

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИЧНОГО ПОЛЯ І МЕРЕЖІ ОПТИЧНИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Зроблена спроба показати, як пов'язані різні сингулярні системи, які належать до різних параметрів поля, та які наслідки випливають із цього зв'язку. Наведені результати комп'ютерного моделювання.

We take it into one's head to show how different singularity systems of different parameters of an optical wave are connected and what follows from this connection. The results of computer simulation are presented.

Останнім часом спостерігається зростання інтересу до такої відносно нової галузі оптики, як сингулярна оптика. Це пов'язано, насамперед, з тим, що сингулярний аналіз дозволяє передбачити поведінку параметра (хоча б на якісному рівні), з яким асоціюється сингулярна система. Відомо також, що будь-якій характеристиці може відповідати така сингулярна система – мережа, якої складається з особливих точок (вихорів, S -точок, пойнтинг-сингулярностей тощо), з'єднаних певними лініями (еквіфазними лініями, азимутальними лініями тощо) [1; 2].

У даній праці ми робимо спробу показати, як пов'язані різні сингулярні системи різних параметрів поля і які наслідки з цього випливають.

1. Сингулярна мережа і поведінка відповідного параметра поля. Знаковий принцип

1.1. Фазові вихори і розподіл фази поля

Покажемо на прикладі найбільш відомого типу сингулярностей – оптичних або фазових вихорів скалярного поля [1-4], як характеристики сингулярної мережі визначають поведінку фази поля.

Як відомо [1-4], вихор виникає в точці нульової амплітуди поля. У цій точці фаза невизначена, а фазова поверхня – гелікоїд, правий або лівий, у залежності від знака топологічного заряду $S = \pm 1$ [1-4]. Інакше кажучи, вихор позитивний або негативний.

Окремі вихори поля можна об'єднати в мережу, в якій вони пов'язані еквіфазними лініями – " $\text{Re} = 0$ " і " $\text{Im} = 0$ ". На рис. 1 наведена ділянка випадкового скалярного поля і відповідна сингулярна мережа. Лінії $\text{Re} = 0$ і $\text{Im} = 0$ є розв'язками рівнянь такої системи [1]:

$$\begin{cases} \text{Re}U = 0, \\ \text{Im}U = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де U – комплексна амплітуда скалярного поля.

Визначені лінії є специфічними еквіфазними лініями, вздовж яких фаза кратна $\pi/2$. Области, які позначені на рис. 1 однаковим відтінком сірого кольору (фазові спекли), є областями, в яких (з точністю до $\pi/2$) фаза практично стала. Як видно з рис. 1, сусідні вихори різного знака можливо з'єднати безпосередньо цілим пучком еквіфазних ліній, а вихори одного знака – лише однією, яка проходить через сідло фази. Ця особливість покладена в основу так званого знакового принципу, який був сформульований професором Фройндом [5].

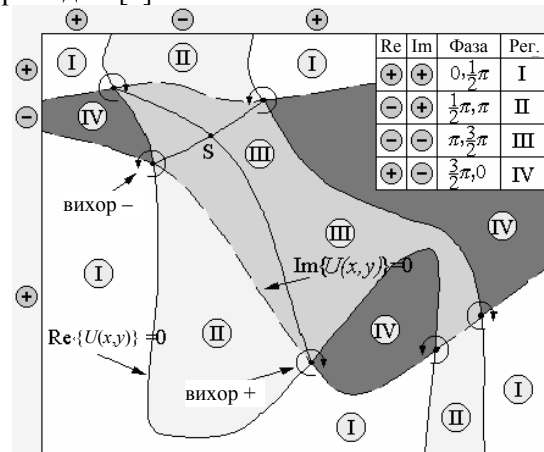


Рис. 1. Фазова карта ділянки випадкового скалярного поля. Вихори позначені круговими стрілочками. Напрямок стрілочок вказує на топологічний заряд вихору. Римські цифри позначають регіони, де фаза поля практично стала. Сідлова точка фази позначена літерою s . Лінії " $\text{Re}=0$ " і " $\text{Im}=0$ " – специфічні еквіфазні лінії, вздовж яких фаза кратна $\pi/2$.

Можна стверджувати, що для будь-якої системи оптичних сингулярностей можна сформулювати відповідний знаковий принцип: сингулярності з різним знаком топологічного індексу (знак топологічного заряду, індексу Пуанкаре) можуть бути безпосередньо зв'язані цілим пучком характерних ліній параметра, з яким ці сингулярності асоціюються. Сингулярності одного знака можуть бути з'єднані лише однією лінією, яка проходить через сідлову току параметра.

