УДК 519.866

© Григорків В.С., Скращук Л.В., 2015
Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ОСНОВНОГО ТА ДОПОМІЖНОГО ВИРОБНИЦТВ В ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Досліджено умови оптимальної взаємодії основного та допоміжного виробництв в еколого-економічних системах, на основі яких можна спрогнозувати рівень вкладень у допоміжне виробництво, який забезпечує його можливе зростання.

Ключові слова: основне виробництво, допоміжне виробництво, оптимальне керування, оптимальна швидкодія.

Постановка проблеми. Необхідність постановки задач планування й управління еколого-економічними системами зумовлена науково-технічним прогресом, а також підприємствами, які і досі застосовують екстенсивні методи розвитку, що призводять до необдуманого використання природно-ресурсного потенціалу. Затяжна системна економічна криза в Україні, що характеризується неадекватними результатами й економічними наслідками, лише посилює екологічну кризу в державі.

Проте, останнім часом визнання екологічних пріоритетів призвело до того, що екологічний фактор почав набувати все більш важливого значення в економічних відносинах, забезпечуючи актуальність процесів збалансованої еколого-економічної взаємодії. Оскільки деградація навколишнього середовища є серйозною перешкодою для економічного розвитку, то одним із основних завдань економічного розвитку став захист навколишнього середовища.

Тому актуальним завданням сьогодення є формування нового підходу до еколого-економічного управління виробництвом, орієнтованого на досягнення сталого розвитку, який передбачає забезпечення рівноваги між виробництвом і безпекою навколишнього середовища [1-7].

Розв’язання зазначених проблем неможливе без їх глибокого наукового обґрунтування, розробки адекватних методів і моделей дослідження еколого-економічних систем, а також прийняття відповідних оптимальних рішень у процесах управління цими системами.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблеми планування та прогнозування динаміки еколого-економічних систем належать до актуальних проблем сучасної науки. Чимало наукових досліджень присвячено оптимальному керуванню екологічно збалансованою економікою, дослідженню балансових і динамічних міжгалузевих моделей, аналізу гіпотез соціально-економічного розвитку і варіантів науково-технічного прогресу, аналізу темпів і пропорцій економічного зростання задля забезпечення сталого розвитку. Завдання економіко-математичного моделювання екологічно збалансованої економіки і практичної реалізації отриманих наукових результатів були і є предметом досліджень багатьох учених, зокрема А.Г. Аганбегяна, А.Г. Гранберга, В. Глушкова, В. Михалевича, І. Ляшенка, В. Григорківа, О. Волошина, О. Ляшенко, З. Герасимчук, О. Рюміної, Ю. Іванілова, О. Лотова, В. Макарова, А. Мараховського, В. Новожилова, О. Рубінова, О. Петрова, І. Поспєлов, О. Шананіна та інших. Їхні праці стали науковою основою для розв’язання проблем керування еколого-економічними процесами.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Однак ціла низка питань, пов’язаних з методологією дослідження проблем еколого-економічної взаємодії, потребує свого подальшого розвитку.

Формулювання цілей статті. Розвиток економіки суттєво залежить від структури та адекватності розподілу основного матеріального ресурсу, які залежать від рівня обґрунтованості й оптимальності відповідних рішень. У зв’язку з цим потрібні глибокі наукові дослідження процесів розподілу матеріального ресурсу в економіці на її просте та розширене відтворення, зокрема у випадку еколого-економічної взаємодії. Метою даної праці є моделювання оптимальної взаємодії основного та допоміжного виробництв в еколого-економічних системах. Моделі такої взаємодії дозволяють визначити умови оптимального зростання допоміжного виробництва, яке займається утилізацією забруднення.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо економіку, у якій функціонує основне виробництво (виробництво матеріальної продукції) та допоміжне виробництво (утилізація або знищення забруднювачів).

