УДК 518:517.948

© 2008 р. І.С. Вірт, М.В. Дорошенко, Л.В. Лазурчак

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Дрогобич

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ ГРАНИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ І ГЕОМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Розглядається обернена задача теорії потенціалу знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь і оптимального розподілу граничних потенціалів в осесиметричному випадку. Методика розв'язання оберненої задачі зводиться до мінімізації деякого функціонала та розв'язування системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з логарифмічною особливістю.

We look at the inverse problem of potential theory for finding optimal geometry of boundary surfaces and optimal distribution of boundary potential in the axisymmetric case. The methodology of solution of the inverse problem comes down to the minimization of some functional and solving of system of the first genus integral Fredgolm equations with a logarithmic peculiarity.

Крайові задачі математичної фізики поділяються на прямі та обернені. У прямих задачах знаходять характеристики поля при відомих геометрії граничних поверхонь і крайових умовах. В обернених задачах знаходять крайові умови та геометрію граничних поверхонь, які реалізують задані характеристики поля.

Розв'язання прямої задачі теорії потенціалу при розрахунку електростатичних полів, які створюють електронно-оптичні системи, зводиться до розв'язання внутрішньої та зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Задача знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь актуальна при проектуванні електронно-оптичних систем, які реалізують задані параметри електронно-оптичних систем. Така задача зводиться до розв'язання певних обернених задач математичної фізики.

Обернені задачі математичної фізики часто у класичному розумінні поставлені некоректно, тобто малим змінам у функціоналах можуть відповідати великі зміни в розв'язку задачі [6]. Тому розробка ефективних алгоритмів розв'язання обернених задач математичної фізики достатньо актуальна проблема.

Аналіз попередніх публікацій

Ефективним методом розв'язання прямої задачі є метод інтегральних рівнянь, який застосовувався для розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в працях [1; 5]. За допомогою данного методу розв'язання зовнішньої та внутрішньої задач Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Ефективність методу інтегральних рівнянь полягає у зменшенні розмірності задачі на одиницю.

Задача знаходження оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем, яка зводиться до розв'язання обернених задач теорії потенціалу, розглядалась у працях [4; 7; 8].

У працях [4; 7] при знаходженні оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем розв'язувались інтегральні рівняння у варіаціях і здійснювалась мінімізація деякого фунціонала.

У праці [8] розглянута обернена задача реконструкції межі обмеженого включення в частково необмежену канонічну область задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Для розв'язку такої задачі застосовувався гібридний метод, який полягає в наступному: методом Ньютона здійснюється лінеаризація відповідного нелінійного операторного рівняння, до якого зводиться розв'язання оберненої задачі, використовується техніка функцій Гріна для того, щоб розв'язок задачі звести до розв'язку деякого інтегрального рівняння першого роду.

Метою роботи є розробка числових алгоритмів для знаходження розподілу граничних потенціалів та знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь в осесиметричному випадку при заданому розподілі потенціалу на осі симетрії. Ці алгоритми застосовують для знаходження мінімумів деяких функціоналів і розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду.

Основні результати

На відрізку $[a,b]$ осі Oz циліндричної системи координат (r,z,φ) задана деяка достатньо гладка функція $U_0(z)$. Необхідно знайти розподіл потенціалів $\left\{V_0^{(i)}\right\}_{i=1}^m$ на осі симетрії розімкнених поверхонь $\left\{S=\bigcup_{i=1}^m S_i\right\}$, які створюють осесиметричне електростатичне поле $U(r,z)$ за умови $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$. Функція $U(r,z)$ є розв'язком такої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$U(r,z)=V_0^{(i)}, \quad (r,z)\in S_i, \tag{2}$$

$$\lim_{(r,z)\to\infty} U(r,z)=0. \tag{3}$$

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ потрібно визначати з умови $U(0,z)=U_0(z)$.

Розв'язок задачі (1)–(3) визначимо в такому вигляді:

$$U(r,z)=\sum_{i=1}^m V_0^{(i)}\varphi_i(z), \tag{4}$$

де $\varphi_i(r,z)$ – розв'язки таких характеристичних крайових задач:

$$\Delta\varphi_i(r,z)=0, \tag{5}$$

де $$\varphi_i(r,z)=\begin{cases}0, \text{ якщо } (r,z)\notin S_i,\\ 1, \text{ якщо } (r,z)\in S_i,\end{cases}$$

$$\lim_{(r,z)\to\infty}\varphi_i(r,z)=0.$$

Розв'язки задачі (5) не залежать від заданих на поверхнях потенціалів.

