

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ОХОПЛЮЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ НА ВИПАДОК СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОНІВ, ЩО РУХАЮТЬСЯ ВЗДОВЖ ДОВІЛЬНОЇ ЗАДАНОЇ ТРАЄКТОРІЇ У ПРОЗОРОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Узагальнено метод охоплюючих поверхонь Соколова, Гальцова і Колесникової (1971) на випадок системи електронів, що рухаються вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому ізотропному середовищі. Отримано основні співвідношення для класичної теорії випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому ізотропному середовищі. Розглянуто спектрально-кутовий і спектральний розподіли середньої потужності випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому ізотропному середовищі.

Ключові слова: метод охоплюючих поверхонь, синхротронно-черенковське випромінювання, осциляції, стрибкоподібні варіації.

Метод охватывающих поверхностей Соколова, Гальцова и Колесниковой (1971) обобщен на случай системы электронов, движущихся вдоль произвольной заданной траектории в прозрачной изотропной среде. С помощью этого метода получены основные соотношения классической теории излучения системы электронов, движущихся вдоль произвольной заданной траектории в прозрачной изотропной среде. Рассмотрены спектрально-угловые и спектральные распределения средней мощности излучения системы электронов, движущихся вдоль винтовой линии в прозрачной изотропной среде.

Ключевые слова: метод охватывающих поверхностей, синхротронно-черенковское излучение, осцилляции, скачкообразные вариации.

The Sokolov, Galtsov and Kolesnikova method of enveloping surfaces (1971) is generalized for the case of the system of electrons moving along an arbitrary defined trajectory in transparent isotropic medium. The basic relationships for the classical radiation theory of the system of electrons moving in transparent isotropic medium along an arbitrary defined trajectory are obtained using this method. The spectral-angular and spectral distributions of the averaged radiation power of the system of electrons moving along a spiral in transparent isotropic medium are studied.

Keywords: method of enveloping surfaces in medium, synchrotron-Cherenkov radiation, oscillations, hopping variations.

Вступ

У 1907 Г.А. Шотт [1,2] році вперше строго в рамках класичної електродинаміки дослідив спектр випромінювання електронів, що рухаються по колу. Формули для спектрально-кутових і спектральних розподілів потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються по колу або гвинтової лінії, отримано авторами [1-6] методом визначення поля у хвильовій зоні. Основні властивості синхротронного випромінювання заряджених частинок, що рухаються у вакуумі, проаналізовані в огляді [7].

У теоретичних дослідженнях спектраль-

ного складу синхротронного випромінювання електронів, що рухаються вздовж кола, Іваненко, Соколов [3] і Швінгер [4] отримали ультрарелятивістські асимптотичні формули.

Строго, без розкладу за малим параметром, методами: сили самодії Лоренца, доповненого гіпотезою Дірака [8-12], і охоплюючих поверхонь Соколова, Гальцова і Колесникової [13], досліджено синхротронне випромінювання заряджених частинок, які рухаються вздовж кола або вздовж гвинтової лінії у вакуумі. У методі сили самодії Лоренца, доповненого гіпотезою Дірака,

потенціали визначаються через піврізницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів. У методі охоплюючих поверхонь використовують запізнюючі потенціали. У працях [14,15] методом охоплюючих поверхонь досліджено випромінювання заряджених частинок, які рухаються у паралельних магнітному і електричному полях у вакуумі. Спектр випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у вакуумі точним (без розкладу за малим параметром) методом сили самодії Лоренца, доповненого гіпотезою Дірака досліджено в роботах [16–19].

Цитович [20] уперше детально розглянув випадок осциляцій у спектрі випромінювання релятивістської зарядженої частинки, що рухається вздовж кола в постійному магнітному полі у середовищі за наявності дисперсії. У працях [8-12, 21-30] узагальнено точний метод сили самодії Лоренца, доповнений гіпотезою Дірака, на випадок заряджених частинок, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорих ізотропних диспергуючих середовищах.

Точний метод охоплюючих поверхонь узагальнено на випадок окремого заряду, які рухається вздовж гвинтової лінії у прозорому ізотропному середовищі у праці [31]. Спектр синхротронно-черенковського випромінювання електронів, які рухаються у прозорому середовищі у магнітному полі, досліджено також точним методом джерел Швінгера [32].

Метою даної роботи є отримання методом охоплюючих поверхонь основних співвідношень для спектрально-кутового і спектрального розподілів середньої за часом потужності випромінювання системи електронів, які рухаються вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому ізотропному середовищі.

Використовуючи основні формули для спектрально-кутового і спектрального розподілів середньої потужності випромінювання системи електронів, досліджено тонку структуру спектрі електромагнітного випромінювання електронів, які рухаються

вздовж гвинтової лінії у постійному магнітному полі у прозорому середовищі. При дослідженні тонкої структури спектра випромінювання електронів використовуємо числові і аналітичні методи.

Визначення методом охоплюючих поверхонь основних співвідношень для спектрально-кутових і спектрального розподілів потужності випромінювання електрона, що рухається вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому середовищі

Для випадку прозорого ізотропного середовища запізнюючі скалярний $\varphi^{ret}(\vec{r}, t)$ і векторний $\vec{A}^{ret}(\vec{r}, t)$ потенціали, з урахуванням частотної дисперсії, запишуться так [33]:

$$\varphi^{ret}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \frac{\rho(\vec{r}', t') \exp\{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')\}}{\varepsilon(\omega) \left(k^2 - \frac{n^2(\omega)}{c^2}(\omega + i\alpha)^2\right)}, \quad (1)$$

$$\vec{A}^{ret}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mu(\omega) \times \frac{\vec{j}(\vec{r}', t') \exp\{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')\}}{c \left(k^2 - \frac{n^2(\omega)}{c^2}(\omega + i\alpha)^2\right)}. \quad (2)$$

Тут α – нескінченно мала величина, яка перетворюється в нуль після розрахунку інтеграла, $\rho(\vec{r}', t')$ – густина заряду, $\vec{j}(\vec{r}', t')$ – густина струму, $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$, $\varepsilon(\omega)$ – діелектрична проникність, $\mu(\omega)$ – магнітна проникність.