Нехай t – змінна часу; $x(t)$ – матеріальний ресурс (продукція) основного виробництва; $z(t)$ – матеріальний ресурс допоміжного виробництва; $\alpha_1 x(t)$ – частина ресурсу, задіяна у простому відтворенні в основному виробництві

$(\alpha_1 \in [0,1])$; $\alpha_2 z(t)$ – частина ресурсу, задіяна у простому відтворенні в допоміжному виробництві $(\alpha_2 \in [0,1])$; $\beta_1 \dot{x}(t)$ – капітальні вкладення у розширене відтворення основного виробництва $(\beta_1 > 0)$; $\beta_2 \dot{z}(t)$ – капітальні вкладення у розширене відтворення допоміжного виробництва $(\beta_2 > 0)$; $y(t)$ – кінцева продукція. Підкреслимо, що $\dot{x}(t)$ та $\dot{z}(t)$ – це абсолютні прирости основного та допоміжного виробництв, а β_1 та β_2 – це коефіцієнти капіталомісткості приросту матеріального ресурсу в основному та допоміжному виробництвах (показують, яку кількість ресурсу (продукції) потрібно вкласти для збільшення виробничої потужності на одиницю).

Зауважимо також, що прирости $\dot{x}(t)$ та $\dot{z}(t)$ можуть бути лише невід'ємними, тобто $\dot{x}(t) \geq 0$, $\dot{z}(t) \geq 0$. Якщо позначити через γ $(\gamma \in [0,1])$ частку кінцевої продукції у загальному обсязі основної продукції, то матимемо таке балансове співвідношення:

$$x(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 z(t) + \beta_1 \dot{x}(t) + \beta_2 \dot{z}(t) + y(t) = \\ = (\alpha_1 + \gamma) x(t) + \alpha_2 z(t) + \beta_1 \dot{x}(t) + \beta_2 \dot{z}(t). \quad (1)$$

Співвідношення (1) є агрегованою моделлю еколого-економічної взаємодії. Залежно від тієї чи іншої стратегії керування еколого-економічними процесами можна розглядати різні постановки задач оптимального керування.

Наприклад, однією із таких задач може бути досягнення максимального зростання допоміжного виробництва за мінімальний термін часу. Зупинимося на цій задачі детальніше, ввівши параметр керування, який відповідає частці вкладень в основне виробництво, а саме:

$$u(t) = \frac{\beta_1 \dot{x}(t)}{\beta_1 \dot{x}(t) + \beta_2 \dot{z}(t)}. \quad (2)$$

Зрозуміло, що $u \in [0,1]$. Визначивши із (2) та (1) $\dot{z}(t)$ та прирівнявши відповідні вирази, отримаємо

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\beta_1} u(t) \left[(1 - \alpha_1 - \gamma) x(t) - \alpha_2 z(t) \right]. \quad (3)$$

Підставивши (3) у (2), матимемо рівняння динаміки для $\dot{z}(t)$:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{\beta_2} (1 - u(t)) \left[(1 - \alpha_1 - \gamma) x(t) - \alpha_2 z(t) \right]. \quad (4)$$

Припускаючи, що відомі умови

$$x(0) = x_0,\ z(0) = z_0,\ z(t^*) = z^*, \quad (5)$$

уточнимо поставлену перед нами задачу: за мінімальний термін часу перевести систему зі стану (x_0, z_0) у стан (x^*, z^*), вважаючи, що рух системи здійснюється згідно наведеними вище співвідношеннями. Це задача на оптимальну швидкодію.

Для зручності таких викладень введемо позначення $x_1 = (1 - \alpha_1 - \gamma) x$, $x_2 = \alpha_2 z$, $\nu = (1 - \alpha_1 - \gamma) / \beta_1$, $\mu = \alpha_2 / \beta_2$, $x_1(0) = (1 - \alpha_1 - \gamma) x(0)$, $x_2(0) = \alpha_2 z(0)$, $x_2(t^*) = \alpha_2 z(t^*)$. Тоді матимемо таку задачу на оптимальну швидкодію:

$$\begin{cases} t^* \to \min, \\ \dot{x}_1(t) = \nu u(t)\left[x_1(t) - x_2(t)\right], \\ \dot{x}_2(t) = \mu\left(1 - u(t)\right)\left[x_1(t) - x_2(t)\right], \\ x_1(0) = x_1^{(0)},\ x_2(0) = x_2^{(0)},\ x_2\left(t^*\right) = x_2^*, \\ 0 \le u(t) \le 1,\ t \in \left[0, t^*\right]. \end{cases} \quad (6)$$

