УДК 519 888

© Скращук Л.В., 2013
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИНАМІЧНОЇ МІЖГАЛУЗЕВОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

Досліджено питання існування економічно обґрунтованих розв’язків динамічної міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда, наведено алгоритми та приклади їх побудови.

***Ключові слова**: динамічна балансова модель Леонтьєва-Форда, еколого-економічна система, екологічно збалансована економіка.*

Постановка проблеми. Реалії сьогодення лякають стрімким ростом забруднення навколишнього середовища у більшості країн постсоціалістичного простору, передумовою якому послугувало забезпечення швидкого економічного росту шляхом необдуманого використання природно-ресурсного потенціалу. Кризовий стан техніко-екологічних та еколого-економічних умов функціонування національного господарства змушує переглянути передумови забезпечення сталого економічного росту, існує необхідність переосмислення та вдосконалення підходів щодо економічного розвитку та впровадження у життя економічних реформ екологічної спрямованості.

Аналізуючи наявну ситуацію, приходимо до висновку, що функціонуючий економічний механізм щодо розв'язання проблеми збереження навколишнього природного середовища є неефективним та неспроможним забезпечити екологічно сприятливі умови господарювання, а тому її вирішення неможливе без розробки та впровадження програм по зменшенню відходів, а також можливості керування процесом виникнення та знищення техногенних забруднень [1].

Розв’язання екологічних проблем уможливлює перехід на засади та принципи сталого розвитку, який актуалізує проблему формування збалансованого економічного розвитку і вимагає вивчення економічної системи з позиції стійкості на довготривалу перспективу (в довготривалому інтервалі часу) та уособлює в собі концепцію збалансованого розвитку соціо-еколого-економічних систем. Тим паче, що успішний досвід зарубіжних країн свідчить про можливість раціоналізації природокористування, забезпечуючи при цьому тандем ефективного та екологобезпечного рівня виробництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделюванню динаміки еколого-економічних систем і проблемам сталого розвитку присвячено чимало наукових досліджень як вітчизняних, так і зарубіжних учених. Серед них варто відзначити праці О. Бакаєва, В. Геєця, В. Глушкова, В. Михалевича, І. Ляшенка, В. Григорківа, О. Волошина, О. Ляшенко, З. Герасимчук, С. Дорогунцова, Б. Данилишина, О. Рюміної, Ю. Іванілова, О. Лотова, В. Макарова, О. Рубінова, О. Петрова, І. Поспєлова, О. Шананіна, М. Мойсеєва, Р. Раяцкаса, У. Айзерда, Р. Айреса, Д. Медоуза, Д. Форда, Дж. Форрестера, М.В. Михалевича та ін., які стали науковою основою еколого-економічної політики в Україні, спрямованої на досягнення сталого розвитку.

Постановка завдання. Метою даної роботи є дослідження існуючих моделей та розробка нових економіко-математичних підходів і методик аналізу екологічно збалансованої економіки, зокрема її динаміки.

Викладення основних матеріалів дослідження. Предметом нашого дослідження стала динамічна модель Леонтьєва-Форда [2-4], яка досить вдало описує процеси еколого-економічної взаємодії. Дана модель формалізується системою рівнянь:

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = A^{(11)}x^{(1)}(t) + A^{(12)}x^{(2)}(t) + B^{(11)}\dot{x}^{(1)}(t) + B^{(12)}\dot{x}^{(2)}(t) + y^{(1)}(t), \\ x^{(2)}(t) = A^{(21)}x^{(1)}(t) + A^{(22)}x^{(2)}(t) - y^{(2)}(t), \\ t \in [0,T], \end{cases} \qquad (1)$$

де $x^{(1)}(t)=\left(x_1^{(1)}(t),...,x_n^{(1)}(t)\right)'$, $x^{(2)}(t)=\left(x_1^{(2)}(t),...,x_m^{(2)}(t)\right)'$, $y^{(1)}(t)=\left(y_1^{(1)}(t),...,y_n^{(1)}(t)\right)'$, $y^{(2)}(t)=\left(y_1^{(2)}(t),...,y_m^{(2)}(t)\right)'$ – відповідні вектори-стовпці валового випуску основної продукції, знищених забруднювачів (продукції допоміжного виробництва), кінцевої продукції, незнищених забруднювачів (' – операція транспонування вектора);

