УДК 533.72

© 2005 р. І.А. Танський

ЗАО ЦВ Протек, Москва, Росія

ГІДРОДИНАМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РІВНЯННЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА

Використовуючи перетворення Фур'є, одержано рівняння, яким задовольняють швидкості і напруги, отримані шляхом усереднення розв'язків рівняння Фоккера-Планка. Ці рівняння інтерпретуються як рівняння руху в'язкої стисливої рідини.

We established by means of Fourier transformation equations, which are satisfied by velocities and stresses, derived by averaging of solutions of Fokker-Planck equations. These equations are interpreted as motion equations of viscous compressible fluid.

Рівняння Фоккера-Планка останнім часом стало об'єктом численних досліджень [1-5]. Його актуальність пояснюється корисністю як засобу моделювання у різних галузях. Водночас висока розмірність задачі утруднює розв'язання рівняння.

Мета даного дослідження – виведення рівнянь, яким задовольняють локальні середні швидкості й напруги для рівнянь Фоккера-Планка.

Рівняння Фоккера-Планка має такий вигляд:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+v_k\frac{\partial n}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial v_k}\left((F_k-\alpha v_k)\,n\right)=k\,\Delta_v n. \quad (1)$$

Тут і надалі використовується угода про підсумування за повторюваним індексом, який пробігає значення 1, 2, 3. Рівняння описує еволюцію густини середовища під дією поля зовнішніх сил F_k і дифузії в просторі швидкостей. Густина n залежить від просторових координат x_k та швидкостей v_k.Рівняння (1) – зручна теоретична схема, яка дозволяє розглядати ізотермічні процеси на субмакроскопічному рівні, не деталізуючи механізму взаємодії часточок.

Коефіцієнт α є відношенням сили до швидкості руху, тобто – величиною, оберненою до рухливості частинок. Величина k – коефіцієнт дифузії у просторі швидкостей.

Розглянемо ситуацію, коли зовнішні сили можна знехтувати. Тоді

$$\frac{\partial n}{\partial t}+v_k\frac{\partial n}{\partial x_k}-\alpha\, v_k\frac{\partial n}{\partial v_k}-3\alpha n=k\frac{\partial^2 n}{\partial v_j\partial v_j}. \quad (2)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2) у необмеженому просторі

$$-\infty<x_i<+\infty,\ -\infty<v_i<+\infty. \quad (3)$$

Скористаємося методом перетворення Фур'є для швидкостей v_i. Позначимо

$$M=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint n\exp(-i\,v_k\,q_k)\,dv_x\,dv_y\,dv_z. \quad (4)$$

Помножимо рівняння (2) на $\exp(-i\,v_k\,q_k)$ і проінтегруємо по простору швидкостей. Одержимо

$$\frac{\partial M}{\partial t}+i\frac{\partial^2 M}{\partial x_k\partial q_k}+\alpha\, q_k\frac{\partial M}{\partial q_k}=-k\,q_j q_j M. \quad (5)$$

Піддамо рівняння (5) диференціюванню за q_j, після чого виконаємо підстановку q_j=0. В результаті одержимо співвідношення між похідними різного порядку від M по q_j в нулі. Ці похідні, як відомо, виражаються через моменти густини розподілу швидкості у даній точці простору. Моменти нульового, першого і другого порядків виражаються через густину в точці, середні швидкості і напруги. Співвідношення між ними інтерпретуються як рівняння нерозривності, рівняння руху і визначні співвідношення суцільного середовища.

Згідно з (4), маємо

$$M\,|_{q=0}=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint n\,dv_x\,dv_y\,dv_z=\frac{\rho}{(2\pi)^3}, \quad (6)$$

де $\rho(t,x,y,z)$ – густина.

Диференціюємо (4) за q_k. Припустимо, що q_i=0. Тоді одержимо

$$\frac{\partial M}{\partial q_k}\,|_{q=0}=\\ =\frac{-i}{(2\pi)^3}\iiint v_k\,n\,dv_x\,dv_y\,dv_z=\frac{-i\rho u_k}{(2\pi)^3}, \quad (7)$$

де u_k – середня швидкість.

Підставимо (6)-(7) у (5) і одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (8)$$

Це – рівняння нерозривності. Позначимо

$$\frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q=0} = \\ = \frac{-1}{(2\pi)^3} \iiint v_i v_j \, n \, dv_x \, dv_y \, dv_z = \frac{-S_{ij}}{(2\pi)^3}, \quad (9)$$

де S_{ij} – матриця других моментів локального розподілу швидкостей.