Підкреслимо, що додатність або в загальному випадку невід'ємність x_1, x_2, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ (а значить і x, z, $\dot{x}$, $\dot{z}$) забезпечується умовами

$$x_1^{(0)} > x_2^{(0)},\ x_1(t) > x_2(t),\ t \in \left[0, t^*\right], \quad (7)$$

тобто нас буде цікавити тільки той розв'язок задачі оптимального керування (6), який задовольняє (7). Стосовно задачі (6) зазначимо, що початковий момент часу $t = 0$ і лівий кінець траєкторії (задані $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$) вважаються закріпленими (фіксованими), а кінцевий момент часу t^* та правий кінець траєкторії – рухомими (насправді рухомою є тільки компонента x_2, а x_1 – вільна). Якщо брати до уваги (7), то на фазовій площині x_1Ox_2 фазова точка може рухатися лише у тій частині першого квадранта, у якій $x_1 > x_2 > 0$.

Функція Понтрягіна для (6) має вигляд

$$\begin{aligned} H\left(t, x_1, x_2, u, \lambda_0, \psi_1, \psi_2\right) &= -\lambda_0 + \psi_1 \nu u\left(x_1 - x_2\right) + \psi_2 \mu\left(1 - u\right)\left(x_1 - x_2\right) = \\ &= -\lambda_0 + \psi_2 \mu\left(x_1 - x_2\right) + \left(x_1 - x_2\right)\left(\nu\psi_1 - \mu\psi_2\right)u, \end{aligned} \quad (8)$$

де λ_0 – сталий множник Лагранжа, що відповідає цільовому функціоналу, ψ_1, ψ_2 – так звані спряжені змінні, що є функціями часу. Згідно з теорією оптимального керування [8], якщо $\left(u^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t)\right)$, $t \ge 0$ – оптимальний процес задачі (6), то існують одночасно не рівні нулю λ_0^*, ψ_1^*, ψ_2^*, що виконуються необхідні умови оптимальності, які включають рівняння еволюції системи, рівняння для спряжених змінних, умови трансверсальності, принципу максимуму, стаціонарності по t^* та невід'ємності:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = \nu u^*(t)\left[x_1^*(t) - x_2^*(t)\right], \\ \dot{x}_2^*(t) = \mu\left(1 - u^*(t)\right)\left[x_1^*(t) - x_2^*(t)\right]; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1^*(t) = -\left[\nu\psi_1^*(t) - \mu\psi_2^*(t)\right]u^*(t) - \mu\psi_2^*(t), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = \left[\nu\psi_1^*(t) - \mu\psi_2^*(t)\right]u^*(t) + \mu\psi_2^*(t); \end{cases} \quad (10)$$

$$\psi_1^*(0) = \lambda_1^*,\ \psi_2^*(0) = \lambda_2^*,\ \psi_1^*\left(t^*\right) = \lambda_3^* \cdot 0 = 0,\ \psi_2^*\left(t^*\right) = -\lambda_4^*; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &H\left(t, x_1^*(t), x_2^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t)\right) = \\ &\quad = \max_{u \in [0,1]}\left[-\lambda_0^* + \psi_2^*\mu\left(x_1^* - x_2^*\right) + \left(x_1^* - x_2^*\right)\left(\nu\psi_1^* - \mu\psi_2^*\right)u\right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda_0^* - \mu\psi_2^*\left(t^*\right)\left[x_1^*\left(t^*\right) - x_2^*\left(t^*\right)\right] - \left[x_1^*\left(t^*\right) - x_2^*\left(t^*\right)\right]\times$$

$$\times\left[\nu\psi_1^*\left(t^*\right)-\mu\psi_2^*\left(t^*\right)\right]u^*\left(t^*\right)=0,\quad \lambda_0^*\geq 0. \tag{13}$$

Співвідношення (9)-(13) служать основою для розв'язання задачі (6).