Отже, елементи сингулярної системи пов'язані між собою, і їх можна об'єднати у відповідну сингулярну мережу.

Як впливає з рис. 1, величину фази в кожній точці поля можна визначити з точністю до $\pi/2$, якщо відомі характеристики вихорів (насамперед, локалізація вихорів та їх знаки) і позиція будь-якої (однієї) еквіфазної лінії, яка входить у вихор.

Отже, інформація про характеристики мережі сингулярностей дозволяє передбачити з певною ймовірністю поведінку параметра поля, до якого вона належить. Додамо, що таке твердження стосується не тільки вихорів мереж, а й будь-якої іншої системи оптичних сингулярностей.

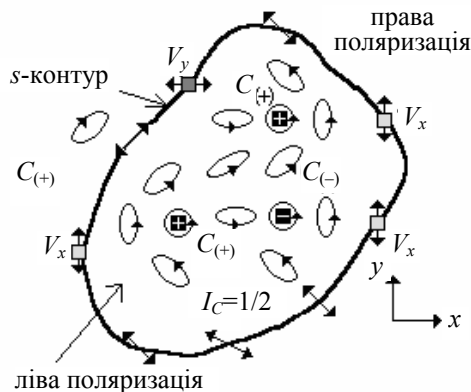


Рис. 2. Система поляризаційних сингулярностей векторного поля.

■, □ – позитивні і негативні C-точки,
 ↕, ↔ – x- і y-вихори

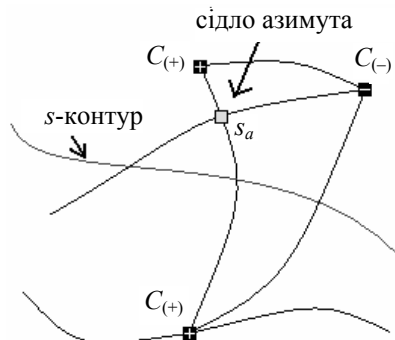


Рис. 3. Еквіазимутальні лінії, які об'єднують у мережу C-точки

1.2. Поляризаційні сингулярності. Мережі C-точок і s-контурів

Сингулярна система векторного поля схематично наведена на рис. 2. Вона формується C-точками і s-контурами. Як відомо [1; 2; 9-11], особлива C-точка поля, в якій воно поляризовано циркулярно. Індекс C-точки визначає напрямки обертання осей еліпсів навколо неї. У цій точці сингулярні азимут і головна фаза. На s-контурі невизначеним є напрямком обертання вектора поля (поляризація вздовж контуру лінійна) [1].

На рис. 2 видно, що система сингулярностей регламентує поведінку поляризаційних еліпсів. Тобто поляризаційна ситуація навколо C-точок гомеоморфно відображається на s-контурі.

C-точки об'єднуються в мережі еквіазимутальними лініями (рис. 3). Природно, для цієї сингулярної системи виконується знаковий принцип [2; 10; 11].

1.3. Зв'язок між компонентними вихорами і поляризаційними сингулярностями

У працях [1; 2] показано, що характеристики C-точок однозначно пов'язані з параметрами вихорів компонент. Наприклад, сумарний топологічний заряд x- і y-вихорів, розташованих на певному s-контурі, і сумарний топологічний заряд головної фази C-точок, локалізованих в області, обмеженої цим контуром, однакові.

Кількість повних обертів вектора поля і напрямком цього обертання вздовж s-контуру відповідають сумарному топологічному індексу C-точок, розташованих в області, обмеженої цим контуром.

Отже, можна стверджувати:

- Як мережі вихорів у скалярному полі, так і мережі C-точок і s-контурів визначають поведінку параметрів векторного поля в кожній його точці.
- Одночасно мережі поляризаційних сингулярностей і мережі компонентних вихорів пов'язані між собою.

3. "Кореляція" між розподілами різних параметрів поля

3.1. "Антикореляція" між фазою і інтенсивністю

Насправді, зв'язок між поведінкою різних параметрів оптичного поля ще жорсткіший. Такий зв'язок між фазою і інтенсивністю в скалярному полі [2; 7] наведений на рис. 4, де видно, що області з малим градієнтом інтенсивності і регіони поля, в яких фаза змінюється відносно швидко, збігаються.

