УДК 535.2

©2012р. Т.А. Фадеєва

Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського, Сімферополь

ПОШИРЕННЯ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАНИХ КОНІЧНИХ ПУЧКІВ З ДРОБОВИМ ТОПОЛОГІЧНИМ ЗАРЯДОМ КРІЗЬ ОДНООСНИЙ КРИСТАЛ

Розв'язано векторне хвильове рівняння для конічних пучків з дробовим топологічним зарядом та гаусовою огинаючою. Показано, що навіть невелике відхилення топологічного заряду від цілого значення, приводить до порушення осьової симетрії пучка – центр тяжіння зміщується відносно осі пучка. При поширенні такого циркулярно поляризованого пучка в одноосному кристалі це приводить до розщеплювання і зсуву подвійного оптичного вихору в ортогонально поляризованій компоненті пучка і руйнування центральної поляризаційної омбіліки у картині розподілу поляризації.

Ключові слова: Гаусова огинаюча, ортогонально поляризована компонента, спектр фотолюмінесценції.

Решено векторное волновое уравнение для конических пучков с дробным топологическим зарядом и гауссовой огибающей. Показано, что даже небольшое отклонение топологического заряда от целого значения, приводит к нарушению осевой симметрии пучка – центр тяжести смещается относительно оси пучка. При распространении такого циркулярно поляризуемого пучка в одноосном кристалле это приводит к расщеплению и сдвигу двойного оптического вихря в ортогонально поляризуемой компоненте пучка и разрушения центральной поляризационной омбилики в картине распределения поляризации.

Ключевые слова: Гауссовая огибающая, ортогонально поляризуемая компонента, спектр фотолюминесценции.

In the article the solution of vector wave equation was obtained for conical beams with a fractional topological charge and Gaussian envelope. It was found that even small deviation of topological charge from an integer value results in violation of axial symmetry of the beam – the centre of gravity is displaced relative to the beam axis. The propagation of such a circular polarized beam in a uniaxial crystal results in splitting the double optical vortex in orthogonal polarized component of beam so that the central polarization singularity in the polarization distribution pattern is broken down.

Keywords: Gaussian envelope, orthogonal polarized component, photoluminescence spectra.

На сьогодні опубліковано багато праць [1-6], присвячених поширенню різних типів осесиметричних пучків у одноосних кристалах. Це пучки Лагера–Гауса (включаючи фундаментальний пучок Гауса), Ерміта–Гауса і Бесселя–Гауса. Для усіх цих пучків, якщо вісь пучка і кристала збігалися і на вході у кристал напрямлена хвиля циркулярної поляризації, то на осі формувалася вироджена поляризаційна омбіліка спірального типа (оточена кільцевими омбіліками), яка відповідала подвійному оптичному вихору в ортогонально поляризованій компоненті пучка, що генерується кристалом. Генерація цього вихору у кристалі виникає унаслідок виконання закону збереження повного кутового моменту відносно осі симетрії кристала [7].

Оскільки змінюється спіновий момент, пов'язаний з поляризацією пучка, то це приводить до зміни орбітального моменту, пов'язаного з топологічним зарядом сформованою ортогонально циркулярно поляризованої компоненти. Подвійний оптичний вихор можна легко порушити, якщо нахилити вісь пучка відносно осі кристала. При малих кутах (<0,1 градуса) центральна омбіліка розпадається на два "лимони", а що оточує її кільцева омбіліка – на пару "монстр"–"зірка" або "лимон"–"зірка".

Подальше збільшення кута нахилу осі пучка приводить до того, що топологічний заряд циркулярно поляризованих компонент стає однаковий, а додатковий орбітальний момент відповідає зсуву центру тяжіння пучка [8,9].

В результаті цих досліджень виникає питання: що відбуватиметься при співісному поширенні пучка, центр тяжіння якого зміщений відносно осі симетрії пучка, в одноосному кристалі уздовж його осі. Одним з таких пучків є конічний пучок гауса з напівцілим топологічним зарядом, який формується після проходження пучка через комп'ютерно-синтезовану голограму з дробовим топологічним зарядом і аксикон [10].

Тому метою даної роботи з'явилося теоретичне дослідження особливостей проходження конічного пучка з дробовим топологічним зарядом через одноосний кристал уздовж його осі.