Із принципу максимуму випливає, що

$$u^*\left(\psi_1^*,\psi_2^*\right)=\begin{cases}0, & \nu\psi_1^*-\mu\psi_2^*\leq 0,\\ 1, & \nu\psi_1^*-\mu\psi_2^*>0.\end{cases} \tag{14}$$

Умови трансверсальності на правому кінці означають, що вектор $\psi^*\left(t^*\right)$ ортогональний до множини точок $x_2=x_2^*$ (тобто до прямої). Очевидно, що вектор $\psi^*\left(t^*\right)=\left(\psi_1^*\left(t^*\right),\psi_2^*\left(t^*\right)\right)=\left(0,1\right)$ (ψ^* визначається з точністю до постійного множника), тобто

$$\psi_1^*\left(t^*\right)=0,\ \psi_2^*\left(t^*\right)=1. \tag{15}$$

Підставивши (15) у (14), отримаємо $u^*\left(t^*\right)=0$ (зауважимо, що із (11) і (13) випливає, що $\lambda_4^*=-1,\ \lambda_0^*=\mu\neq 0$).

Система рівнянь (10) має перший інтеграл $\psi_1\left(t\right)+\psi_2\left(t\right)=C=const$. Очевидно, що $C=\psi_1\left(t^*\right)+\psi_2\left(t^*\right)=1$. Тепер легко розв'язати системи (9) і (10) при $u^*\left(t\right)=0$ і $u^*\left(t\right)=1$, а саме при $u^*\left(t\right)=0$ маємо

$$\begin{cases}x_1^*=C_1,\ x_2^*=C_1+C_2e^{-\mu t},\\ \psi_2^*=C_3e^{\mu t},\quad \psi_1^*=C_4-\dfrac{C_3}{\mu}e^{\mu t},\end{cases} \tag{16}$$

а при $u^*\left(t\right)=1$

$$\begin{cases}x_2^*=\tilde{C}_1,\ x_1^*=\tilde{C}_1+\tilde{C}_2e^{\nu t},\\ \psi_1^*=\tilde{C}_3e^{-\nu t},\quad \psi_2^*=\tilde{C}_4-\tilde{C}_3e^{-\nu t}=1-\tilde{C}_3\,\mathrm{e}^{-\nu t}.\end{cases} \tag{17}$$

Довільні сталі $C_i,\ \tilde{C}_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ визначаються з умов

$$\psi_1^*\left(t^*\right)=0,\ \psi_2^*\left(t^*\right)=1,\ C=1,\ u^*\left(t^*\right)=0. \tag{18}$$

Із (18) випливає, що

$$C_4-\frac{C_3}{\mu}e^{\mu t^*}=0,\ C_3e^{\mu t^*}=1,$$

тобто

$$\psi_2^*\left(t\right)=e^{\mu\left(t-t^*\right)},\ \psi_1^*\left(t\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-e^{\mu\left(t-t^*\right)}\right)$$

при $\tilde{t}\leq t\leq t^*$, де $\tilde{t}$ – момент останнього переключення. Крім того, в момент $\tilde{t}$ згідно з (14) маємо $\nu\psi_1^*\left(\tilde{t}\right)-\mu\psi_2^*\left(\tilde{t}\right)=0$, $\psi_1^*\left(\tilde{t}\right)+\psi_2^*\left(\tilde{t}\right)=1$ або

$$\psi_1^*\left(\tilde{t}\right)=\frac{\mu}{\nu+\mu},\ \psi_2^*\left(\tilde{t}\right)=\frac{\nu}{\nu+\mu}. \tag{19}$$

Отже, згідно із (19)

$$\tilde{t}=t^*+\frac{1}{\mu}\ln\frac{\nu}{\nu+\mu}. \tag{20}$$

Врахувавши, що функція $\psi^*\left(t\right)=\nu\psi_1^*\left(t\right)-\mu\psi_2^*\left(t\right)$ монотонно спадає, то вона може змінювати свій знак лише один раз, тобто може бути не більше однієї точки переключення. Справді, при $\tilde{t}\leq t\leq t^*$