Запізнюючі потенціали можна записати так:

$$\varphi^{ret}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \frac{\rho(\vec{r}', t')}{\varepsilon(\omega)} G(\vec{k}, \omega) \exp\{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')\}, \quad (3)$$

$$\vec{A}^{ret}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \mu(\omega) \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{c} G(\vec{k}, \omega) \exp\{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')\}, \quad (4)$$

$$\text{де } G(\vec{k}, \omega) = \left(k^2 - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} (\omega + i\alpha)^2 \right)^{-1} = \left(k^2 - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} \right)^{-1} + i\pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta \left(k^2 - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} \right). \quad (5)$$

У циліндричній системі координат (R, α, z) потенціали набувають вигляду :

$$\begin{aligned} \varphi^{ret}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \\ &\times G(\vec{k}, \omega) \frac{\rho(\vec{r}', t')}{\varepsilon(\omega)} \exp\{ik_z(z-z') - i\omega(t-t')\} \times \\ &\times \exp\{ikR \cos(\psi - \alpha) - ikR' \cos(\alpha' - \psi)\}, \quad (6) \\ \vec{A}^{ret}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \\ &\times G(\vec{k}, \omega) \frac{\mu(\omega)}{c} \exp\{ik_z(z-z') - i\omega(t-t')\} \times \\ &\times \exp\{ikR \cos(\psi - \alpha) - ikR' \cos(\alpha' - \psi)\} \times \\ &\times [\vec{i}_R (j_x(\vec{r}', t') \cos \alpha + j_y(\vec{r}', t') \sin \alpha) + \\ &+ \vec{i}_\alpha (-j_x(\vec{r}', t') \sin \alpha + j_y(\vec{r}', t') \cos \alpha) + \\ &+ \vec{i}_z j_z(\vec{r}', t')] \quad (7) \end{aligned}$$

де $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$, $x'=R\cos\alpha'$, $y'=R\sin\alpha'$, $k_x = \kappa \cos \psi$, $k_y = \kappa \sin \psi$.

Виконуючи розклад плоскої хвилі за функціями Бесселя [34]

$$\begin{aligned} \exp[i\kappa R \cos(\alpha - \psi)] &= \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\kappa R) \exp[im(\alpha - \psi)], \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp[-i\kappa R' \cos(\alpha' - \psi)] &= \\ &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} (-i)^{m'} J_{m'}(\kappa R') \exp[-im'(\alpha' - \psi)], \quad (9) \end{aligned}$$

та інтегруючи по ψ і по κ , використовуючи метод, наведений у праці [13], і співвідношення, наведене у [34] (на с.693), знаходимо

$$\begin{aligned} \varphi^{ret}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \\ &\times \frac{\rho(\vec{r}', t')}{\varepsilon(\omega)} \exp\{ik_z(z-z') - i\omega(t-t')\} \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp[-im(\alpha - \alpha')] \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega)|\omega|}{c} - |k_z| \right) J_m(\gamma_1 R') H_m(\gamma_1 R) \right. \\ \left. \times \left[\eta \left(|k_z| - \frac{n(\omega)|\omega|}{c} \right) I_m(\gamma_2 R') K_m(\gamma_2 R) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}^{ret}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \times \\ &\times \frac{\mu(\omega)}{c} \exp\{ik_z(z-z') - i\omega(t-t')\} \times \\ &\times [\vec{i}_R (j_x(\vec{r}', t') \cos \alpha + j_y(\vec{r}', t') \sin \alpha) + \\ &+ \vec{i}_\alpha (-j_x(\vec{r}', t') \sin \alpha + j_y(\vec{r}', t') \cos \alpha) + \\ &+ \vec{i}_z j_z(\vec{r}', t')] \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp[-im(\alpha - \alpha')] \times \\ &\times \left\{ \frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega)|\omega|}{c} - |k_z| \right) J_m(\gamma_1 R') H_m(\gamma_1 R) \right. \\ &\left. \times \left[\eta \left(|k_z| - \frac{n(\omega)|\omega|}{c} \right) I_m(\gamma_2 R') K_m(\gamma_2 R) \right] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} - k_z^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_z^2 - \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2}},$$

$$H_m(\gamma_1 R) = i \frac{\omega}{|\omega|} J_m(\gamma_1 R) - N_m(\gamma_1 R),$$

$$\eta(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}, \quad J_m \text{ і } N_m - \text{функції Бесселя}$$

цілого індексу відповідно 1-го й 2-го роду, I_m – функція Бесселя уявного аргумента, а K_m – функція Макдональда, $R > R'$.

Знайдемо потужність випромінювання заряджених частинок, що проходить через циліндричну поверхню з віссю z , радіуса R , що оточує траєкторію частинок.