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ є розв'язком такої задачі:

$$F\left(V_0^{(1)},V_0^{(2)}\ldots,V_0^{(m)}\right)= = \min\| U_0(z)-\sum_{i=1}^m V_0^{(i)}\varphi_i(z)\|^2, \tag{6}$$

де $\| g(z)\|^2=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b | g(z)|^2\, dz.$

Чисельне розв'язування даної задачі зводиться до розв'язування двох задач.

1. Розв'язування системи одномірних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду:

$$\sum_{i=1}^m\int_{L_i}\mu^{(i)}(r,z)E^{j(i)}(r,z,\bar r,\bar z)dl_i=\delta_{ij}, \tag{7}$$

де $\mu^{(i)}(r,z)$ – шукані функції,

$$E^{j(i)}(r,z,\bar r,\bar z)=\frac{K^{j(i)}(k)r^{(i)}}{\sqrt{\left(r^{(i)}+\bar r^{(j)}\right)^2+\left(z^{(i)}-\bar z^{(j)}\right)^2}},$$

$K^{j(i)}(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Мінімізації функціонала:

$$F\left(V_0^{(1)},V_0^{(2)},\ldots,V_0^{(\mathrm{m})}\right)=\left\|U_0(\bar z)-\sum_{i=1}^m V_0^{(i)}\varphi_i(\bar z)\right\|^2, \tag{8}$$

де $$U_i(0,\bar z)=\int_{L_i}\mu^{(i)}(r,z)E^{(i)}(r,z,\bar r,\bar z)dl,$$

$$\varphi_i(\bar z)=U_i(0,\bar z).$$

Невідомі функції $\mu^{(i)}(r,z)$ мають сингулярну особливість на краях розімкнених поверхонь, а ядро має логарифмічну особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування. Якщо поверхні замкнені, то отримані інтегральні рівняння Фредгольма мають тільки логарифмічну особливість.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь застосовувався метод колокації. Для знаходження невідомих функцій $\mu^{(i)}(r,z)$ два підходи, а саме, кубічні сплайни [3] і апарат ізопараметричних перетворень [2].

Перший підхід полягає в такому.

Нехай криві L_i задані параметрично

$$r_i=r_i(t),\ z_i=z_i(t),\ a_i\le t\le b_i.$$

На відрізках $[a_i,b_i]$ виберемо вузлові точки $a_i=t_0<t_1<\ldots<t_n=b_i$. Невідомі функції $\mu_k^{(i)}(t)= =\mu_k^{(i)}(r_i(t),z_i(t))$ на кожному інтервалі $[t_k,t_{k+1}]$ визначимо в такому вигляді:

$$\mu_k^{(i)}(\tau)=(1-\tau)^2(1+2\tau)\mu_k^{(i)}+(3-2\tau)\tau^2\mu_{k+1}^{(i)}+ +(1-\tau)^2h_k\mu_k^{(i)}+\tau^2(\tau-1)h_{k+1}\mu_{k+1}^{(i)},$$

$$h_k=t_{k+1}-t_k,\quad \tau=(t-t_k)/h_k.$$

Невідомі функції на L_i визначимо так:

$$\mu_k^{(i)}(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k^{(i)}(\tau)\theta_k(\tau), \tag{9}$$

де $\theta_k(\tau)$ – функції, які враховують особливість на краю поверхонь S_i [5] і визначаються так:

$$\theta_1(\tau)=(\tau-a)^{-n_1},\ \theta_n(\tau)=(b-\tau)^{-n_2},\ \theta_k(\tau)=1,$$

$$k=\overline{2,n-1},\quad 0\le n_1\le 1,\ 0\le n_2\le 1.$$

Другий підхід полягає у використанні апарату ізопараметричних перетворень для апроксимації невідомої густини. При цьому термін "ізопараметричний" означає, що граничні криві й невідомі густини апроксимуються за допомогою поліноміальних функцій.

Криві L_i в залежності від ступеня їх гладкості апроксимуємо за допомогою сукупності двовузлових, тривузлових і чотиривузлових елементів, що відповідає лінійному, квадратичному й кубічному перетворенням форми кривої.