Розглянемо поширення параксіального пучка уздовж осі Oz одноосного анізотропного кристала з тензором діелектричної проникності $\hat{\varepsilon} = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_3)$.

Оскільки у параксіальному випадку значення подовжньої компоненти, у порівнянні з поперечним полем зовсім незначне, то електричне поле параксіального пучка у кристалі можна представити у вигляді

$$\mathbf{E} \approx \tilde{\mathbf{E}}_\perp = \mathbf{E}_\perp(x,y,z)\exp\{i(\omega t - k_0 z)\},$$

де $\mathbf{E}_\perp(x,y,z)$ – комплексна амплітуда, $k_0 = 2\pi\sqrt{\varepsilon}/\lambda$ – хвилеве число звичайної хвилі.

Параксіальне рівняння для такого середовища запишеться у вигляді [4]:

$$\left(\nabla_\perp^2 - 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{E}_\perp = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_3}\nabla_\perp(\nabla_\perp \mathbf{E}_\perp),, \qquad (1)$$

де $\Delta\varepsilon = \varepsilon_3 - \varepsilon$.

У циркулярно поляризованому базисі $E_+ = E_x - iE_y$, $E_- = E_x + iE_y$ отримуються співвідношення:

$$\begin{aligned}&\left(4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}\right)E_+ = \\ &= 2\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_3}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial v}E_+ + \frac{\partial}{\partial u}E_-\right),\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}&\left(4\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}\right)E_- = \\ &= 2\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_3}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v}E_+ + \frac{\partial}{\partial u}E_-\right),\end{aligned} \qquad (3)$$

при заміні змінних у співвідношенні (1) на

$$u = x + iy,\ v = x - iy,$$

$$\partial_u \equiv \partial_x - i\partial_y,\ \partial_v \equiv \partial_x + i\partial_y$$

Для того, щоб привести рівняння (2), (3) до рівняння Гельмгольца, виберемо два приватні рішення:

1) для звичайного модового пучка

$$E_+^0 = w_0\frac{\partial}{\partial u}\Psi_0, \quad E_-^0 = -w_0\frac{\partial}{\partial v}\Psi_0, \qquad (4)$$

2) для незвичайного модового пучка

$$E_+^e = w_0\frac{\partial}{\partial u}\Psi_e, \quad E_-^e = w_0\frac{\partial}{\partial v}\Psi_e, \qquad (5)$$

де $\Psi_{0,e}$ – утворююча функція, w_0 – деякий параметр пучка, що має розмірність довжини, який ми визначимо пізніше. Підставляючи (4) і (5) у (2), (3) отримаємо, що функція $\Psi_{0,e}$ задовольняє рівнянню

$$\left(\nabla_\perp^2 - 2ik_{0,e}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_{0,e} = 0, \qquad (6)$$

де $k_e = \left(n_3^2/n_0^2\right)k_0$. Виберемо утворюючу функцію у вигляді [10]

$$\begin{aligned}\Psi_{0,e} &= \int_0^{2\pi} e^{iq\phi}\exp\left\{\frac{ik_\perp}{2\sigma_{0,e}}(ue^{-i\phi} + ve^{i\phi})\right\}d\phi \times \\ &\times \mathcal{N}_{0,e}\mathcal{G}_{0,e} = \mathcal{N}_{0,e}\mathcal{G}_{0,e}\mathfrak{F}_{q,0,e},\end{aligned} \qquad (7)$$

$\mathcal{G}_{0,e} = \exp\left(-\dfrac{uv}{w_0^2\sigma_{0,e}}\right)/\sigma_{0,e}$ – Гаусова огинаюча, $\sigma_{0,e} = 1 - iz/z_{0,e}$, $z_{0,e} = k_{0,e}w_0^2/2$ – довжина Релея звичайного і незвичайного пучків,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{q,0,e} &= \int_0^{2\pi} e^{iq\phi}\exp\left\{\frac{ik_\perp}{2\sigma_{0,e}}(ue^{-i\phi} + ve^{i\phi})\right\}d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{iq\phi}\exp\left\{\frac{ik_\perp}{\sigma_{0,e}}r\cos(\phi - \varphi)\right\}d\phi,\end{aligned}$$

w_0 – перетяжка пучка, $\mathcal{N}_{0,e} = \exp\left\{\dfrac{k_\perp^2 w_0^2}{4\sigma_{0,e}}\right\}$ – множник нормування, q – довільне число.