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \frac{cR}{4\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha (E_\alpha H_z - E_z H_\alpha) = \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad (12) \end{aligned}$$

де u_1 і u_2 визначаються виразом

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{cR}{4\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha (-E_z H_\alpha) = \\ &= -\frac{cR}{16\pi^5} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'' \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{\infty} dk''_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \rho(\vec{r}', t') \rho(\vec{r}'', t'') \times \\ & \times \sum_{m, m'=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+m'} \exp[-im(\alpha-\alpha')] \exp[-im'(\alpha-\alpha'')] \times \\ & \times \exp\{ik'_z(z-z')-i\omega'(t-t')\} \times \\ & \times \exp\{ik''_z(z-z'')-i\omega''(t-t'')\} \times \\ & \times \left[-\left(i \frac{k'_z}{\varepsilon(\omega')} - i \frac{\mu(\omega')\omega'}{c^2} V_z(t') \right) \right] \times \\ & \times \left(\frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega')|\omega'|}{c} - |k'_z| \right) J_m(\gamma'_1 R') H_m(\gamma'_1 R') \right) \times \\ & \times \left(\eta \left(|k'_z| - \frac{n(\omega')|\omega'|}{c} \right) I_m(\gamma'_2 R') K_m(\gamma'_2 R') \right) \times \\ & \times \left(\frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega'')|\omega''|}{c} - |k''_z| \right) J_{m'}(\gamma''_1 R'') \right) \times \\ & \times \left(\eta \left(|k''_z| - \frac{n(\omega'')|\omega''|}{c} \right) I_{m'}(\gamma''_2 R'') \right) (f_1 + f_2). \end{aligned} \quad (13)$$

f_1 і f_2 визначають підінтегральні вирази для u_1 і u_2 , відповідно,

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\begin{aligned} & \left(-\gamma_1'' \frac{V_z(t'')}{c} H_{m'}(\gamma_1'' R) \right) \\ & \left(-\gamma_2'' \frac{V_z(t'')}{c} K_{m'}(\gamma_2'' R) \right) \end{aligned} \right), \\ f_2 &= \left(\begin{aligned} & \left(ik_z'' \frac{V_R(t'')}{c} H_{m'}(\gamma_1'' R) \right) \\ & \left(ik_z'' \frac{V_R(t'')}{c} K_{m'}(\gamma_2'' R) \right) \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 + u_4 &= \frac{cR}{4\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha (E_\alpha H_z) = \\ &= -\frac{cR}{16\pi^5} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'' \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_{-\infty}^{\infty} dk''_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \rho(\vec{r}', t') \rho(\vec{r}'', t'') \times \\ & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\gamma_1 R') J_m(\gamma_1 R'') \exp[im(\alpha' - \alpha'')] = \\ & \times \exp\{ik'_z(z-z')-i\omega'(t-t')\} \times \\ & \times \exp\{ik''_z(z-z'')-i\omega''(t-t'')\} \times \end{aligned}$$

$$\times (f_3 + f_4) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega')|\omega'|}{c} - |k'_z| \right) J_m(\gamma'_1 R') H_m(\gamma'_1 R') \right) \times \\ & \times \left(\eta \left(|k'_z| - \frac{n(\omega')|\omega'|}{c} \right) I_m(\gamma'_2 R') K_m(\gamma'_2 R') \right) \times \\ & \times \left(\frac{\pi}{2} \eta \left(\frac{n(\omega'')|\omega''|}{c} - |k''_z| \right) J_{m'}(\gamma''_1 R'') \right) \times \\ & \times \left(\eta \left(|k''_z| - \frac{n(\omega'')|\omega''|}{c} \right) I_{m'}(\gamma''_2 R'') \right) \times \\ & \times \left(\gamma_1'' \frac{V_\alpha(t'')}{c} H_{m'}(\gamma_1'' R) + im' \frac{V_R(t'')}{Rc} H_{m'}(\gamma_1'' R) \right) \times \\ & \times \left(\gamma_1'' \frac{V_\alpha(t'')}{c} K_{m'}(\gamma_2'' R) + im' \frac{V_R(t'')}{Rc} K_{m'}(\gamma_2'' R) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

f_3 і f_4 визначають підінтегральні вирази для u_3 і u_4 , відповідно,

$$f_3 = -i \frac{m}{R\varepsilon(\omega')}, \quad f_4 = -i \frac{\mu(\omega')\omega'}{c^2} V_\alpha(t').$$

Розглянемо у співвідношеннях (13) і (14)

область інтегрування $k_z^2 > \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2}$, проін-

тегруємо по t, z, α , використаємо симетрію інтегралів і рекурентні співвідношення для циліндричних функцій [34], тоді отримуємо:

$$\bar{P} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0. \quad (15)$$

Для зручності розрахунку в області значень $\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} > k_z^2$ розглянемо окремо кож-

ний із чотирьох доданків у виразі для потужності, використовуючи рекурентні співвідношення для циліндричних функцій [34].

Проінтегруємо по t, z, α спочатку доданки, що містять в u_1, u_2, u_3, u_4 вираз

$$-\frac{\omega'}{|\omega'|} \frac{\omega''}{|\omega''|} J_m(\gamma_1 R) J_{m'}(\gamma_1'' R) + N_{m'}(\gamma_1'' R) N_m(\gamma_1 R)$$

в добутку $H_m(\gamma_1 R) H_{m'}(\gamma_1'' R)$, і здійснимо заміни

$$k'_z = \frac{n(\omega')|\omega'|}{c} \cos\theta', \quad k''_z = \frac{n(\omega'')|\omega''|}{c} \cos\theta'', \quad (16)$$

використаємо симетрію інтегралів і рекурентні співвідношення для циліндричних

функцій [34], тоді отримуємо, що ці доданки дорівнюють нулю.