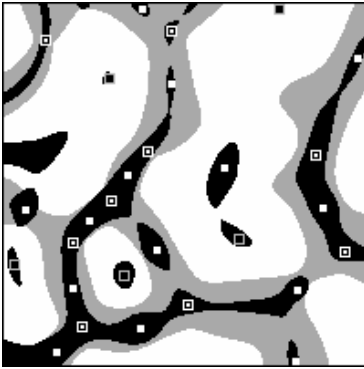


Рис. 4. "Антикореляція" фази (області з малим градієнтом інтенсивності) та інтенсивності (регіони поля, в яких фаза змінюється швидко) скалярного поля. ■, □, ▣ – вихори, сідла інтенсивності, максимуми інтенсивності

3.2. "Антикореляція" між поляризацією і інтенсивністю

Аналогічно пов'язана поведінка інтенсивності і поляризаційних характеристик у векторному полі [2].

Там, де повільно змінюється інтенсивність, швидко змінюються поляризаційні характеристики поля. Такий зв'язок стає жорсткіше, чим менша поляризаційна неоднорідність векторного поля.

Комп'ютерне моделювання здійснено за умови, що середні інтенсивності ортогональних компонент збігаються. У цьому випадку коефіцієнт

кореляції ортогональних компонент однозначно визначає поляризаційну однорідність поля.

Природно, чим більше коефіцієнт кореляції, тим більше подібні мережі компонентних вихорів. Отже, відстань між аналогічними компонентними вихорами залежить від усереднених поляризаційних параметрів [2].

4. Сингулярності вектора Умова–Пойнтинга та їх зв'язок з поляризаційними сингулярностями

Як уже зазначалося вище, всі системи сингулярностей пов'язані між собою хоча б у статистичному значенні. Не є винятком і система сингулярностей азимута поперечної складової вектора Умова–Пойнтинга. Коротко будемо називати такі сингулярності пойнтинг-сингулярностями [2].

Сингулярності вектора Умова–Пойнтинга можуть бути вихровими й пасивними [2]. Під вихровими пойнтинг-сингулярностями розуміємо сингулярності, в околі яких поперечна компонента вектора поводить себе аналогічно області фазового вихору, а усереднений момент імпульсу в області такої сингулярності максимальний порівняно з іншими областями поля того ж розміру й тієї ж енергії поля, яка переноситься цією областю.

