

ВЛИЯНИЕ АДДИТИВНОГО ШУМА НА ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ В МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ ПРОКТОРА-СИВАШИНСКОГО

Рассмотрен процесс формирования пространственных структур в модели конвекции Проктора-Сивашинского и возникновения дефектов в этих структурах. Проанализированы пространственные спектры структур и визуально оценено количество дефектов. Найдено соответствие между относительным количеством дефектов и спектральными характеристиками структуры. Исследовано влияние шума на формирование дефектов структуры. Показано, что точность расчетов влияет на дефектность структуры аналогично шуму.

Ключевые слова: спектральная и визуальная дефектность, конвекция.

Розглянуто процес формування просторових структур у моделі конвекції Проктора-Сивашинського і виникнення дефектів у цих структурах. Проаналізовані просторові спектри структур і візуально оцінено кількість дефектів. Знайдено відповідність між відносною кількістю дефектів і спектральними характеристиками структури. Досліджено вплив шуму на формування дефектів структури. Показано, що точність розрахунків впливає на дефектність структури аналогічно шуму.

Ключові слова: спектральна і візуальна дефектність, конвекція.

The processes of spatial formation in Proctor-Sivashinsky convection model are considered. Formations of defects in these structures are shown. Spectra of spatial structure and number of defects are analyzed. Correspondence between the relative number of defects and the spatial characteristics of the structure are found. The influences of noise on the formation of structural defects are shown. It is shown that the accuracy of the calculations affect the defect structure is similar to noise.

Keywords: spectral and visual defects, convection.

Введение

При исследовании процесса конвекции в тонком слое подогреваемой жидкости наблюдается ряд стационарных решений с малым числом пространственных мод (возмущений разного масштаба), одно из которых (конвективные ячейки (рис.1б)) является устойчивым, а второе (конвективные валы (рис.1а)) – неустойчивым [1]. Более детальное изучение модели [2] с использованием многомодового описания позволило выявить возникновение квазистойчивого долгоживущего состояния, переходящего в устойчивое состояние.

Процесс конвекции описывается уравнением Проктора-Сивашинского, которое определяет динамику температурного поля процесса конвекции в слое жидкости в горизонтальной плоскости (x,y) :

$$\Phi = \varepsilon^2 \Phi - (1 - \nabla^2)^2 \Phi + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \Phi |\Phi|^2) + \varepsilon^2 f, \quad (1)$$

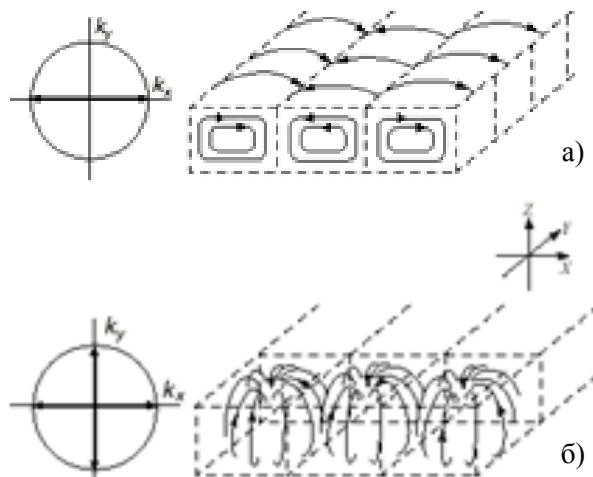


Рис. 1. Конвективные структуры: валы (а), квадратные ячейки (б).

где f – внешний аддитивный шум, ε – величина, определяющая превышение порога развития конвекции, считается достаточно малой и положительно определенной величиной. В этих условиях решение можно искать в форме

$$\Phi = \varepsilon \sum_j a_j \exp(i \vec{k}_j \vec{r}), \quad (2)$$

$|\vec{k}_j| = 1$. Перенормируя единицу времени $\propto \varepsilon^2$, для медленных амплитуд a_j получим эволюционное уравнение [3]:

$$\dot{a}_j = a_j - \sum_{i=1}^N V_{ij} |a_i|^2 a_j + f, \quad (3)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями:

$$V_{jj} = 1, \quad (4)$$

$$V_{ij} = (2/3) \left(1 - 2(\vec{k}_i \vec{k}_j)^2 \right) =, \quad (5)$$

$$= (2/3) (1 + 2 \cos^2 \theta),$$

где θ - угол между векторами $\vec{k}_i$ и $\vec{k}_j$.