Інтегруємо по t , ω'' , z , α , k_z'' у співвідношенні (13) доданки, що містять

$$i \frac{\omega'}{|\omega'|} J_m(\gamma_1 R) N_{m'}(\gamma_1'' R) + i \frac{\omega''}{|\omega''|} J_{m'}(\gamma_1'' R) N_m(\gamma_1 R)$$

в добутку $H_m(\gamma_1 R) H_{m'}(\gamma_1'' R)$, використовуємо рекурентні співвідношення для циліндричних функцій [34], а також інтегральне співвідношення

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\gamma_1 R') J_m(\gamma_1 R'') \exp[im(\alpha' - \alpha'')] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \exp \left[i\gamma_1 \left(R' \cos(\psi + \alpha') - R'' \cos(\psi + \alpha'') \right) \right], \quad (17)$$

для точкового заряду, що рухається вздовж довільної заданої траєкторії:

$$\vec{r}_p(t) = x_p(t)\vec{i}_0 + y_p(t)\vec{j}_0 + z_p(t)\vec{k}_0, \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad (18)$$

з густиною струму і густиною заряду:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(t), \quad \rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_p(t)), \quad (19)$$

отримаємо потужність випромінювання зарядженої частинки, яка рухається вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому середовищі

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \int_0^{2\pi} d\psi \int d\theta \sin \theta \int d\omega \times \\ &\times \exp \left[i \frac{n(\omega)\omega}{c} \sin \theta \cos \psi (x_p(t') - x_p(t'')) \right] \times \\ &\times \exp \left[i \frac{n(\omega)\omega}{c} \sin \theta \sin \psi (y_p(t') - y_p(t'')) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ i \frac{n(\omega)\omega}{c} \cos \theta (z_p(t') - z_p(t'')) + i\omega(t' - t'') \right\} \times \\ &\times \frac{\mu(\omega)\omega}{c^2} \frac{n(\omega)\omega}{c} \times \\ &\times \left\langle [V_x(t')V_x(t'') + V_y(t')V_y(t'') + V_z(t')V_z(t'')] - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Середня за часом потужність випромінювання зарядів (20), яка отримана методом охоплюючих поверхонь, збігається з вира-

зом для потужності, отриманого методом сили самодії Лоренца [26,33], доповненого гіпотезою Дірака [35]:

$$\bar{P}^{rad} = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta W_1(\omega, \theta, \psi), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W_1(\omega, \theta, \psi) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T W_1(t, \omega, \theta, \psi) dt = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{\infty} dt' \omega^2 \mu(\omega) n(\omega) \times \\ &\times \exp \left\{ i \frac{n(\omega)\omega}{c} \omega \sin \theta \left[\cos \psi (x_p(t) - x_p(t')) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \psi (y_p(t) - y_p(t')) \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left[i \frac{n(\omega)\omega}{c} \omega \cos \theta (z_p(t) - z_p(t')) + i\omega(t - t') \right] \times \\ &\times \left[\vec{v}(t)\vec{v}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

де $W(\omega, \theta, \psi)$ – усереднена за часом функція спектрально-кутового розподілу потужності випромінювання заряду.

Середня за часом потужність випромінювання \bar{P}^{rad} , яка виражена через середній спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_2(\omega, \theta)$, отримана шляхом інтегрування (21) і (22) за кутом ψ згідно співвідношення праці [34]:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \int_0^{2\pi} d\psi \cos \left\{ a \sin \theta \left[\cos \psi (x_p(t) - x_p(t')) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \psi (y_p(t) - y_p(t')) \right] \right\} = \\ &= 2\pi J_0 \left(a \sin \theta \sqrt{(x_p(t) - x_p(t'))^2 + (y_p(t) - y_p(t'))^2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

де $a = n(\omega)\omega/c$. Тоді

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta W_2(\omega, \theta), \quad (24) \\ W_2(\omega, \theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt W_2(t, \omega, \theta) = \\ &= \frac{e^2}{2\pi c^3} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{\infty} dt' \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 \times \\ &\times J_0 \left(a \sin \theta \sqrt{(x_p(t) - x_p(t'))^2 + (y_p(t) - y_p(t'))^2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \cos \left\{ \alpha \cos \theta (z_p(t) - z_p(t')) \right\} \cos \omega(t - t') \times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (25)$$

Середня за часом потужність випромінювання \bar{P}^{rad} , яка виражена через середній спектральний розподіл потужності випромінювання $W(\omega) = W_3(\omega)$, отримана шляхом інтегрування (24) і (23) за кутом θ згідно співвідношення праці [34]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta J_0(\alpha \sin \theta) \cos(\beta \cos \theta) = \frac{\sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (26)$$

Тоді отримуємо:

$$\bar{P}^{rad}(t) = \int_0^{\infty} d\omega W(\omega), \quad (27)$$

$$W(\omega) = W_3(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt W_3(t, \omega) = \frac{e^2}{\pi c^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(\omega) \omega \times \frac{\sin \left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')| \right\}}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')|} \cos \omega(t - t') \times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (28)$$

Згідно праці [22], функції джерел N тожних точкових заряджених частинок визначаються співвідношеннями:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^N \vec{V}_l(t) \rho_l(\vec{r}, t), \quad \rho(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^N \rho_l(\vec{r}, t), \quad \rho_l(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_l(t)), \quad (29)$$

де $\vec{r}_l(t)$, $\vec{V}_l(t)$ – відповідно закон руху і швидкість l -ї частинки.