$\psi^*(t) = \dfrac{\nu}{\mu} - \left(\dfrac{\nu}{\mu} + \mu\right) e^{\mu(t-t^*)}$, тому $\dot{\psi}^*(t) < 0$ (функція спадна). При $0 \le t \le \tilde{t}$ $\psi^*(t) = \tilde{C}_3(\nu + \mu)e^{-\nu t} - \mu$. Оскільки $\tilde{C}_3$ можна визначити з умови неперервності $\psi_2^*(t)$ у точці $\tilde{t}$, тобто з умови

$$1 - \tilde{C}_3 e^{-\nu\tilde{t}} = e^{\mu(\tilde{t}-t^*)}, \quad \text{то} \quad \tilde{C}_3 = \frac{1 - e^{\mu(\tilde{t}-t^*)}}{e^{-\nu\tilde{t}}} = \frac{\mu\psi_1^*(\tilde{t})}{e^{-\nu\tilde{t}}} = \frac{\mu \cdot \dfrac{\mu}{\mu+\nu}}{e^{-\nu\tilde{t}}} = \frac{\mu^2 e^{\nu\tilde{t}}}{\mu+\nu} > 0.$$

Отже $\dot{\psi}^*(t) < 0$, що й потрібно було встановити. Отже,

$$u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tilde{t}, \\ 0, & \tilde{t} \le t \le t^*, \end{cases}$$

тобто точка $\tilde{t} \in (0, t^*)$, тому оптимальна стратегія розвитку допоміжного виробництва (знищення забруднювачів) передбачає певний рівень розвитку основного виробництва, який наступає у момент $\tilde{t}$. Це підтверджує аналіз отриманих розв'язків (16), (17). Із (17) випливає, що при $0 \le t \le \tilde{t}$

$$x_2^* = x_2^{(0)},$$
$$x_1^* = x_2^{(0)} + \left(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right)e^{\nu t},$$

а із (16) при $0 \le t \le \tilde{t}$ –

$$x_1^* = C_1 = x_2^{(0)} + \left(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right)e^{\nu\tilde{t}} = x_1^*(\tilde{t}),$$
$$x_2^* = C_1 + C_2 e^{-\mu t},$$

тобто

$$x_2^*(t^*) = C_1 + C_2 e^{-\mu t^*} = x_2^*,$$
$$x_2^*(\tilde{t}) = C_1 + C_2 e^{-\mu\tilde{t}} = x_2^{(0)}$$

або

$$\frac{x_2^* - C_1}{x_2^{(0)} - C_1} = \frac{C_2 e^{-\mu t^*}}{C_2 e^{-\mu\tilde{t}}} = e^{-\mu(t^*-\tilde{t})} = e^{\mu(\tilde{t}-t^*)} = e^{\frac{1}{\mu}\ln\frac{\nu}{\nu+\mu}} = e^{\ln\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}} = \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}, \; C_1 = x_1^*(\tilde{t}).$$

Отже,

$$x_2^* = x_1^*(\tilde{t}) + \left[x_2^*(\tilde{t}) - x_1^*(\tilde{t})\right]\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu} = x_1^*(\tilde{t})\left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}\right] + x_2^*(\tilde{t})\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}$$

або

$$\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{-1/\mu} x_2^* = \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{-1/\mu} \cdot \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}\right] x_1^*(\tilde{t}) + x_2^*(\tilde{t}), \qquad (21)$$

де $\tilde{t}$ – момент зростання допоміжного виробництва, $x_2^*(\tilde{t})$ – початковий рівень розвитку допоміжного виробництва, що відповідає цьому моменту. Якщо припустити, що співвідношення між рівнем розвитку основного і допоміжного виробництва в момент $\tilde{t}$ має вигляд $x_2^*(\tilde{t}) = \theta x_1^*(\tilde{t})$ $(0 < \theta < 1)$, то із (21) можна спрогнозувати рівень розвитку допоміжного виробництва, а саме

$$x_2^* = \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu}\right] x_1^*(\tilde{t}) + x_2^*(\tilde{t})\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{1/\mu} =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} \right] x_1^* \left(\tilde{t} \right) + \theta \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} \cdot x_1^* \left(\tilde{t} \right) =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} + \theta \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} \right] x_1^* \left(\tilde{t} \right).$$