Вообще говоря, ширина интервала неустойчивости в k -пространстве представляет собой кольцо, средний радиус которого равен единице, а ширина порядка величины относительной надпороговости ε , т.е. намного меньше единицы. Картина температурного поля в каждой точке поля в интервале $-Lx/2 < x < Lx/2$, $-Ly/2 < y < Ly/2$ определяется величиной

$$\Phi = \sum_{n=-N}^N a_{n,m} \sin(2\pi nx) \sin(2\pi my),$$

где $n = N \cos \theta_s$, $m = N \sin \theta_s$, $N^2 = n^2 + m^2$.

Каждой из возникающих пространственных структур (конвективные: валы, модулированные валы и квадратные ячейки) отвечает определенное значение интегральной квадратичной формы (рис.2).

Результаты численного моделирования

Развитие возмущений в системе, как показывает численный анализ уравнения (3), происходит следующим образом [2,3]. Из начальных флуктуаций быстро возбуждается широкий спектр по θ . Значение квадратичной формы этого спектра $I = \sum a_j^2$ можно оценить, приравняв правую часть (3) нулю, при этом получим значение близкое к 0,75.

В работах [2, 4] показано, что в случае большого числа мод при высокой точности расчетов система задерживается в своем раз-

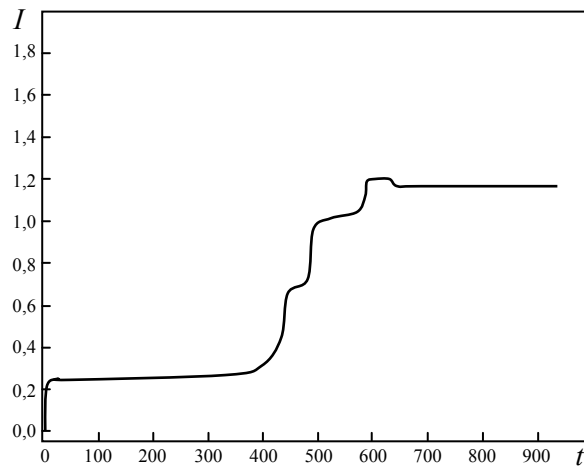


Рис. 2. Изменение интегральной квадратичной формы $I = \sum a_j^2$ со временем. После $t = 600$ включен аддитивный шум.

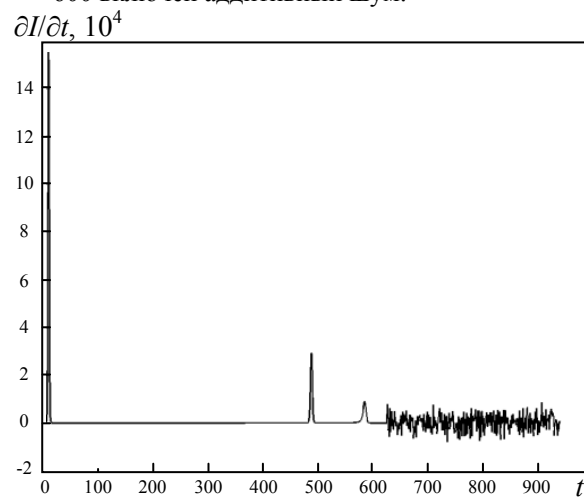


Рис. 3. Поведение производной dI/dt интегральной квадратичной формы $I = \sum a_j^2$ со временем. После $t = 600$ включен аддитивный шум.

витии, оставаясь в динамическом равновесии. Для дальнейшего развития – "кристаллизации", одна из мод должна получить порцию энергии, превышающую некоторый порог. То есть, в этих условиях необходимо наличие определенного уровня шума – флуктуаций. Это достигается при конечном значении шума $f \neq 0$, или при уменьшении точности расчетов, что, как отмечается в [4] эквивалентно.