Розглянемо систему невзаємодіючих тожних точкових заряджених частинок, які рухаються одна за одною вздовж довільної заданої траєкторії. Тоді закон руху і швидкість l -ї частинки цієї системи в електромаг-

нітному полі визначаються співвідношеннями [22]:

$$\vec{r}_l(t) = \vec{r}_p(t + \Delta t_l), \quad \vec{V}_l(t) = \vec{V}(t + \Delta t_l). \quad (30)$$

Середню потужність випромінювання заряджених частинок у цьому випадку отримуємо, підставляючи (29), (30) у (12):

$$\bar{P}^{rad}(t) = \int_0^{\infty} d\omega W(\omega), \quad (31)$$

$$W(\omega) = \frac{e^2}{\pi c^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(\omega) \omega S_N(\omega) \times \frac{\sin \left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')| \right\}}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')|} \cos \omega(t - t') \times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (32)$$

$$S_N(\omega) = \sum_{l,j=1}^N \cos \{ \omega (\Delta t_l - \Delta t_j) \}. \quad (33)$$

Фактор когерентності $S_N(\omega)$ визначає перерозподіл енергії випромінювання заряджених частинок за частотами.

Спектр випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому ізотропному середовищі

Розглянемо N електронів, які рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі. Закон руху і швидкість l -го електрона у цьому випадку визначаються співвідношеннями [22]:

$$\vec{r}_l(t) = r_0 \cos[\omega_0(t + \Delta t_l)] \vec{i} + r_0 \sin[\omega_0(t + \Delta t_l)] \vec{j} + V_{\parallel}(t + \Delta t_l) \vec{k}, \quad \vec{V}_l(t) = \frac{d\vec{r}_l(t)}{dt}. \quad (34)$$

Тут $r_0 = V_{\perp} \omega_0^{-1}$, $\omega_0 = ceB^{ext} \tilde{E}^{-1}$, $\vec{B}^{ext} \parallel 0Z$ – вектор магнітної індукції $\tilde{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$, V_{\perp} , V_{\parallel} – компоненти швидкості, \vec{p} , \tilde{E} – імпульс і енергія електрона, e і m_0 – заряд і маса спокою електрона.

Середню потужність випромінювання N електронів отримуємо, підставляючи (34) у (12). Тоді знаходимо

$$\bar{P}^{rad} = \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (35)$$

$$W(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c^2} \int_0^\infty dx \omega \mu(\omega) S_N(\omega) \frac{\sin\{n(\omega)\omega c^{-1}\eta(x)\}}{\eta(x)} \times \left[V_\perp^2 \cos(\omega_0 x) + V_\parallel^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right] \times \left\{ V_\perp^2 \left[\frac{m^2}{q^2} J_m^2(q) + J_m^2(q) \right] + \left(V_\parallel^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right) J_m^2(q) \right\}, \quad (41)$$

$$\text{де } \eta(x) = \sqrt{V_\parallel^2 x^2 + 4 \frac{V_\perp^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} x\right)}.$$

Фактор когерентності одного електрона $S_1(\omega) = 1$. Фактор когерентності двох електронів $S_2(\omega)$ визначається виразом

$$S_2(\omega) = 2 + 2 \cos(\omega \Delta t_{12}), \quad (37)$$

де $\Delta t_{12} = \Delta t_2 - \Delta t_1$ зміщення в часі між першим і другим електронами вздовж гвинтової лінії. Аналогічний вираз для фактора когерентності досліджено Болотовським [36].

Фактор когерентності для трьох електронів визначається виразом

$$S_3(\omega) = 3 + 2 \cos(\omega \Delta t_{12}) + 2 \cos(\omega \Delta t_{23}) + 2 \cos\{\omega(\Delta t_{12} + \Delta t_{23})\}. \quad (38)$$

де Δt_{23} – зсув у часі між другим і третім електронами.

Фактор когерентності чотирьох електронів $S_4(\omega)$ визначається виразом

$$S_4(\omega) = 4 + 2 \cos(\omega \Delta t_{12}) + 2 \cos(\omega \Delta t_{23}) + 2 \cos(\omega \Delta t_{34}) + 2 \cos\{\omega(\Delta t_{12} + \Delta t_{23})\} + 2 \cos\{\omega(\Delta t_{23} + \Delta t_{34})\} + 2 \cos\{\omega(\Delta t_{12} + \Delta t_{23} + \Delta t_{34})\}. \quad (39)$$

де Δt_{34} – зсув у часі між третім і четвертим електронами.

Використовуючи співвідношення (26) після перетворень (35) і (36), отримаємо середню за часом потужність випромінювання \bar{P}^{rad} [22], яка виражена через середній спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_2(\omega, \theta)$,

$$\bar{P}^{rad} = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta W_2(\omega, \theta), \quad (40)$$

$$W_2(\omega, \theta) = \frac{e^2}{c^3} \sum_{m=-\infty}^\infty \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 S_N(\omega) \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \delta\left\{ \omega \left(1 - \frac{n(\omega)}{c} V_\parallel \cos \theta \right) - m \omega_0 \right\} \times$$

де $q = \frac{n(\omega)}{c} \frac{\omega}{\omega_0} V_\perp \sin \theta$, $J_m(q)$, $J'_m(q)$ – функція Бесселя цілочислового індексу і її похідна.

Кожна гармоніка у співвідношеннях (40) і (41) становить набір частот, які є розв'язком рівняння

$$\omega \left(1 - \frac{n(\omega)}{c} V_\parallel \cos \theta \right) - m \omega_0 = 0. \quad (42)$$

Проведемо далі числові розрахунки функції спектрального розподілу потужності випромінювання $W(\omega)$ системи електронів, які рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі, використовуючи співвідношення (36), а потужність випромінювання $P_{med}^{int} = \bar{P}^{rad}$ – використовуючи співвідношення (35).