Лінійні перетворення (лінійні фінітні базисні функції) мають вигляд

$$N^1(\tau)=\tfrac{1}{2}(1+\tau),$$
$$N^2(\tau)=\tfrac{1}{2}(1-\tau).$$

Квадратичні перетворення (квадратичні фінітні базисні функції) мають вигляд

$$N^1(\tau)=\tfrac{1}{2}\tau(1+\tau),$$
$$N^2(\tau)=\tfrac{1}{2}\tau(1-\tau),$$
$$N^3(\tau)=(1+\tau)(1-\tau)=1-\tau^2.$$

Кубічні перетворення (кубічні фінітні базисні функції) мають вигляд

$$N^1(\tau)=\tfrac{1}{16}(1+\tau)(1+3\tau)(3\tau-1),$$
$$N^2(\tau)=\tfrac{1}{16}(1-\tau)(1+3\tau)(3\tau-1),$$
$$N^3(\tau)=\tfrac{9}{16}(1+\tau)(1-\tau)(1+3\tau),$$
$$N^4(\tau)=\tfrac{9}{16}(1+\tau)(1-\tau)(1-3\tau).$$

Отже, невідома густина на кожному елементі має вигляд

$$\mu_i(\tau)=\sum_{l=1}^{p} N^l(\tau)\mu_i^{\,l}, \text{ де } p=2, 3 \text{ або } 4.$$

Невідомі густини на L_i визначаються за допомогою (9).

У результаті застосування для розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (7) методу колокації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають особливості завдяки особливостям на краю розімкнених поверхонь і в ядрах інтегральних рівнянь. Особливості на краю розімкнених поверхонь виділяються заміною змінних [5]. Логарифмічна особливість в ядрі виділяється за методикою ослаблення особливостей Канторовича, тобто від підінтегральної функції віднімається й додається функція, яка поводить себе в особливій точці як підінтегральна функція, а інтеграл від неї знаходиться аналітично. Для наближеного обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь використана квадратурна формула Гаусса. При числовій реалізації методу колокації для наближеного обчислення інтегралів з логарифмічною особливістю використана квадратурна формула з ваговою функцією $\ln(1/x)$.

Невідомі $V_0^{(i)}$ знаходилися з необхідної умови мінімуму функціонала (8) з такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial F\left(V_0^{(1)},V_0^{(2)},\ldots,V_0^{(m)}\right)}{\partial V_0^{(i)}}=0,\quad i=\overline{1,m}.$$

Числова реалізація запропонованої методики здійснювалась у прикладній системі *MatLab*. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,05%.

Тепер розглянемо обернену задачу теорії потенціалу, яка полягає в знаходженні невідомої геометрії області, якщо відомий осьовий розподіл потенціалу поля $\Phi(z)$ на проміжку $[a,b]$. Наближений розв'язок такої задачі базується на методі інтегральних рівнянь та теорії малих збурень, а саме: малі збурення $\delta\vec{r}$ регулярної області L породжують збурення потенціалу $\delta u=-(\nabla U,\delta\vec{r})$, де ∇U – величина градієнта поля на незбуреній межі.

Застосовуючи теорію малих збурень [6], невідоме параметричне зображення геометрії області будемо шукати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} r_k(\alpha)&=r_{k-1}(\alpha)+\delta r(\alpha),\\ z_k(\alpha)&=z_{k-1}(\alpha)+\delta z(\alpha), \end{aligned} \qquad (10)$$

де $r_0(\alpha), z_0(\alpha)$ – вибираються на основі апріорної інформації про невідому достатньо гладку замкнену область, а варіації $\delta r(\alpha)$, $\delta z(\alpha)$ виберемо так:

$$\delta r(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(\alpha),\quad \delta z(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}b_i\psi_i(\alpha), \qquad (11)$$

де $\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ – деякі лінійно незалежні системи функцій.

Невідому густину визначимо аналогічно:

$$\mu_k(\alpha)=\mu_{k-1}(\alpha)+\delta\mu(\alpha), \qquad (12)$$

де $\delta\mu(\alpha)=\sum_{i=1}^{l}c_i\tau_i(\alpha)$.