Подамо швидкість v_k у вигляді суми середньої швидкості u_k і флуктуації швидкості w_k:

$$v_k = u_k + w_k. \quad (10)$$

Підставимо (10) у (9) і одержимо

$$S_{ij} = \rho u_i u_j + \iiint w_i w_j \, n \, dv_x \, dv_y \, dv_z. \quad (11)$$

Другий момент флуктуацій швидкості виражається через напруги

$$\iiint w_i w_j \, n \, dv_x \, dv_y \, dv_z = -\sigma_{ij}. \quad (12)$$

Диференціюємо (5) за q_j. Вважаючи, що q_k=0, і скориставшись (9), (11), (12), одержимо

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \alpha \rho u_i = 0. \quad (13)$$

Це – рівняння руху суцільного середовища. Виключимо $\partial \rho / \partial t$ з (13) і рівняння нерозривності (8). Одержимо другу форму рівняння руху

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \alpha \rho u_i = 0. \quad (14)$$

Система рівнянь нерозривності і руху не замкнута. Щоб замкнути її, треба одержати вираз для напруг через густину, середні швидкості та їх похідні по просторових координатах – визначне співвідношення.

Для цього диференціюємо (4) за q_j і q_k та припустимо, що q_i=0. Матимемо

$$\frac{\partial M_{jk}}{\partial t} + i \frac{\partial M_{ijk}}{\partial x_i} + 2\alpha M_{jk} = -k \, \delta_{jk} M, \quad (15)$$

де $M_{ij}\ldots$ – похідні від M по відповідним q_i в нулі, δ_{jk} – символ Кронекера.

У рівняння (15) входить момент третього порядку. Якщо локальна густина розподілу швидкостей має форму нормального розподілу (розподіл Максвела для швидкостей), то зображення Фур'є цього розподілу має також нормальну форму

$$M = \exp\left(\tfrac{1}{2} A_{ij} \, q_i \, q_j + B_k \, q_k + C\right). \quad (16)$$

Для обгрунтування (16) зішлемося на одержаний у [6] точний вираз для фундаментального розв'язку рівняння Фоккера – Планка (1), для нього виконується (16). Крім того, з фізичних міркувань очевидно, що зі збігом досить великого відрізка часу і для будь-яких початкових умов, які відрізняються від нуля в обмеженій області, розв'язок асимптотично прямує до фундаментального з тими ж центром мас і початковими швидкостями.

Якщо (16) виконується, то шляхом нескладних перетворень одержимо

$$M_{ijk} = \\ = \left(A_{ij} B_k + A_{jk} B_i + A_{ki} B_j + B_i B_j B_k\right) \exp(C). \quad (17)$$

Підставивши (17) в (15), матимемо:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_i} + \sigma_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \\ + \sigma_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + 2\alpha \sigma_{jk} = -2k \, \delta_{jk} \, \rho. \quad (18)$$

Для стаціонарного розв'язку, коли всі швидкості і їх похідні по часу дорівнюють нулю, напруги зводяться до гідростатичного тиску

$$\sigma_{jk} = -\frac{k}{\alpha} \delta_{jk} \, \rho.$$

Для загального випадку скористаємося лінеаризацією

$$\sigma_{jk} = -\frac{k}{\alpha} \delta_{jk} \, \rho + \delta \sigma_{jk}. \quad (19)$$

Утримуючи у (18) лише члени першого порядку, одержимо

$$\frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial t} + 2\alpha \delta \sigma_{ij} = \rho \frac{k}{\alpha} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (20)$$

При виведенні (20) ми використали той факт, що група доданків $\frac{k}{\alpha} \delta_{jk} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$ обертається на нуль внаслідок рівняння нерозривності (8).

Рівняння (20) – це звичайне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами і змінною правою частиною. Якщо права частина рівняння змінюється досить повільно, то розв'язок диференціального рівняння експоненційно прямує до

$$\delta \sigma_{ij} = \rho \frac{k}{\alpha^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (21)$$

Об'єднавши (19) і (21), одержимо шукане визначальне співвідношення

$$\sigma_{ij} = -\frac{k}{\alpha}\delta_{ij}\,\rho + \rho\frac{k}{\alpha^2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (22)$$

Це – визначальне співвідношення для стисливої в'язкої рідини. При цьому співвідношення між густиною і гідростатичним тиском (рівняння стану) має вигляд:

$$p = \frac{k}{\alpha}\rho, \quad (23)$$

тобто збігається з рівнянням ізотерми ідеального газу. Це природно, бо середовище, поведінка якого описується рівнянням Фоккера – Планка, знаходиться у тепловій рівновазі з нерухомим середовищем.