На низьких гармоніках спектр випромінювання (рис.1-2) має характер дискретних смуг.

Згідно співвідношення (42), розширення дискретних гармонік смуги зумовлене ефектом Доплера.

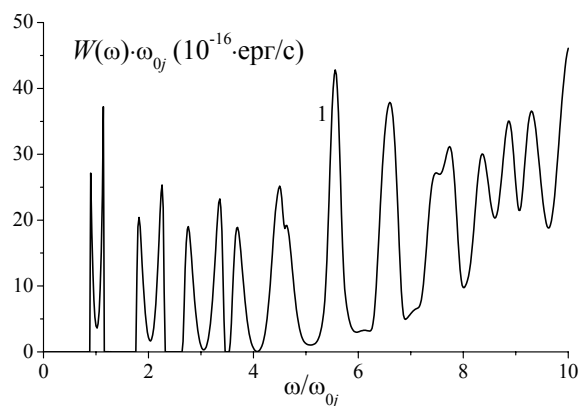


Рис. 1. Спектральний розподіл потужності синхротронно-черенковського випромінювання електронів на низьких гармоніках при $B^{ext}=1$ Гс, $\mu=1$, $n=2$, $V_{\perp med}=0,2 \cdot 10^{11}$ см/с, $V_{\parallel med}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $r_{0j}=1533$ см, $\omega_{0j}=0,1305 \cdot 10^8$ рад/с ($j=1,2,3,4,5$). Крива 1 характеризує один електрон $P_{med1}^{int}=0,1324 \cdot 10^{-13}$ ерг/с.

Для системи електронів, які рухаються вздовж гвинтової лінії при $c > V_{\perp med} > c/n$, у спектрі випромінювання спостерігаються

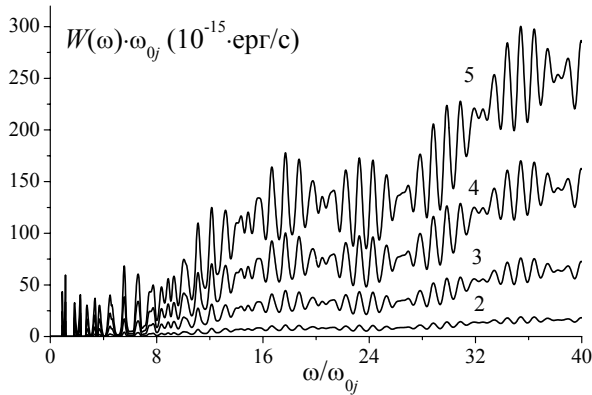


Рис. 2. Осциляції в синхротронно-черенковському спектрі випромінювання на низьких гармоніках при $V_{\perp vac} = 0,2 \cdot 10^{11}$ см/с, $V_{\parallel vac} = 0,2 \times 10^{10}$ см/с. Крива 2 характеризує один електрон з $P_{med2}^{int} = 0,3164 \cdot 10^{-12}$ ерг/с. Крива 3 відповідає двом електронам при $\Delta t_{12}^{(3)} = 0,001\pi/\omega_{03}$ з $P_{med3}^{int} = 0,1263 \cdot 10^{-11}$ ерг/с, $P_{med3}^{int}/P_{med2}^{int} = 3,99$. Крива 4 відповідає трьом електронам при $\Delta t_{12}^{(4)} = \Delta t_{23}^{(4)} = 0,001\pi/\omega_{04}$ з $P_{med4}^{int} = 0,2832 \cdot 10^{-11}$ ерг/с, $P_{med4}^{int}/P_{med2}^{int} = 8,95$. Крива 5 відповідає чотирьом електронам при $\Delta t_{12}^{(5)} = \Delta t_{23}^{(5)} = \Delta t_{34}^{(5)} = 0,001\pi/\omega_{05}$ з $P_{med5}^{int} = 0,5011 \cdot 10^{-11}$ ерг/с, $P_{med5}^{int}/P_{med2}^{int} = 15,84$.

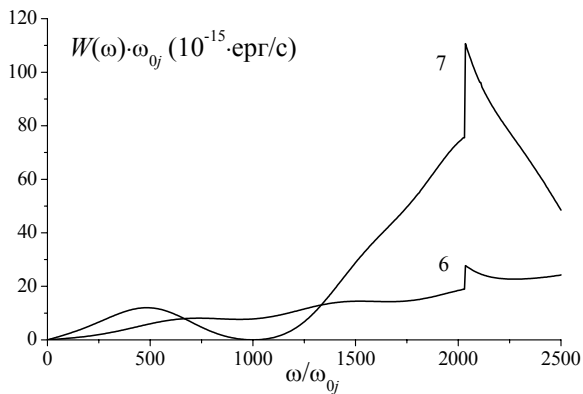


Рис. 3. Стрибки у спектральному розподілі потужності синхротронно-черенковського випромінювання при $V_{\perp med} = 0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel med} = 0,2 \cdot 10^{11}$ см/с. Крива 6 відповідає одному електрону з $P_{med6}^{int} = 0,3006 \cdot 10^{-10}$ ерг/с. Крива 7 – двом електронам зі зсувом у часі $\Delta t_{12}^{(7)} = 0,001 \times \pi/\omega_{07}$ з $P_{med7}^{int} = 0,7447 \cdot 10^{-10}$ ерг/с.