Якщо ми підставимо утворюючу функцію (7) у співвідношення (4), (5), то отримаємо неоднорідну поляризацію на вхідному торці кристалу, яке дуже складно отримати експериментально.

З іншого боку, розв'язком рівняння Гельмгольца (6) буде не лише функція твірної, але й інтеграл від неї. Візьмемо за нову функцію інтеграл від (7) по змінній u, тоді компоненти поля набудуть вигляду:

$$E^{q}_{+,0} = \int \partial_u \Psi_0 d u = \Psi_0,\ E^{q}_{-,0} = -\int \partial_v \Psi_0 d u, \quad (8)$$

$$E^{q}_{+,e} = \int \partial_u \Psi_e d u = \Psi_e,\ E^{q,u}_{-} = \int \partial_v \Psi_e d u, \quad (9)$$

Компоненти полів у площині мають однаковий вигляд. Тому, підсумувавши поля (8) і (9), отримаємо однорідно право циркулярно поляризований на вході у кристал конічний пучок, який нескладно отримати експериментально.

Для формування однорідно ліво циркулярно поляризованого на вході пучка потрібно взяти нову утворюючу функцію у вигляді інтеграла по змінній v.

Оскільки похідні від вихідної утворюючої функції можна записати як

$$\partial_u \Psi_{0,e} = \frac{\mathcal{N}_{0,e}\mathcal{G}_{0,e}}{\sigma_{0,e}}\left\{\frac{i k_\perp}{2}\mathfrak{F}_{q-1,0,e} - \frac{v}{w_0^2}\mathfrak{F}_{q,0,e}\right\}, \quad (10)$$

$$\partial_v \Psi_{q} = \frac{\mathcal{N}_{0,e}\mathcal{G}_{0,e}}{\sigma_{0,e}}\left\{\frac{i k_\perp}{2}\mathfrak{F}_{q+1,0,e} - \frac{u}{w_0^2}\mathfrak{F}_{q,0,e}\right\}, \quad (11)$$

то інтеграл, що формує поле ортогонально поляризованої компоненти для полів (8) і (9), набере вигляду:

$$\int \partial_v \Psi_{q,0,e} d u = 2\mathcal{N}_{0,e}\mathcal{G}_{0,e}\, e^{i(q+2)\varphi}\Big\{ I_{1,0,e} - \frac{e^{i(q+1)\varphi}}{k_\perp z_\perp} I_{2,0,e}\Big\}, \quad (12)$$

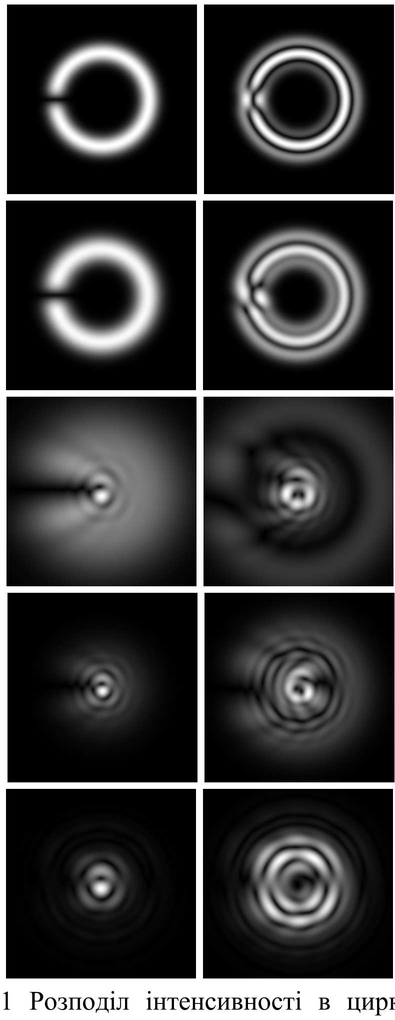
$$I_{1,0,e} = \int_0^{2\pi} e^{i(q+2)(\phi-\varphi)}\, \frac{e^{i\frac{k_\perp r}{\sigma_{0,e}}\cos(\phi-\varphi)}}{1 - R e^{i(\phi-\varphi)}} d\phi,$$

$$I_{2,0,e} = \int_0^{2\pi}\left[e^{i(q+3)(\phi-\varphi)}\, \frac{e^{i\frac{k_\perp r}{\sigma_{0,e}}\cos(\phi-\varphi)}}{1 - R e^{i(\phi-\varphi)}} \times \left(\frac{e^{i2\varphi}\sigma_{0,e} k_\perp r}{2} e^{i(\phi-\varphi)} - \frac{1}{1 - R e^{i(\phi-\varphi)}}\right) d\phi,\right.$$

де $R = r / z_\perp$, $z_\perp = k_\perp w_0^2 / 2$.