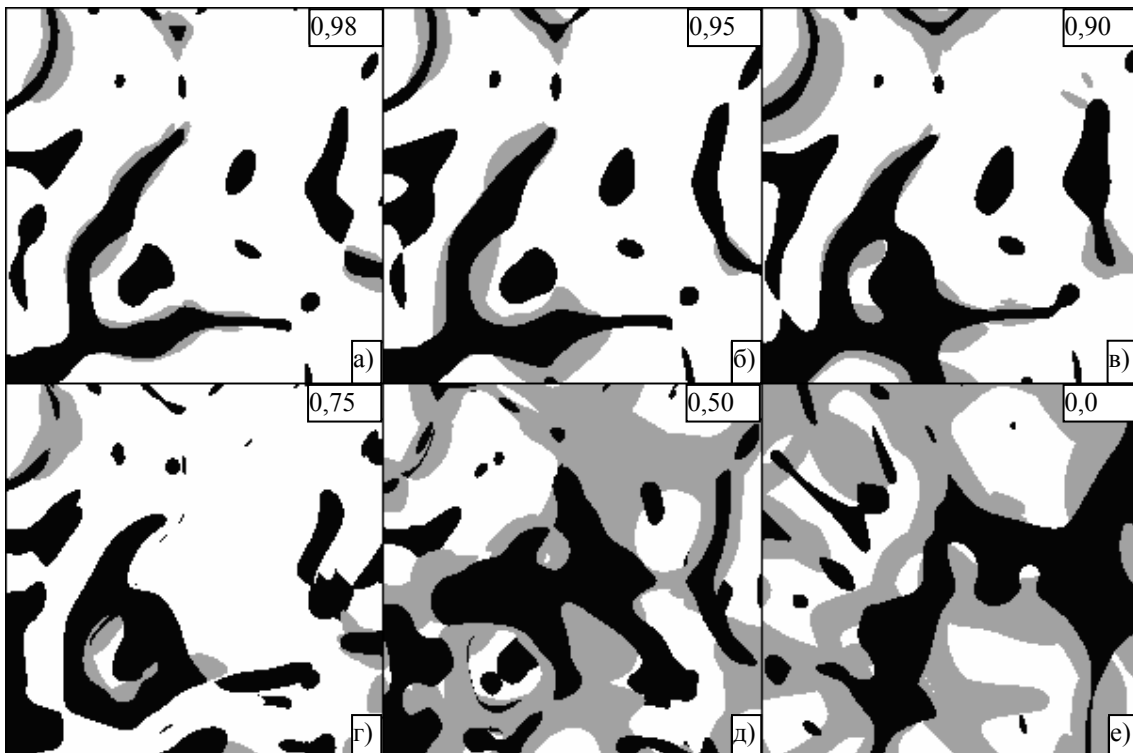


Рис. 5. "Антикореляція" між поляризацією та інтенсивністю векторного поля. ■, □ – регіони поля, в яких поляризація змінюється швидко, і області з малим градієнтом інтенсивності. У правому верхньому кутку кожного рисунка наведений коефіцієнт кореляції ортогональних компонент

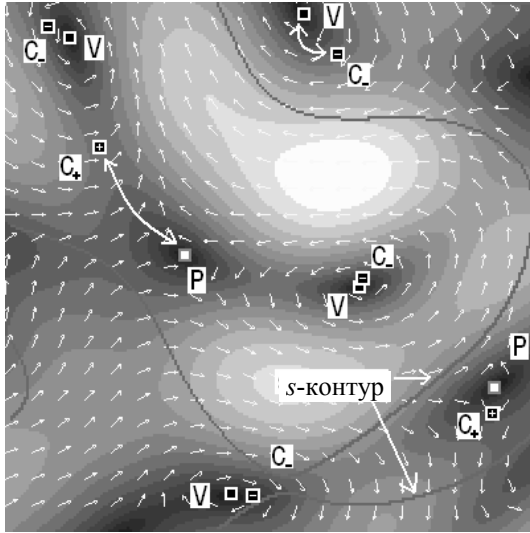


Рис. 6. Сингулярності вектора Умова–Пойнтинга та їх зв'язок із поляризаційними сингулярностями

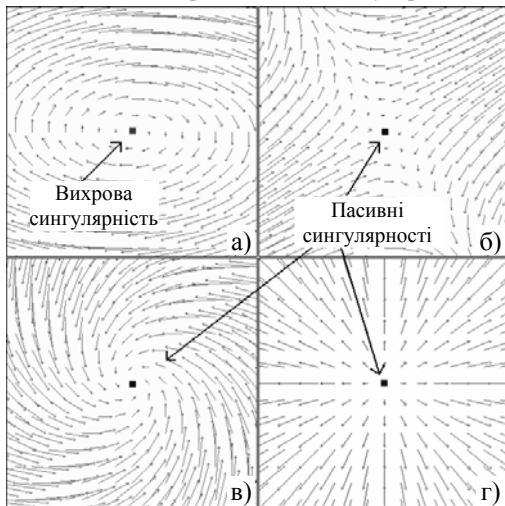


Рис. 7. Типова поведінка компоненти в області пойнтинг-сингулярності: вихрова пойнтинг-сингулярність (а), пасивні пойнтинг-сингулярності (б-г)

Під пасивними пойнтинг-сингулярностями розуміємо такі сингулярності, у невеликому околі яких усереднений момент імпульсу поля дорівнює нулю.

На рис. 6 наведені дані комп'ютерного моделювання – розподіл азимута поперечної компоненти вектора Умова–Пойнтинга для випадкового векторного поля. Коефіцієнт кореляції між ортогональними компонентами дорівнює нулю. Вихрові пойнтинг-сингулярності позначені на рис. 6 літерою *V*, пасивні Пойнтинг-сингулярності – літерою *P*, також показані позиції *C*-точок. Очевидно, що між пойнтинг-сингулярностями і *C*-точками спостерігається певна відповідність. В околі *C*-точок із негативним індексом розташовані вихрові пойнтинг-сингулярності [2]. Картина циркуляції поперечної компоненти в області вихрової пойнтинг-сингулярності аналогічна кар-

тині циркуляції цього вектора навколо центра фазового вихору. Навколо позитивних *C*-точок спостерігаються пасивні пойнтинг-сингулярності [2].

Типова поведінка компоненти в області пойнтинг-сингулярності наведена на рис. 7.