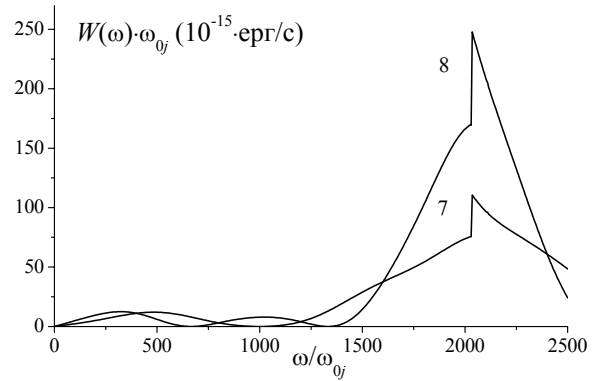


Рис. 4. Стрибки у спектральному розподілі потужності синхротронно-черенковського випромінювання при $V_{\perp med} = 0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel med} = 0,2 \cdot 10^{11}$ см/с. Крива 8 відповідає трьом електронам при зсувах $\Delta t_{12}^{(8)} = \Delta t_{23}^{(8)} = 0,001\pi/\omega_{08}$ з $P_{med8}^{int} = 0,117 \cdot 10^{-9}$ ерг/с.

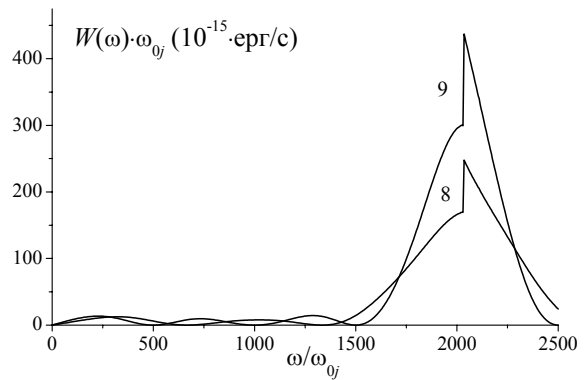


Рис. 5. Стрибки у спектральному розподілі потужності синхротронно-черенковського випромінювання при $V_{\perp med} = 0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel med} = 0,2 \cdot 10^{11}$ см/с. Крива 9 відповідає чотирьом електронам при зсувах у часі $\Delta t_{12}^{(9)} = \Delta t_{23}^{(9)} = \Delta t_{34}^{(9)} = 0,001\pi/\omega_{09}$ з потужністю $P_{med9}^{int} = 0,1563 \times 10^{-9}$ ерг/с.

осциляції функції спектрального розподілу потужності синхротронно-черенковського випромінювання (рис.2).

Осцилюючий характер функції спектрального розподілу потужності синхротронно-черенковського випромінювання одного, двох, трьох і чотирьох електронів, які рухаються вздовж гвинтової лінії в середовищі при $c > V_{\perp med} > c/n$, визначається внеском функцій Бесселя [37] (рис.2).

Проведені дослідження осциляцій добре узгоджуються і доповнюють результати праць [28, 38].

Спектральний розподіл потужності синхротронно-черенковського випромінювання електронів $W(\omega)$ отримана числовими методами при $c > V_{\parallel med} > c/n$ для $B^{ext}=1$ Гс, $\mu=1$, $n=1,4997$, $V_{\perp med}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel med}=0,2 \cdot 10^{11}$ см/с, $r_{0j}=153,3$ см, $\omega_{0j}=0,1305 \cdot 10^8$ рад/с ($j=6,7,8,9$).

Для показника заломлення $n=1,4997$ при швидкостях $c > V_{\parallel med} > c/n$ (криві 6, 7, 8, 9 на рис.3,4,5), виконуються умови існування стрибків е синхротронно-черенковському випромінювані, зумовлених аномальним ефектом Доплера.

Для гармоніки $m=-1$ у співвідношенні (42) частота нижньої межі ($\theta=0$) визначається виразом:

$$\omega_{-1}^{\min j} = \omega_{0j} \cdot \left(\frac{nV_{\parallel}}{c} - 1 \right)^{-1}. \quad (43)$$

Отже, $\omega_{-1}^{\min j} = 2032\omega_{0j}$, ($j=6,7,8,9$) (рис.3–5).

Проведені дослідження стрибків у спектрі, добре узгоджуються результатами праці [22]. Числові і аналітичні розрахунки показали, що вплив ефекту Доплера на особливості спектрального розподілу потужності випромінювання електронів суттєвий поблизу черенковського бар'єру.

Висновки

Методом охоплюючих поверхонь отримано основні співвідношення для класичної теорії випромінювання системи електронів, які рухаються вздовж довільної заданої траєкторії у прозорому ізотропному середовищі.

Встановлено існування осциляцій функції спектрального розподілу потужності синхротронно-черенковського випромінювання двох, трьох і чотирьох електронів, які рухаються вздовж гвинтової лінії в середовищі при швидкостях $c > V_{\parallel med} > c/n$.

