, що діють на нижню поверхню п'єзоелектрика, тобто

$$\sigma_{k3}^{(1)+}(X^*)=0,\quad X^*\in S,\qquad \sigma_{k3}^{(3)-}(X^*)=P_k(X^*),\quad X^*\in S_{23}, \tag{4}$$

де $P_k(X^*)$ – відомі функції.

Отже, задача математичного моделювання передачі деформацій від п'єзоелектрика до чутливого елементу зведена до розв'язку трьох систем диференційних рівнянь (1) при граничних умовах (2)–(4). З теорії пружності відомо, що така задача завжди має один єдиний розв'язок. Він залежить від заданих функцій $P_k(X^*)$ (зусиль на поверхнях п'єзоелектрика), пружних сталих γ_j, μ_j, теплових характеристик та геометричних характеристик h_j-напівтовщин усіх шарів.

Якщо використати гіпотезу про лінійний розподіл напружень та деформацій у слюді та нижній обкладинці конденсатора, то задача побудови розв'язку початкової системи диференційних рівнянь значно спрощується. Використовуючи додатково техніку застосування двовимірного інтегрального перетворення Фур'є, побудова роз-

в'язку системи рівнянь (1) зводиться до розв'язання алгебраїчної системи рівнянь відносно функцій типу

$$\widetilde{U}_{kj}^{\pm}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint U_{kj}^{\pm}(x,y)e^{i(x\xi+y\eta)}dxdy, \quad (5)$$

що характеризують переміщення на межі розподілу середовищ.

Розв'язуючи дану систему алгебраїчних рівнянь та задовольняючи умови ідеального теплового та механічного контактів (3), (4), отримуємо залежності, які зручно записати у матричній формі

$$\begin{pmatrix}\widetilde{U}_{13}^{1-}\\ \widetilde{U}_{23}^{1-}\\ \widetilde{U}_{33}^{1-}\end{pmatrix}=(A)\begin{pmatrix}\widetilde{U}_{13}^{2-}\\ \widetilde{U}_{23}^{2-}\\ \widetilde{U}_{33}^{2-}\end{pmatrix}+(B_1)\begin{pmatrix}\widetilde{T}_2^{+}\\ \widetilde{T}_3^{-}\\ \widetilde{T}_2^{-}\end{pmatrix}+(B_2)\begin{pmatrix}\widetilde{T}_1^{+}\\ \widetilde{T}_2^{-}\\ \widetilde{T}_1^{-}\end{pmatrix}, \quad (6)$$

де $\widetilde{U}_{k3}^{j-}, \widetilde{T}_j^{\pm}$ визначають за формулою (5); (A), (B_1), (B_2) – матриці розмірності 3×3 з відомими коефіцієнтами, що є функціями змінних ξ, η, а також комбінацій фізико-механічних характеристик елементів давача.

Для обчислення дійсних переміщень $\widetilde{U}_{k3}^{1-}$, що впливають на давач, необхідно до рівності (6) застосувати зворотне перетворення Фур'є.

У результаті отримаємо остаточну формулу

$$U_{k3}^{1-}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint U_{k3}^{1-}(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta \quad (7)$$

для визначення всіх переміщень, що приводять до зміни віддалі між обкладинками конденсатора.

Використовуючи рівняння, які зв'язують електричні і механічні характеристики п'єзоелемента [6, 7], визначимо залежність зміни ємності давача від прикладеної до поверхонь п'єзоелектрика електричної напруги. Для розглядуваної задачі ці рівняння можуть бути представлені у формі

$$U_{k3}^{1-}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\left(\mu_3\sigma_{k3}^{1-}(\xi,\eta)+e^{(T)}\frac{V_{k3}}{2h_3}\right)\times \quad (8)$$
$$\times e^{-i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta,$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 S_0}{d+\iint\left(\mu_3\sigma_{k3}^{1-}(\xi,\eta)+e^{(T)}\frac{V_{k3}}{2h_3}\right)e^{-i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta}, \quad (9)$$

де $e^{(T)}$ – п'єзомодуль, V_{k3} – електрична напруга, яка прикладається до поверхонь п'єзоелектрика, d – початкова відстань між обкладинками конденсатора, S_0 – площа перекриття обкладинок конденсатора ємнісного давача, незмінність якої забезпечується конструкцією [8].

Отже, отримали аналітичну залежність ємності давача від прикладеної до поверхонь п'єзоелектрика електричної напруги, враховуючи геометричні параметри всіх елементів давача та їх фізико-механічні і температурні характеристики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kromer F.* Dilatometrische Untersuchungen an den Schwere-Fermionen-Verbindungen (UTh)Be_{13} und $CeNi_2Ge_2$: Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doctor rerum naturalium.- Dresden, 2000.
2. *Köckert Ch.* Thermische Ausdehnung und Langzeit-Längenrelaxation der Systeme NbTi und NbTi-D im Tieftemperaturbereich: Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doctor rerum naturalium.- Dresden, 2001.
3. *Струнский М.Г., Горбов М.М.,* Бесконтактные емкостные микрометры. Лининград: Энергоатомиздат, 1986.
4. *Куликов Г.М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. - 1994. - №2. - С. 33-42.
5. *Калашников В.В., Кудинов В.А. и др.* Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. - М.: Энергоатомиздат, 1998.
6. *Муратиков К.Л.* Теория генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями на основе термоупругого эффекта // ЖТФ - 1999 - **69**, вып.7, С.59-63.
7. *Фильштинский Л.А., Пташенчук Р.В.* Функция Грина для составного пьезокерамического клина при антиплоской деформации // Фізико-хімічна механіка матеріалів. - 2000. - №1. - С.27-31.
8. *Бзовий М.Г., Брайловський В.В., Шпатар П.М., Політанський Л.Ф.* Конструктивні похибки параметричних ємнісних давачів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", Електроніка. - 2002. - №455. - С.51-55.