E_+ E_-

Для право циркулярно поляризованого на вході пучка поле в циркулярно поляризованому базисі набирає вигляду:



а)

б)

в)

г)

д)

Рис.1 Розподіл інтенсивності в циркулярно поляризованих компонентах конічного пучка з уявним значенням $k_\perp$=100000, перетяжкою w_0=100мкм і топологічним зарядом 0,5 в кристалі $LiNbO_3$ довжиною z. Поперечні розміри: z=10мкм, r_{max}=2мм (а), z=7см, r_{max}=2мм (б), z=40см, r_{max}=3мм (в), z=1м, r_{max}=5мм (г), z=5м, r_{max}=18мм (д).

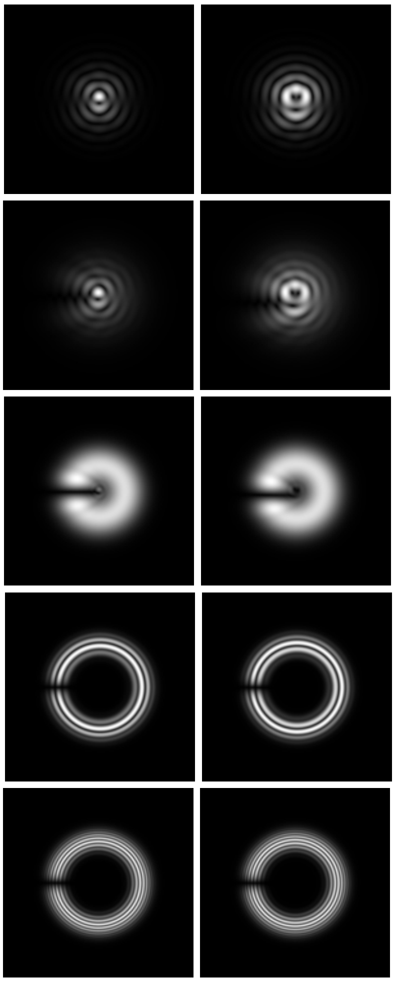


Рис. 2 Розподіл інтенсивності в циркулярно поляризованих компонентах конічного пучка з дійсним значенням $k_\perp$=100000, перетяжкою w_0=100мкм і топологічним зарядом 0,5 в кристалі $LiNbO_3$ довжиною z. Поперечні розміри: z=10мкм, r_{max}=0,6мм (а); z=1см, r_{max}=0,6мм (б), z=40см, r_{max}=1,2мм (в), z=1м, r_{max}=20мм (г), z=2м, r_{max}=40мм (д).

$$E_+^q = \Psi_0 + \Psi_e, \tag{13}$$

$$E_-^q = 2e^{i(q+2)\varphi}\left[\mathcal{N}_e \mathcal{G}_e \left\{I_{1,e} - \frac{e^{i(q+1)\varphi}}{k_\perp z_\perp} I_{2,e}\right\} - \mathcal{N}_0 \mathcal{G}_0 \left\{I_{1,o} - \frac{e^{i(q+1)\varphi}}{k_\perp z_\perp} I_{2,0}\right\}\right]. \tag{14}$$

У загальному випадку параметр $k_\perp$ можна вибирати довільно: дійсним, уявним і комплексним. Залежно від цього еволюція пучка протікає різним чином. На рис.1,2 представлена еволюція циркулярно поляризованих компонент таких пучків.

Для пучка з уявним значенням параметра $k_\perp$ при малих довжинах кристала відмінність ліво циркулярно поляризованої компоненти полягає у наявності двох додаткових зовнішнього і внутрішнього кілець, що оточують центральне півкільце. При цьому у даній компоненті виникають два оптичних вихора, розташованих на кінцях центрального півкільця (рис.1б).