5. Зміни сингулярних мереж у залежності від поляризаційних характеристик векторного поля

У праці [2] було показано, що середня відстань між пойнтинг-сингулярністю і *C*-точкою залежить від співвідношення градієнтів амплітуди й фази ортогональних компонент (від рівня поляризаційної неоднорідності векторного поля). Для характеристики поляризаційної однорідності поля введемо величину – рівень інтегральної деполаризації поля:

$$D = 1 - P, \quad (2)$$

де *P* – рівень "інтегральної" поляризації.

Природно, що у випадку монохроматичної хвилі поле поляризовано повністю і в кожній точці *P*=1. Проте внаслідок усереднення поляризаційних характеристик за площею аналізу ступінь поляризації ділянки поля, або інакше, ступінь "інтегральної" поляризації менше 1.

У випадку збігу середніх інтенсивностей ортогональних компонент

$$P = \sqrt{\bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2} = \gamma, \quad (3)$$

де γ – коефіцієнт кореляції ортогональних компонент, \bar{s}_2, \bar{s}_3 – відповідні усереднені Стокспараметри.

Динаміка сходження пойнтинг-сингулярностей і *C*-точок у випадку, коли коефіцієнт кореляції між компонентами зростає, наведено на рис. 8.

На рис. 8а наведені результати комп'ютерного моделювання для повністю деполаризованого поля. Очевидно, деякі пари пов'язаних пойнтинг-сингулярностей і *C*-точок можна легко ідентифікувати (пари позначені 1). Проте такі пари не завжди очевидні (пари позначені 2). Подібна ситуація продовжується до рівнів деполаризації 40-50%. При цьому в будь-якому випадку середня відстань між пойнтинг-сингулярностями і *C*-точками зменшується в міру зростання поляризаційної однорідності поля.

Видно, що практично всі пари сингулярностей можна легко ідентифікувати, якщо рівень деполаризації менше 30% (дивись рис. 8г-е).

Фінальний акт такого сходження наступає для повністю поляризаційно однорідного поля.

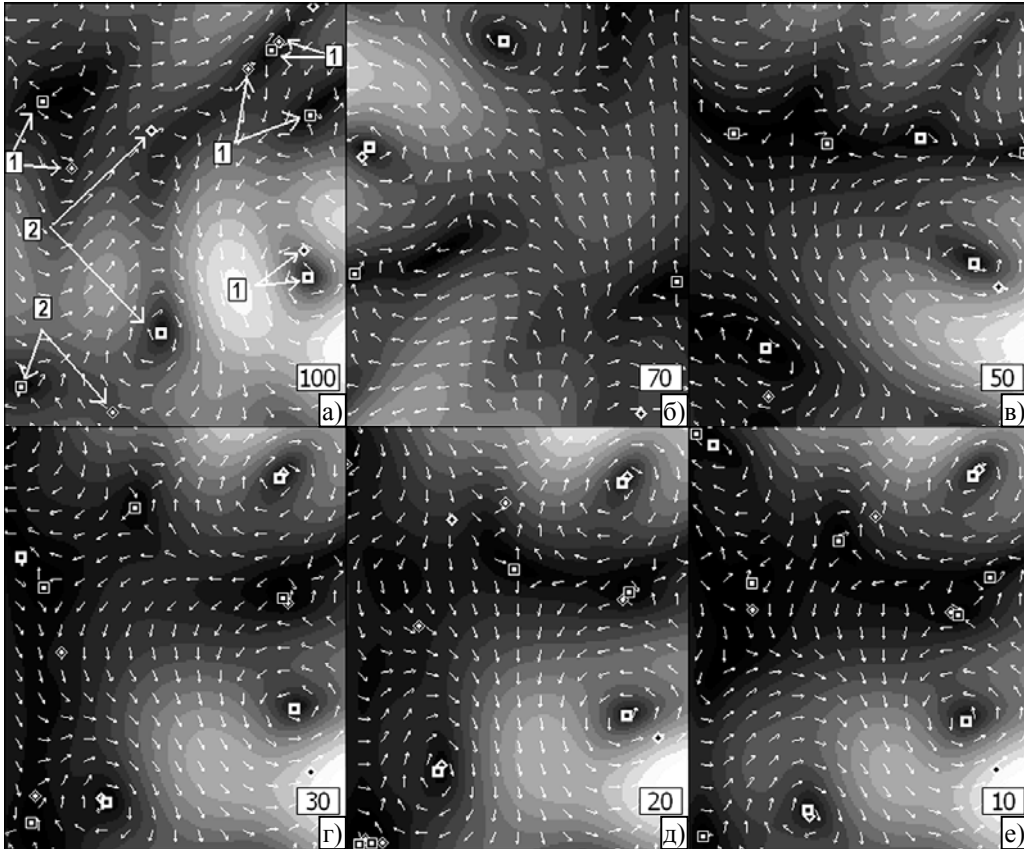


Рис. 8. Зміни сингулярних мереж залежно від поляризаційних характеристик векторного поля.