Якщо до того ж вважати, що $x_2^* = \eta x_1^* \left(\tilde{t} \right) \ \left(0 < \eta < 1, \theta < \eta \right)$, то

$$x_2^* = \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} + \theta \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} \right] x_1^* \left(\tilde{t} \right) = \eta x_1^* \left(\tilde{t} \right)$$

або

$$\left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} + \theta \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} \right] = \eta . \qquad (22)$$

Співвідношення (22) дозволяє визначити величину

$$\theta = \left[\eta + \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{1/\mu} - 1 \right] \cdot \left(\frac{\nu}{\nu + \mu} \right)^{-1/\mu},$$

яка власне кажучи і визначає той рівень вкладів у допоміжне виробництво, що може забезпечити його можливе зростання.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Запропонована модель взаємодії основного та допоміжного виробництв в еколого-економічній системі дозволяє розв'язати задачу досягнення максимального зростання допоміжного виробництва за мінімальний термін часу. Зміст цієї задачі полягає у тому, що:

1) допоміжне виробництво може розвиватися лише за умови певного рівня розвитку основного виробництва;

2) оптимальна траєкторія розвитку основного та допоміжного виробництв має лише один момент переключення, який залежить від параметрів моделі та оптимального терміну швидкодії;

3) при певних співвідношеннях між основним і допоміжним виробництвами можна спрогнозувати оптимальний рівень розвитку допоміжного виробництва;

4) отримані результати можуть бути використані на практиці при дослідженні процесів еколого-економічної взаємодії в економічних системах.

Список літератури

1. Рюміна Е.В. Экологический фактор в экономико-математических моделях. – М. : Наука, 1980. – 166 с.

2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : навч. пос. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.

3. Григорків В.С. Моделювання еколого-економічної взаємодії : навчальний посібник. – Чернівці : Рута, 2007. – 84 с.

4. Григорків В.С. Моделювання економіки : навчальний посібник. – Чернівці : ЧНУ, 2009. – 320 с.

5. Скращук Л.В. Процеси сталого розвитку та екологічна безпека як актуальні об'єкти наукових досліджень // Науковий вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту КНТЕУ. – Чернівці: Книги-XXI, 2009. – Вип. IV (36). Економічні науки. – С. 156-166.

6. Скращук Л.В. Сучасний стан еколого-економічних систем у контексті переходу України на засади сталого розвитку // Науковий вісник Буковинського фінансово-юридичного університету. – Чернівці : Книги – XXI, 2010. – Економічні науки. – С. 296-305.

7. Скращук Л.В. Побудова та дослідження розв'язків динамічної міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда // Науковий вісник Чернівецького національного університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т. – 2013. – Вип. 650-652. Економіка. – С. 338-343.

8. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці : навч. посібник / В.С. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т : 2011. – 200 с.

Аннотация

Василий Григоркив, Лариса Скращук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУКЦИОНИРОВАНИЯ ОСНОВНОГО И ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВ В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Исследованы условия оптимального взаимодействия основного и дополнительного производств в эколого-экономических системах, на основании которых можно спрогнозировать уровень вложений в дополнительное производство, обеспечивающий его возможный рост.

***Ключевые слова**: основное производство, дополнительное производство, оптимальное управление, оптимальное быстродействие.*

Summary

Vasiliy Grygorkiv., Larisa Skraschuk.

MODELLING OF FUNCTIONING PROCESSES OF PRIMARY AND AUXILIARY PRODUCTION IN THE ECO-ECONOMIC SYSTEMS

Conditions for optimal interaction between primary and auxiliary productions in the eco-economic systems have been investigated. They are the basis for prediction the of the investment level into auxiliary production, which provides its possible growth.

***Keywords**: primary production, auxiliary production, optimal control, optimal speed of response, maximum growth.*