$A^{(11)}=\left(a_{ij}^{(11)}\right)_{i,j=1}^{n}$ – технологічна матриця витрат основної продукції на її одиничні випуски;

$A^{(12)}=\left(a_{il}^{(12)}\right)_{i,l=1}^{n,m}$ – технологічна матриця витрат основної продукції на знищення забруднювачів;

$A^{(21)}=\left(a_{lj}^{(21)}\right)_{l,j=1}^{m,n}$ – технологічна матриця випусків забруднювачів у процесі виробництва основної продукції;

$A^{(22)}=\left(a_{ls}^{(22)}\right)_{l,s=1}^{m}$ – технологічна матриця випусків забруднювачів у процесі знищення забруднювачів;

$\dot{x}^{(1)}(t)=\left(\dot{x}_1^{(1)}(t),...,\dot{x}_n^{(1)}(t)\right)'$ – вектор-стовпець абсолютних приростів основного виробництва ($\dot{x}^{(1)}$ – похідна від $x^{(1)}$);

$\dot{x}^{(2)}(t)=\left(\dot{x}_1^{(2)}(t),...,\dot{x}_m^{(2)}(t)\right)'$ – вектор-стовпець абсолютних приростів знищення забруднювачів;

$B^{(11)}=\left(b_{ij}^{(11)}\right)_{i,j=1}^{n}$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості основного виробництва;

$B^{(12)}=\left(b_{il}^{(12)}\right)_{i,l=1}^{n,m}$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва.

Матриці $A^{(11)}$, $A^{(12)}$, $A^{(21)}$, $A^{(22)}$, $B^{(11)}$, $B^{(12)}$ складаються з невід'ємних елементів, а вектори $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $\dot{x}^{(1)}$, $\dot{x}^{(2)}$ – це вектор-функції змінної часу t ($t\in[0,T]$, T – задане).

Вважатимемо також, що задано початкові умови

$$x^{(1)}(0)=x^{(1,0)}\geq 0,\; x^{(2)}(0)=x^{(2,0)}\geq 0 .\quad(2)$$

Переслідуючи мету аналізу та дослідження моделі (1), ефективного її використання та впровадження в практичну діяльність побудуємо розв'язок динамічної моделі Леонтьєва-Форда.

Виключивши з другого співвідношення (1) $x^{(2)}(t)$, отримаємо

$$x^{(2)}(t)=\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}\left[A^{(21)}x^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)\right],\quad(3)$$

а продиференціювавши (3) , матимемо

$$\dot{x}^{(2)}(t)=\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}\left[A^{(21)}\dot{x}^{(1)}(t)-\dot{y}^{(2)}(t)\right].\quad 4)$$

Підставивши рівності (3), (4) у перше рівняння системи (1), отримаємо

$$x^{(1)}(t)=A^{(1)}x^{(1)}(t)+B^{(1)}\dot{x}^{(1)}(t)+y(t),\quad(5)$$

де $A^{(1)}=A^{(11)}+A^{(12)}\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}A^{(21)}$,

$B^{(1)}=B^{(11)}+B^{(12)}\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}A^{(21)}$,

$$y(t)=y^{(1)}(t)-A^{(12)}\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}y^{(2)}(t)-B^{(12)}\left(I_m-A^{(22)}\right)^{-1}\dot{y}^{(2)}(t)$$

Надалі вважатимемо, що матриці $A^{(11)}$, $A^{(22)}$, $A^{(1)}$ є продуктивними [4]. Розв'язавши (5) відносно $\dot{x}^{(1)}(t)$, знайдемо

$$\dot{x}^{(1)}(t)=\left(B^{(1)}\right)^{-1}\left(I_n-A^{(1)}\right)x^{(1)}(t)-\left(B^{(1)}\right)^{-1}y(t).\quad(6)$$

Співвідношення (6) є лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, записаною у векторно-матричному вигляді. Для побудови розв'язку системи (6) застосуємо такий алгоритм:

1) побудуємо відповідну до (6) однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}^{(1)}(t)=\left(B^{(1)}\right)^{-1}\left(I_n-A^{(1)}\right)x^{(1)}(t);\quad(7)$$

2) знаходимо розв'язок системи (7), використовуючи один з відомих методів (виключення, метод Ейлера);

3) застосовуючи метод варіації сталих, будуємо загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (5);

4) знаходимо частковий розв'язок, використовуючи початкові умови (2).