Кінематична в'язкість середовища –

$$\nu = \frac{k}{\alpha^2}. \quad (24)$$

Одержані співвідношення можна проілюструвати на прикладі фундаментального розв'язку рівняння Фоккера-Планка [6]. В цьому випадку маємо:

$$M = \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{\alpha^3}{2\pi k\theta}\right)^{3/2} \exp\left(-i\,e^{-\alpha t}(v_{0i}\,q_i)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-1}{\theta}\left[\frac{\alpha^3}{2k}\ddot{x}_i\,\ddot{x}_i + i\alpha(1-e^{-\alpha t})^2\,\ddot{x}_i\,q_i + \right.\right. \quad (25)$$
$$\left.\left. + \frac{k}{\alpha}(\alpha t(1-e^{-2\alpha t}) - 2(1-e^{-\alpha t})^2)\,q_i\,q_i\right]\right\},$$

де

$$\theta = 2\alpha t - \left(1-e^{-\alpha t}\right)\left(3-e^{-\alpha t}\right), \quad (26)$$

$$\overline{x}_i = x_i - \left(x_{0i} + \frac{v_{0i}}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right), \quad (27)$$

x_{0i} – початкові координати у просторі, v_{0i} – початкові координати у просторі швидкостей.

Виконавши диференціювання та підстановки, одержуємо

$$\rho = \left(\frac{\alpha^3}{2\pi k\theta}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{-\alpha^3}{2k\theta}\ddot{x}_i\,\ddot{x}_i\right], \quad (28)$$

$$u_i = v_{0i}\,e^{-\alpha t} + \alpha\left(1-e^{-\alpha t}\right)^2\frac{\ddot{x}_i}{\theta}. \quad (29)$$

$$\sigma_{ij} = \rho\left(\frac{-2k}{\alpha\theta}\right)\left(\alpha t\,(1-e^{-2\alpha t}) - 2(1-e^{-\alpha t})^2\right)\delta_{ij}. \quad (30)$$

Легко переконатися, що для густини, середньої швидкості і напруг, визначених рівностями (28)-(30), рівняння (8), (13), (14) і (18) виконуються тотожно. Останнє рівняння виконується точно внаслідок того, що, як було вказано вище, вираз (25) має нормальну форму (16).

Рівняння (22) виконується наближено. Знайдемо відносну похибку цього наближення. Зробити це нескладно, бо в правій і лівій частинах (22) ми маємо сферичні тензори. Тому для оцінки відносної похибки можна використати відношення модуля різниці правої та лівої частин (22) до модуля точного значення тензора напруг (ліва частина (22)).

Відносна похибка дорівнює

$$\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{\sigma} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t e^{-\alpha t} - 1 + e^{-\alpha t})}{-\alpha t + \alpha t e^{-2\alpha t} + 2 - 4e^{-\alpha t} + 2e^{-2\alpha t}}. \quad (31)$$

Отже, при $\alpha t \to \infty$ відносна похибка є $O\left(\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha t}\right)$.

Висновки

Отримані рівняння руху суцільного середовища, яким задовольняють локальні середні швидкості і напруги для розв'язків рівняння Фоккера-Планка. Ці рівняння є рівняннями ізотермічного руху в'язкої стисливої рідини.

Отримано співвідношення між кінематичною в'язкістю і параметрами вихідного рівняння.

Отримані у роботі залежності проілюстровано на прикладі фундаментального розв'язку рівняння Фоккера – Планка, одержаного раніше в роботі [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Jewson S.* Weather forecasts, Weather derivatives, Black-Scholes, Feynmann-Kac and Fokker-Planck. – Cornell University, arXiv:physics/0312125 v1, 20 Dec 2003.
2. *Krylov G.* On Solvable Potentials for One Dimensional Schrödinger and Fokker-Planck Equations.– Cornell University, arXiv:quant-ph/0212046 v1, 8 Dec 2002.
3. *Lozinski A., Chauvière C.* A fast solver for Fokker-Planck equation applied to viscoelastic flows calculations: 2D FENE model // J. Comput. Phys. – 2003. – **189**, No.2. – P.607-625.
4. *Benamira F., Guechi L.* Similarity transformations approach for a generalized Fokker-Planck equation. – Cornell University, arXiv:physics/0112002 v1, 30 Nov 2001.
5. *Bettencourt L.M.A.* Properties of the Langevin and Fokker-Planck equations for scalar fields and their application to the dynamics of second order phase transitions. – Cornell University, arXiv:hep-ph/0005264 v1, 25 May 2000.
6. *Tanski I.* Fundamental solution of Fokker – Planck equation. – Cornell University, arXiv:nlin.SI/0407007 v1, 04 Jul 2004.