Если одна из мод получает нужную порцию энергии, развивается процесс формирования простейшей конвективной структуры – валов. Величина I при этом достигает значений близких к единице ($I \rightarrow 1$). Одна-

ко это состояние не является устойчивым и наблюдается структурный переход: конвективные валы испытывают модуляцию вдоль оси вращения жидкости, характерный размер которой сокращается. В этом переходном состоянии система находится достаточно большое время (которое незначительно растет в определенных пределах при увеличении числа мод), причем при этом сохраняется значение $I \approx 1,07$. Спустя достаточно большое время, в десятки раз превосходящее обратный инкремент начальной линейной неустойчивости, из вновь образованного "бокового" спектра "выживает" лишь одна мода, амплитуда которой сравнивается с амплитудой первоначальной лидирующей моды. В конечном итоге формируются устойчивая конвективная структура - квадратные ячейки, при которой квадратичная форма системы достигает значения $I \approx 1,2$.

Дальнейшие исследования процесса обнаружили динамику изменения интегральной квадратичной формы $I = \sum a_j^2$ со временем приведенную на рис.3. Именно после первого всплеска производной формируется метастабильная структура - система конвективных валов, причем вплоть до второго всплеска величина $I \approx 1$ не изменяется. Следующий всплеск $\partial I / \partial t$ сигнализирует о появлении вторичной метастабильной структуры с новым значением $I \approx 1,07$. После второго всплеска производной квадратичной формы начинает формироваться стабильная структура конвективных ячеек. Подобное поведение системы убеждает в существовании структурно-фазовых переходов в данной системе.

Формирующиеся пространственные структуры могут иметь дефекты, количество которых может меняться при введении шума. Спектральная картина идеальной структуры квадратных ячеек, должна иметь вид двух мод, отстоящих друг от друга на $\pi/2$ (рис.4а). При наличии в системе некоторого аддитивного шума, количество дефектных ячеек на $2D$ поле пространственной структуры может увеличиваться (рис.4б).

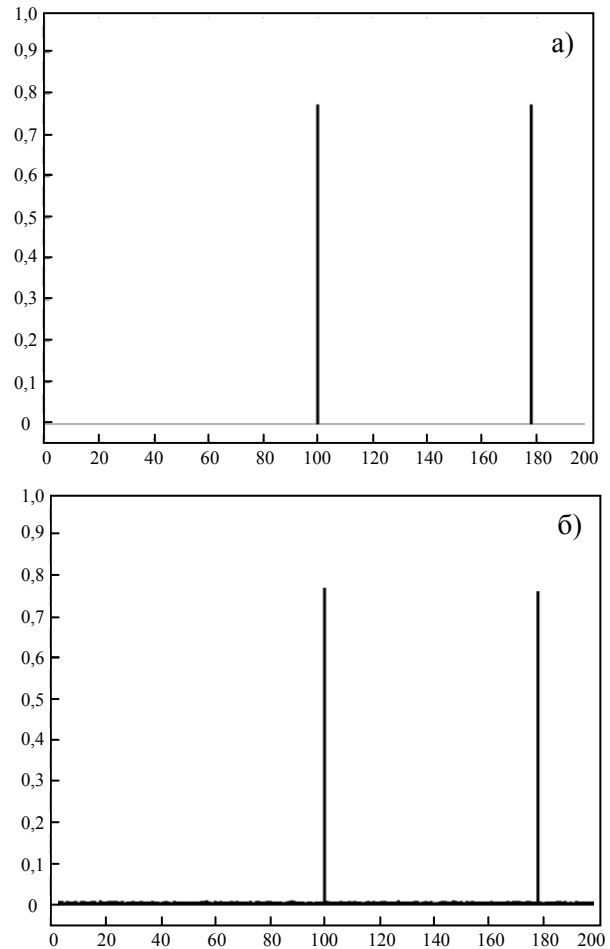


Рис. 4. Спектральная картина конвективной структуры. а) идеальная структура, без шума, б) дефектная структура после включения шума 0,01.

Отношение суммы квадратов других пространственных мод к общей подобной сумме определяет "спектральную" дефектность $D = \sum_{j \neq 1,2} a_j^2 / \sum_i a_i^2$ структуры [3]. Оценка численности дефектов позволила определить прямую взаимосвязь между "спектральной" дефектностью и дефектностью "визуальной", количественно выраженной через отношение дефектных ячеек к общему их числу (рис.5).