Для забезпечення економічного змісту розв'язків системи (1) накладемо умови невід'ємності та «незворотності» капіталовкладень:

$$x^{(1)}(t)\ge 0,\ x^{(2)}(t)\ge 0,\ t\in[0,T], \quad (8)$$

$$\dot{x}^{(1)}(t)\ge 0,\ \dot{x}^{(2)}(t)\ge 0,\ t\in[0,T]. \quad (9)$$

Отже, на практиці економічний зміст мають тільки ті розв'язки системи (1), (2), які задовольняють умови (8), (9).

Наведемо ряд прикладів. ***Приклад 1.*** Нехай $n=2$, $m=1$, $A^{(11)}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4\\ 0,2 & 0,1\end{pmatrix}$,

$A^{(12)}=\begin{pmatrix}0,3\\ 0,4\end{pmatrix}$, $A^{(21)}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3\end{pmatrix}$,

$A^{(22)}=(0,04)$, $B^{(11)}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,5\\ 0,5 & 0,1\end{pmatrix}$,

$B^{(12)}=\begin{pmatrix}0,08\\ 0,08\end{pmatrix}$,

$y^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}0,7\\ 0,04\end{pmatrix}$, $y^{(2)}(t)=0,3$,

$x^{(1)}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$.

Система (6) в умовах даного прикладу формалізується так:

$$\begin{cases}\dot{x}_1^{(1)}=-1,292x_1^{(1)}+2,015x_2^{(1)}+0,518,\\ \dot{x}_2^{(1)}=2,083x_1^{(1)}-2,668x_2^{(1)}-1,599.\end{cases} \quad (10)$$

Розв'язок відповідної до (10) однорідної системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1^{(1)}=-1,292x_1^{(1)}+2,015x_2^{(1)},\\ \dot{x}_2^{(1)}=2,083x_1^{(1)}-2,668x_2^{(1)}.\end{cases}$$

має вигляд

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=C_1e^{-4,14t}+C_2e^{0,18t},\\ x_2^{(1)}=-1,41C_1e^{-4,14t}+0,73C_2e^{0,18t}.\end{cases} \quad (11)$$

Застосовуючи метод варіації сталих (з урахуванням (11)), розв'язок системи (10) шукатимемо у вигляді

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=C_1(t)e^{-4,14t}+C_2(t)e^{0,18t},\\ x_2^{(1)}=-1,41C_1(t)e^{-4,14t}+0,73C_2(t)e^{0,18t},\end{cases} \quad (12)$$

де $C_1(t)$, $C_2(t)$ – нові невідомі функції. Підставивши (12) у (10), знайдемо

$$C_1(t)=0,21e^{4,14t}+K_1,$$

$$C_2(t)=2,26e^{-0,18t}+K_2,$$

звідки

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=K_1e^{-4,14t}+K_2e^{0,18t}+2,47;\\ x_2^{(1)}=-1,41K_1e^{-4,14t}+0,73K_2e^{0,18t}+1,354.\end{cases}$$

З урахуванням початкових умов остаточно визначаємо розв'язок моделі:

$$\begin{cases}x^{(1)}=\begin{pmatrix}-0,495e^{-4,14t}+0,975e^{0,18t}+2,47\\ 0,698e^{-4,14t}+0,71e^{0,18t}+1,354\end{pmatrix},\\ x^{(2)}=-0,091e^{-4,14t}+0,8315e^{0,18t}+1,6549.\end{cases}$$

Очевидно, даний розв'язок задовольняє умови (8), (9), тому має реальний зміст.

Приклад 2. Нехай $n=3$, $m=1$,

$A^{(11)}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,15\\ 0,3 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,5 & 0,1\end{pmatrix}$,

$A^{(12)}=\begin{pmatrix}0,003\\ 0,02\\ 0,3\end{pmatrix}$, $A^{(21)}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,25\end{pmatrix}$,

$A^{(22)}=(0,005)$,

$B^{(11)}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,4\\ 0,3 & 0,2 & 0,004\\ 0,25 & 0,46 & 0,25\end{pmatrix}$,

$B^{(12)}=\begin{pmatrix}0,2\\ 0,3\\ 0,1\end{pmatrix}$, $y^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}0,1\\ 0,2\\ 0,3\end{pmatrix}$,

$y^{(2)}(t)=0,02$, $x^{(1)}(0)=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$. За допомогою програмного забезпечення Matlab 6.0 знайдено розв'язки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ моделі та їх похідні. Вони графічно зображені на рис. 1-4.