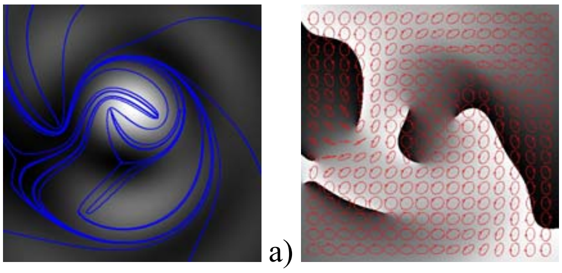
Подальше збільшення довжини приводить до розширення і розмиття цих кілець. При цьому у центрі пучка формується картина деформованих півкілець для право циркулярно поляризованої компоненти і складніша кільцеподібна структура з двома злегка зміщеними центральними вихорами в ліво циркулярно поляризованій компоненті пучка (рис.1в).

На великих довжинах кристала присутня лише центральна частина даної картини, на яку накладаються деформовані кільця, що виникають за рахунок інтерференції між звичайним і незвичайним пучками. У разі дійсного значення $k_\perp$ поблизу вхідного торця кристала у компонентах формуються деформовані півкільця, що володіють площинною симетрією (рис.2а).

Топологічний заряд ліво циркулярно поляризованої компоненти при цьому на 2 одиниці більше, ніж в право циркулярно поляризованій компоненті. Збільшення довжини кристала приводить до деформації і замиванню півкілець (рис.2б) і формуванню зовнішнього півкільця довкола даної картини (рис.2в). При значних довжинах кристала в обидвох компонентах пучка виникає півкільце, побите кільцями інтерференції між звичайним і незвичайним пучками (рис.2г,д).

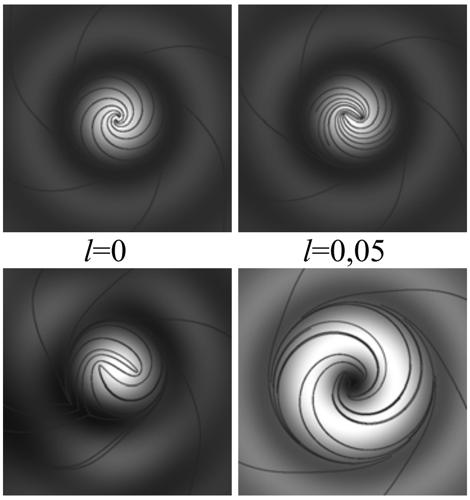
З аналізу рис1,2 видно, що хоча топологічний заряд правою і лівою циркулярних компонент відрізняється на 2 одиниці, але подвійний оптичний вихор не генерується на осі пучка.

Це пов'язано, мабуть, з відмінністю у положенні центру тяжіння і осі пучка. Цьому випадку відповідає розподіл поляризації в пучку на рис.3, з якого чітко видно, що осьова



а) б)

Рис. 3 Розподіл ліній, дотичних до великої півосі еліпса поляризації на фоні інтенсивності (а) і еліпсів поляризації на фоні кута повороту великої півосі еліпса поляризації (б) для конічного пучка з дійсним $k_{\perp}$=100000, перетяжкою w_0=100мкм і топологічним зарядом 0,5 в кристалі $LiNbO_3$ довжиною z=2см; поперечні розміри r_{max}=0,1 мм.



l=0 l=0,05

l=0,2 l=0,99

Рис. 4 Розподіл ліній, дотичних до великої півосі еліпса поляризації, на фоні інтенсивності для конічного пучка з дійсним $k_{\perp}$=100000, перетяжкою w_0=100мкм і топологічним зарядом l в кристалі $LiNbO_3$ довжиною z=2см; поперечні розміри r_{max}=0,1 мм.

вироджена омбіліка з топологічним індексом +1 розпадається на 2 "лимони" [11], а кільцева омбіліка – на "зірку" і "лимон"; наступна кільцева омбіліка розпадається на аналогічну пару "зірка"–"лимон".

Слід зазначити, що кожній поляризаційній омбіліці або *C*-точці (точка з циркулярною поляризацією) відповідає оптичний вихор в одній з циркулярно поляризованих компонент пучка.

Особливо зручно визначати положення поляризаційної сингулярності на картині розподілу азимута – кута повороту великої півосі еліпса поляризації відносно осі абсцис.