Расчеты, проведенные с большой точностью, позволяют оценить число дефектов в зависимости от уровня шума. Подобную дефектность структуры можно получить при использовании меньшей точности в отсутствие шума. Интегральная и локальная дефектность структуры определялась, как отношение суммы квадратов всех мод спектра, кроме двух наибольших амплитуд, к

сумме квадратов двух наибольших амплитуд и как отношение сумм амплитуд всех мод, кроме двух, к полной сумме квадратов амплитуд соответственно.

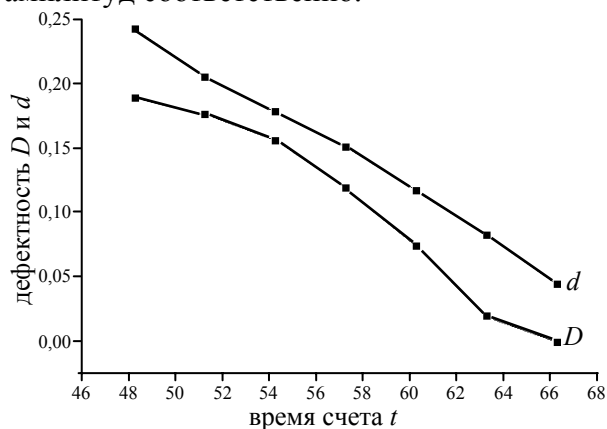


Рис. 5. Сравнительный анализ спектральной и визуальной дефектности. Число мод 50.

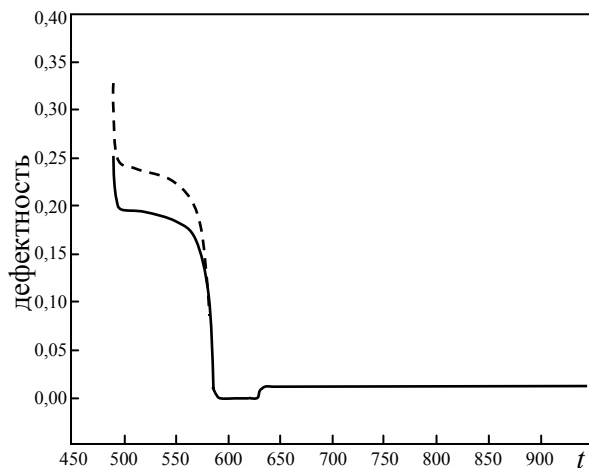


Рис. 6. Сравнительный анализ интегральной и локальной дефектности. Число мод 200. На времени $t=600$ введен аддитивный шум.

На рис.6 видно, что характеристики дефектности структуры ведут себя подобно по мере формирования устойчивых конвективных ячеек, имея на момент становления двух стабильных мод спектра одинаковые значения. При добавлении в систему внешнего шума, показатели дефектности растут пропорционально уровню шума, формируя дефектную структуру.

Выводы

Для данной математической модели предложены разные способы оценки дефектности формируемой пространственной структуры. Получено приближенное соответствие поведения различных метрик дефектности. Рассмотрен способ анализа структуры, позволяющий делать выводы о наличии или отсутствия регулярности структуры и позволяющий учесть влияние шума на формирование дефектов структуры.

Обнаружено качественное и количественное согласие между спектральной и визуальной дефектностью. Отмечается влияние шума на процесс формирования пространственных структур, в том числе на формирование ее дефектов. Показано, что точность расчетов влияет на дефектность структуры аналогично шуму. Найдены количественное соответствие уровня шума (при высокой точности) и используемой точности (при отсутствии шума).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.П. Двумерные квазипериодические структуры в неравновесных системах // ЖЭТФ. – 1989. – **96**. – С.684-699.
2. Kirichok A.V., Kuklin V.M. Allocated imperfections of developed convective structures // Physics and Chemistry of the Earth Part A. – 1999. – No.6, P.533-538.
3. Куклин В.М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах. // УФЖ. Обзоры. – 2004. – **1**(1). – С.49-81.
4. Белкин Е.В., Гуцин И.В. Математическая модель конвекции слоя жидкости с градиентом температуры // КМНТ. – 2010. – **1**. – С.39-40.