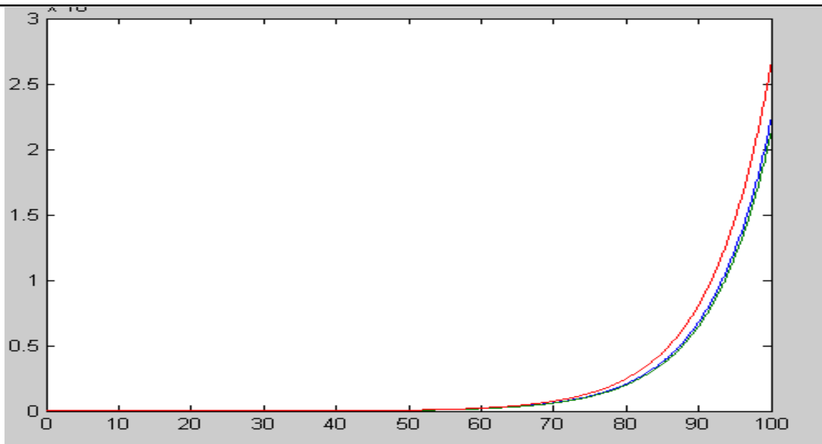

Рис. 1. Графічне зображення валових випусків

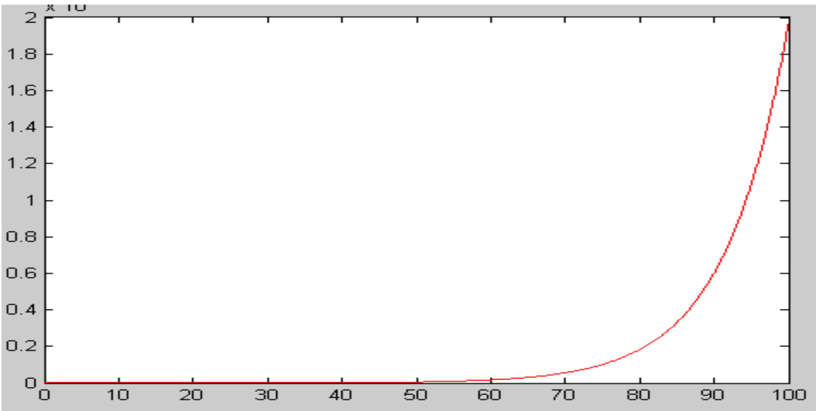

Рис. 2. Графічне зображення знищених забруднювачів

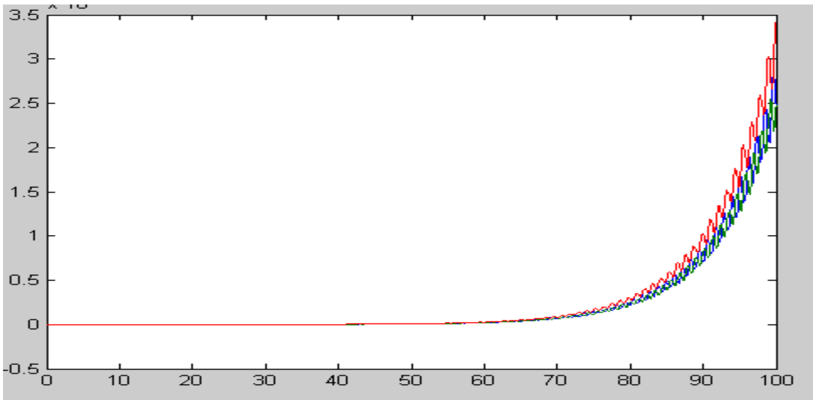

Рис. 3. Графічне зображення абсолютних приростів основного виробництва

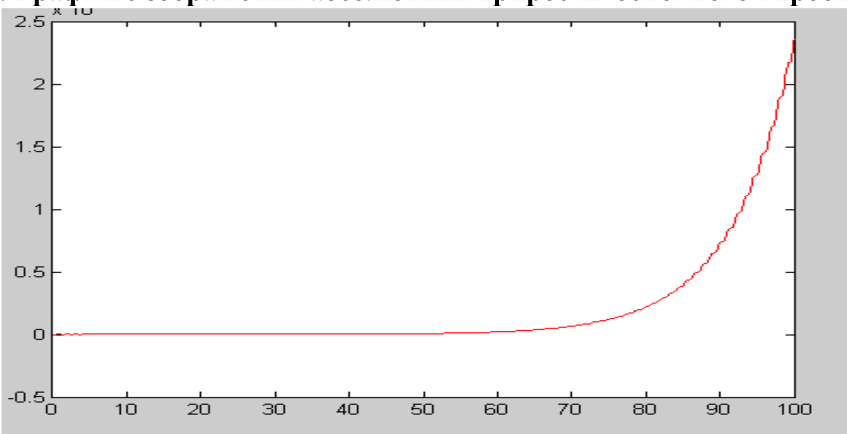

Рис. 4. Графічне зображення абсолютних приростів знищення забруднювачів

Оскільки графіки (рис. 1-4) зростають і розміщені в області невід'ємних значень при $t \geq 0$, то виконуються умови (8), (9), тобто дана модель та її розв'язки мають теоретичне обґрунтування та практичний зміст.

Приклад 3. Нехай $n = 4$, $m = 1$,

$$A^{(11)} = \begin{pmatrix} 0,31 & 0,24 & 0,15 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0,3 & 0,15 \\ 0,22 & 0,25 & 0,1 & 0,2 \\ 0,16 & 0,23 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix},$$

$$A^{(12)} = \begin{pmatrix} 0,0004 \\ 0,002 \\ 0,03 \\ 0,0005 \end{pmatrix}, \quad A^{(21)} = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,2 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(22)} = \left(0,005\right),$$

$$B^{(11)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 & 0,2 & 0,25 \\ 0,23 & 0,12 & 0,004 & 0,3 \\ 0,25 & 0,16 & 0,25 & 0,2 \\ 0,22 & 0,12 & 0,3 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$B^{(12)} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \qquad y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix},$$

$$y^{(2)}(t) = 0,01, \quad x^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язки моделі (1) в умовах даного прикладу зображено на рис. 5-6.