При швидкостях $c > V_{\parallel med} > c/n$ у спектральному розподілі потужності синхротронно-черенковського випромінювання двох, трьох і чотирьох електронів, які рухаються вздовж гвинтової лінії встановлено існування стрибків зумовлених аномальним ефектом Доплера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Schott G.A. The radiation of electrons groups // *Annalen der Physik.* – 1907.– **24**(14). – P.635-660.
2. Schott G.A. Electromagnetic radiation and the mechanical reactions arising from it. – Cambridge: University Press, 1912.
3. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* К теории "светящегося электрона" // *ДАН СССР.* – 1948. – **59**(9). – С.1551–1554.
4. Schwinger J. On the classical radiation of accelerated electrons // *Phys. Rev.* – 1949. – **75**(12). – P. 1912-1925.
5. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. – Москва-Ленинград: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1951.
6. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. – Москва: Наука, 1974.
7. *Тернов И.М.* Синхротронное излучение // *УФН.* – 1995. – **165**(4). – С.429-456.
8. *Константинович А.В., Ницович В.М.* Классическая теория излучения заряда, движущегося по спирали // *Известия высших учебных заведений СССР. Физика.* – 1971. – **14**(5). – С.29-34.
9. *Константинович А.В.* Классическая микроскопическая теория излучения заряда, движущегося по спирали и метод функций Грина // *Известия высших учебных заведений СССР. Физика.* – 1971. – **14**(7). – С.145-147.
10. *Константинович А. В., Ницович В. М.* Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // *Известия вузов. Физика.* – 1973. – **16**(2). – С.59-62.
11. *Ницович В.М., Константинович А.В.* Спектральное распределение мощности излучения заряда, движущегося по спирали в диспергирующем прозрачном ферродиелектрике // *УФЖ.* – 1973. – **18**(5). – С.858-859.
12. *Konstantinovich A.V., Melnychuk S.V., Konstantinovich I.A.* Radiation spectrum of an electron moving in a spiral in magnetic field in transparent media and in vacuum // *Journal of Materials Science. Materials in Electronics.* – 2006. – **17**(4). – P.315-320.
13. *Соколов А.А., Гальцов Д.В., Колесникова М.М.* Точный вывод формулы для синхротронного излучения // *Известия вузов. Физика.* – 1971. – **14**(4). – С.14–24.
14. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одном применении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // *Известия высших учебных заведений СССР. Физика.* – 1975. – **18**(4). – С.122–124.
15. *Куканов А.Б., Константинович А.В.* Об одном применении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // *Вестник Московского университета. Серия Физика, астрономия.* – 1975. – **16**(4). – С.473-481.

16. Константинович А.В., Фортуна В.В. К теории излучения систем невзаимодействующих зарядов, движущихся в постоянном однородном магнитном поле, в вакууме // Известия вузов. Физика. – 1983. – 26(12). – С.102–104.
17. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation spectrum of electrons moving in magnetic field in vacuum // Romanian Reports in Physics. – 2006. – 58(2). – P.101–106.
18. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation power spectral distribution of the system of electrons moving in a spiral in vacuum // Journal of Optoelectronics and Advanced Materials. – 2006. – 8(6). – P.2143.
19. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation spectrum of two electrons moving in a spiral in vacuum // Proceedings of the Romanian Academy. A. – 2006. – 7(3). – P.183–192.
20. Цытович В. Н. К вопросу об излучении быстрых электронов в магнитном поле при наличии среды // Вестник Моск. ун-та. Физика. – 1954. – 4(11). – С.27–36.
21. Константинович А.В., Мельничук С.В., Раренко И.М. и др. Спектр випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // Журнал фізичних досліджень. – 2000. – 4(1). – С.48–56.
22. Константинович А.В., Константинович І.А. Особливості спектра випромінювання заряджених частинок, що рухаються в магнітному полі в прозорому середовищі // Фізика і хімія твердого тіла. – 2005. – 6(4). – С.535–541.
23. Konstantinovich I.A., Konstantinovich A.V. Radiation spectrum of charged particles moving in magnetic field in medium // Romanian Journal of Physics. – 2006. – 51(5-6). – P.547–555.
24. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation spectrum of an electron moving in a spiral in medium // Condensed Matter Physics. – 2007. – 10(1). – P.5–9.
25. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation power spectral distribution of two electrons moving in a spiral in magnetic field // Romanian Journal of Physics. – 2007. – 52(3-4). – P.237–244.
26. Константинович А.В., Константинович І.А. Спектр випромінювання чотирьох електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії в прозорому середовищі // Фізика і хімія твердого тіла. – 2007. – 8(2). – С. 240–249.
27. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation spectrum of the system of electrons moving in a spiral in transparent medium // Romanian Journal of Physics. – 2008. – 53(3-4). – P.507–513.
28. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Oscillations in radiation spectrum of electron moving in spiral in transparent medium and vacuum // Astroparticles Physics. – 2008. – 30(3). – P.142–148.
29. Константинович А.В., Константинович І.А. Тонка структура спектра випромінювання системи трьох електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у вакуумі та прозорому середовищі // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – 11(1). – С. 45–57.
30. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Oscillations and superradiance in radiation spectrum of electrons moving in spiral in medium // Romanian J. of Physics. – 2011. – 56(1). – P.45–52.
31. Куканов А.Б., Константинович А.В. Об одном обобщении метода охватывающих поверхностей в классической теории излучения // Известия высших учебных заведений СССР. Физика. – 1975. – 18(8). – С.7–11.
32. Schwinger J., Tsai Wu-yang, Erber T. Classical and quantum theory of synergic Synchrotron-Cerenkov radiation // Ann. of Phys. – 1976. – 96(2). – P.303–332.
33. Константинович А.В., Мельничук С.В., Константинович І.А. Класична теорія випромінювання заряджених частинок. I. Запізнюючі і випереджаючі потенціали та напруженості електромагнітного поля і метод сили самодії Лоренца // Науковий вісник ЧНУ. Вип. 102: Фізика. Електроніка – Чернівці: ЧНУ, 2001. – С. 5–13.
34. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.
35. Dirac P.A.M. Classical theory of radiating electrons // Proc Roy. Soc. Ser. A – 1938. – 167(1). – P.148–69.
36. Болотовский Б.М. Теория эффекта Вавилова-Черенкова // УФН. – 1957. – 22(3). – С.201–246.
37. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964.
38. Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Oscillations and overlapping between harmonics in radiation spectrum of electrons moving in spiral in transparent medium // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations – 2011. – No.5. – P.67–74.