□, □ – вихрові і пасивні пойнтинг-сингулярності, ◊, ◊ – позитивні і негативні C-точки. "Очевидні" пари пойнтинг-сингулярностей і C-точок (1), "неочевидні" пари (2). Рівень інтегральної деполіризації наведений у правому нижньому кутку кожного рисунка

Усі вихрові пойнтинг-сингулярності займають позиції вихорів поля. Пасивні сингулярності розташовуються в сідлових точках фази, якщо кінцеве поле поляризоване лінійно, і на незначній відстані від них, якщо поле поляризоване еліптично. Найбільша відстань між пасивними сингулярностями й сідловими точками досягається у випадку, коли поле поляризоване циркулярно.

На завершення зазначимо, що має місце наступне твердження, яке безпосередньо впливає з того факту, що всі системи сингулярностей, які асоціюються з різними параметрами поля, пов'язані між собою: "інформації про характеристики будь-якої системи сингулярності достатньо для передбачення якісної поведінки довільного параметра поля, принаймні, з певною імовірністю".

Отже, підсумуємо встановлені факти:

1. Всі сингулярні системи пов'язані між собою, хоча б у статистичному значенні.

- Мережі компонентних вихорів однозначно пов'язані з системою поляризаційних сингулярностей.

- Мережі поляризаційних сингулярностей пов'язані з системою пойнтинг-сингулярностей.
- Водночас система пойнтинг-сингулярностей пов'язана з системою компонентних вихорів.
- Такі зв'язки стають очевидними, якщо рівень поляризаційної однорідності поля підвищується.

2. Кожна сингулярна система визначає якісну поведінку відповідного параметра поля.

3. Інформації про характеристики будь-якої сингулярної системи достатньо для передбачення якісної поведінки будь-якого параметра поля, хоча б у статистичному значенні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nye J.F. Natural focusing and fine structure of light. – Bristol and Philadelphia: Institute of physics publishing. – 1999.
2. Mokhun I.I. Introduction to linear singular optics, Chapter 1 in the book Optical correlation techniques and applications / Edited by O.V. Angelsky. – Bellingham, Washington: SPIE press. – 2007.

3. Baranova N.B., Mamayev A.V., Pilipetsky N.F., Shkunov V.V., Zeldovich B.Ya. Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation // J.Opt.Soc.Am. – 1983. – **A73**. – P. 525-528.
4. Nye J.F., F.R.S., Hajnal J.V., Hannay J.H. Phase saddles and dislocations in two-dimensional waves such as the tides // Proc. R. Soc. Lond. – 1988. – **A417**. – P. 7-20.
5. Freund I., Shvartsman N. Wave-field singularities: The sign principle // Phys. Rev. A. – 1994. – **50**, No.6. – P. 5164-5172.
6. Freund I., Shvartsman N., Freilikh V. Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Comm. – 1993. – **101**. – P. 247-264.
7. Mokhun I. Amplitude zeroes and structure of statistical optical fields. Correlation between the field's intensity and phase // Proc. SPIE. – 1998. – **3573**. – P. 567-571.
8. Angelsky O., Besaha R., Mokhun A., Mokhun I., Sopin M., Soskin M., Vasnetsov M. Singularities in vectorial fields // SPIE Proc. – 1999. – **3904**. – P. 40-55.
9. Angelsky O., Mokhun A., Mokhun I., Soskin M. The relationship between topological characteristics of component vortices and polarization singularities // Opt. Comm. – 2002. – **207**. – P. 57-65.
10. Ангельський О., Бесага Р., Мохун І., Сопін М., Соскін М. Сингулярності векторних полів // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 57: Фізика.Електроніка. – Чернівці: ЧДУ, 1999. – С.88-99.
11. Freund I., Soskin M., Mokhun A. Elliptic critical points in paraxial optical fields // Optics Comm. – 2002. – **208**. – P. 223-253.