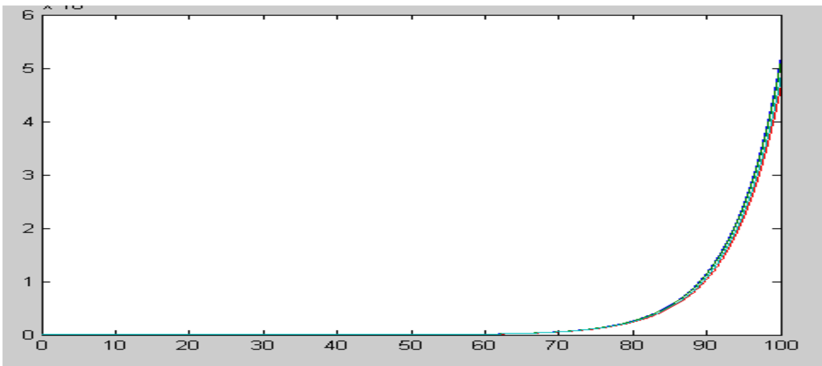

Рис. 5. Графічне зображення валових випусків

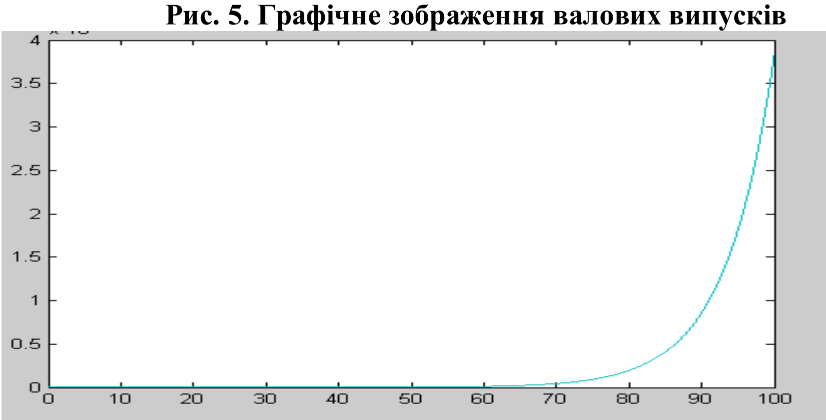

Рис. 6. Графічне зображення знищених забруднювачів

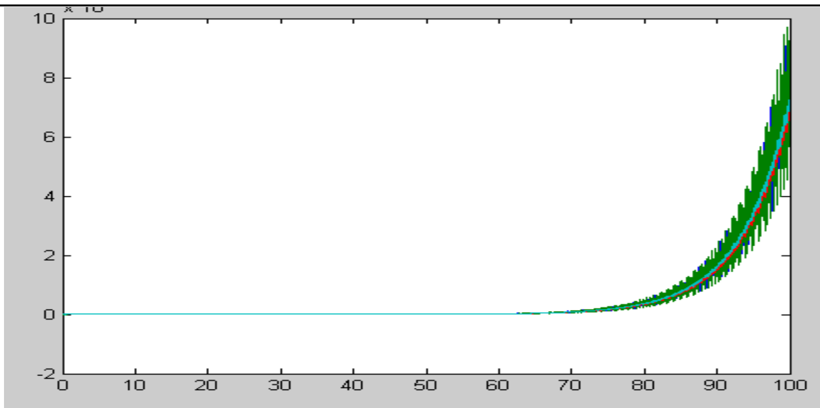

Рис. 7. Графічне зображення абсолютних приростів основного виробництва

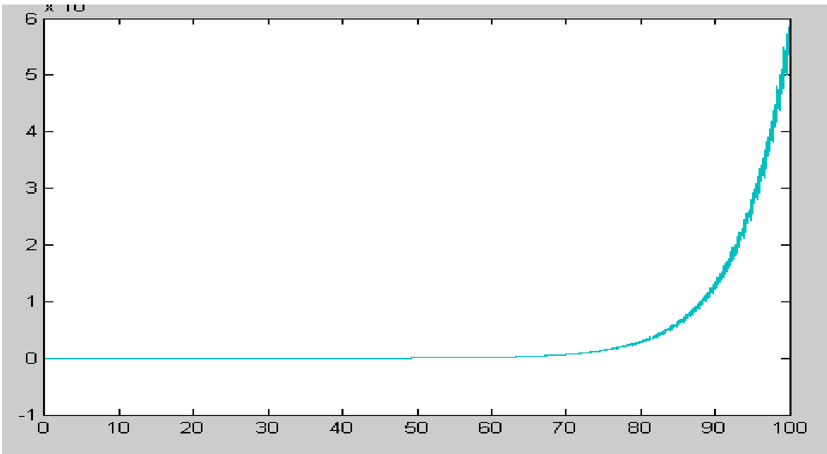

Рис. 8. Графічне зображення абсолютних приростів знищення забруднювачів

Аналіз побудованих графіків (рис. 5-8) дозволяє обґрунтувати невід'ємність розв'язків, а також умови «незворотності» капіталовкладень.

Висновки. Наведена методика побудови та дослідження розв'язків динамічної моделі Леонтьєва-Форда (1) може успішно використовуватися на практиці з метою прийняття раціональних еколого-економічних рішень.

Список літератури

1. Веклич О. Економічний механізм природокористування: аналіз дієвості // Вісник НАН України. – 2001. – N8. – С. 370-400.
2. Леонтьев В.В. Межотраслевой анализ влияния структуры экономики на окружающую среду // Леонтьев В.В., Форд Д. Экономика и математические методы. – 1972. – Т. 8. – №3. – С. 370-400.
3. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.
4. Григорків В.С. Моделювання економіки: Навчальний посібник. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – 320 с.

Аннотация

Лариса Скращук

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА-ФОРДА

Исследованы вопросы существования экономически обоснованных решений динамической межотраслевой модели Леонтьева-Форда, приведено алгоритмы и примеры их построения.

Ключевые слова: *динамическая балансовая модель Леонтьева-Форда, эколого-экономическая система, экологически сбалансированная экономика.*

Summary

Larisa Skraschuk

CONSTRUCTION AND RESEARCH SOLUTIONS DYNAMIC INTERINDUSTRY MODEL LEONTIEF-FORD

The dynamic input-output environmental extend Leontief-Ford model is considered in the article. The problem of the integral solution existence is researched. The algorithm of solution construction was suggested.

Key words: *Leontief-Ford input-output model, ecological and economic systems, environmentally sustainable economy.*