Алгоритм знаходження невідомої геометрії області зводиться до такої ітераційної числової схеми:

1. При заданому $r_{k-1}(\alpha)$, $z_{k-1}(\alpha)$ розв'язуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_L \mu_{k-1}(r,z)E(r,z,\bar{r},\bar{z})dl = U_0, \quad (13)$$

де $\mu_{k-1}(r,z)$ – шукана густина на k–1 кроці ітерації, $E(r,z,\bar{r},\bar{z}) = \dfrac{K(k)\,r}{\sqrt{\left(r^{(i)}+\bar{r}^{(j)}\right)^2+\left(z^{(i)}-\bar{z}^{(j)}\right)^2}}$.

Для числового розв'язування інтегрального рівняння (13) застосовуємо метод колокації, а невідому густину вибираємо у вигляді кубічних сплайн-функцій. Логарифмічна особливість в ядрі виділяться методом ослаблення особливостей Канторовича.

2. Визначення невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i зводиться до мінімізації функціонала

$$F(a_1, a_2, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_l) = \\ = \left\|\Phi(z) - u(0,z) - \delta u(z)\right\|^2_{L_2[a,b]}, \quad (14)$$

де $\delta U(z) = \int\limits_{L(\alpha)} \left(\delta\mu(\alpha)G_{k-1}(\alpha,z) + \mu_{k-1}(\alpha)V_{k-1}(\alpha,z)\right)d\alpha$,

$$G_{k-1}(\alpha,z) = 2\pi\frac{r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha,z)},$$

$$V_{k-1}(\alpha,z) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\eta_{k-1}r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha,z)} + \frac{\xi(\alpha)r_{k-1}(\alpha)}{R^3_{k-1}(\alpha,z)}F_{k-1}(\alpha)\right),$$

$$\xi(\alpha) = \delta r(\alpha)\left(z - z_{k-1}(\alpha)\right)^2 + \\ + \delta z(\alpha)r_{k-1}(\alpha)\left(z - z_{k-1}(\alpha)\right),$$

$$R_{k-1}(\alpha) = \sqrt{\left(z_{k-1}(\alpha) - z\right)^2 + r_{k-1}(\alpha)}\,.$$

Вигляд функції $\eta(\alpha)$ залежить від вибору класу малих збурень. Якщо розміри поверхні не змінюються, то $\eta(\alpha)=0$.

Використовуючи необхідну умову існування екстремуму функціонала (14), отримуємо некоректну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом Тихонова з вибором параметра регуляризації за принципом нев'язки.

3. Ітераційний процес завершується в разі виконання умови

$$\left\|r_k(\alpha) - r_{k-1}(\alpha)\right\| < \varepsilon,$$

$$\left\|z_k(\alpha) - z_{k-1}(\alpha)\right\| < \varepsilon.$$

Числова реалізація запропонованої методики здійснювалась у прикладній системі *MatLab*. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,1%.

Висновки

1. Числові розрахунки показали, що досягнута точність достатня для розв'язування практичних задач.
2. Ітераційний алгоритм знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь для модельних прикладів збігається достатньо швидко.
3. Запропонований алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь першого роду дозволяє досягнути високої точності при розв'язанні модельних задач.
4. Для розв'язування інтегральних рівнянь запропонована єдина методика, а саме:

- невідома густина апроксимується за допомогою кубічних сплайн-функцій або апарату ізопараметричних перетворень;
- для зведення інтегральних рівнянь до системи лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується метод колокації;
- логарифмічна особливість в ядрі виділяється методом ослаблення особливостей Канторовича;
- для числового обчислення інтегралів використовується квадратурна формула Гаусса.

Перспективою досліджень є знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь для суттєво просторових задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бакалец В.А., Людкевич И.В.* Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Учебное пособие. – Львов: Изд-во ЛГУ, 1986.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Наука, 1984.
3. *Дорошенко М.В., Дудник О.М., Пушак Я.С.* Два підходи чисельного розв'язування інтегральних рівнянь першого роду // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №341. – С.103-105.
4. *Иванов В.Я.* Методы математического моделирования задач электронной оптики. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1986.
5. *Ильин В.П.* Чисельные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1986.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
7. *Монастырский М.А.* Интегральные уравнения в экстремальных задачах электронной оптики.– Новосибирск,1979. – (Препр. / ВЦ СО АН СССР).
8. *Chapko R., Kress R.* A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // Journal of Ill – Posed and Inverse Problems. – 2005. – **13**. – P. 27-40.