У цій картині положення омбіліки відповідає кінцю лінії, що розділяє чорний і білий колір, що на рис.3б (чорний колір відповідає азимуту $-\pi/2$, білий – $+\pi/2$). Для переконання того, що розвал центральної омбіліки пов'язаний із зміною топологічного заряду пучка вивчимо картину розподілу поляризаційних особливостей конічного пучка при різних значеннях топологічного заряду (рис.4).

Як видно з рис.4, навіть незначне відхилення величини топологічного заряду від цілого (порядка 0,01–0,05) призводить до розвалу центральної омбіліки на два "лимони". Така невелика зміна топологічного заряду ще не приводить до розпаду кільцевої омбіліки (l=0,05), проте при збільшенні значення топологічного заряду дана омбіліка розпадається на пару "зірка"–"монстр" (l= =0,2). Подальше збільшення топологічного заряду приводить до перетворення "монстра" у "лимон" і зсуву положень омбілік на рис.3.

Висновки

У конічному пучку з дробовим топологічним зарядом навіть невелика зміна величини топологічного заряду викликає зсув центру тяжіння відносно осі пучка, що приводить до розпаду центральної спіральної поляризаційної омбіліки з топологічним індексом +1, яка відповідає осесиметричному пучку, на два "лимони" з індексом кожного +1/2. Це відповідає спотворенню осесиметричних кілець у розподілі інтенсивності циркулярно поляризованих компонент і розпаду центрального подвійного оптичного вихору в ортогонально циркулярно поляризованій компоненті. Кільцева поляризаційна омбіліка з індексом 0 при відхиленні топологічного заряду від цілого значення більш ніж на 0,1 розпадається на 2 омбіліки – "зірку" (індекс –1/2) і "монстр", або "лимон" (індекс +1/2). У результаті цих перетворень сумарний індекс пучка залишається незмінним.

Отже, сингулярний пучок, топологічний заряд якого генерується на спіральній фазовій пластинці, є вкрай нестійким, оскільки експериментально неможливо реалізувати строгу однаковість висоти сходинки даної пластинки і довжини хвилі світла.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Воляр А.В., Фадеева Т.А.* Генерация сингулярных пучков в одноосных кристаллах // Оптика и спектроскопия. – 2003. – **94** (2). – С.264-274.
2. *Ciattoni A., Crosingani B., Di Porto P.* Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – **18** (7). – P.1656-1661.
3. *Egorov Yu.A., Fadeyeva T.A., Volyar A.V.* The fine structure of singular beams in crystals: colours and polarization // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2004. – **6** – P.S217–S228.
4. *Воляр А.В., Фадеева Т.А.* Пучки Лагерра-Гаусса с Комплексным и Действительным Аргументом в Одноосном Кристалле // Оптика и спектроскопия. – 2006. – **101** (3). – С.477-484.
5. *Fadeyeva T.A., Volyar A.V.* Extreme spin-orbit coupling in crystal-traveling paraxial beams // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – **27**. (3). – P.381-389.
6. 6. *Fadeyeva T., Volyar A.* Nondiffracting vortex-beams in a birefringent chiral crystal // Journ. Opt. Soc. of Am. A. – 2010. – **27**. (1). – P.13-20.
7. *Ciattoni A., Cincotti G., Palma C.* Angular momentum dynamics of a paraxial beam in a uniaxial crystal // Phys. Rev. E. –2003. – **67**. – P.036618-1-10.
8. *Fadeyeva T., Egorov Yu., Rubass A. et all.* Quadrefringence of optical vortices in a uniaxial crystal // Journ. Opt. Soc. of Am. A. – 2008. – **25**. (7). – P. 1634-1641.
9. *Fadeyeva T.A., Rubass A.F., Volyar A.V.* Transverse shift of a high-order paraxial vortex-beam induced by a homogeneous anisotropic medium // Physical Review A. – 2009. – **79**. (5). – P.053815-1-12.
10. *Fadeyeva T., Alexeyev C., Rubass A., VolyarA.* Vector erf-Gaussian beams: fractional optical vortices and asymmetric TE and TM modes // Optics Letters. - 2012. – **37**. (9). – P.1397-1399.
11. *Nye J.F.* Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations – Bristol: Institute of Physics Publishing, 1999.