

**АНАЛІЗ ПРОЕКЦІЙ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ РОЗВ'ЯЗКІВ МОДЕЛІ  
ВЗАЄМОДІЇ ТІНЬОВОЇ ТА ЛЕГАЛЬНОЇ ЕКОНОМІК**

У статті розглянуто модель взаємодії тіньової та легальної економік, яка дозволяє визначити динаміку заощаджень економічно активного населення та ціни на агрегований продукт. Імітаційні експерименти надають можливість дослідити фактори легалізації тіньової економіки.

**Ключові слова:** тіньова економіка, економічна структура суспільства, імітаційне моделювання

**Постановка проблеми.** Аналіз української економіки підтверджує наявність багатьох негативних явищ, в тому числі незаконне виробництво та незаконна заробітна платня, ухилення від сплати податків, хабарництво, корупція. Протягом останніх років з'явилося багато досліджень, присвячених аналізу тіньової економіки, в яких використовуються різні підходи та інструменти аналізу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Одним з найбільш поширених підходів до аналізу тіньової економіки є використання панельних даних для розуміння того, які фактори впливають на рівень тіньової економіки. Зокрема, Дж. Альм і А. Ембає використовують динамічну модель панельних даних для оцінки тіньової економіки з використанням методу попиту на валюту [5]. Вони виявили, що співвідношення валюти до грошової маси, як правило, вище для економік із слабкішим потенціалом забезпечення виконання податкової політики та вищими темпами інфляції. Отримані вченими результати також показують, що розмір тіньової економіки істотно варіюється залежно від рівня доходів: країни з низьким рівнем доходу мають вищий рівень тіньової економіки у порівнянні з розвинутими країнами.

Гонсалес-Фернандес М. і Гонсалес-Веласко К. проаналізували з використанням панельних даних залежність між тіньовою економікою та корупцією як детермінантами державного боргу [8]. Їх результати показують, що як обсяг тіньової економіки, так і рівень корупції мають значний вплив на регіональний державний борг, але вплив рівня корупції нижче, ніж обсягу тіньової економіки.

У статті [7] автори, використовуючи динамічну загальну модель рівноваги, визначили обсяги тіньової економіки. Вони виявили негативний зв'язок між обсягом тіньової економіки та інфляцією на рівні країни.

Елгін Ц. та Урас Б. вивчили взаємозв'язок між ризиком неплатоспроможності держави і розміру тіньової економіки [6]. Автори довели, що існують сильні причинно-наслідкові зв'язки між обсягом тіньової економіки та оцінкою ризику неплатоспроможності держави та державним боргом країни.

У перехідних суспільствах спостерігається високий рівень тіньової економіки. У зв'язку з

цим особлива увага повинна приділятися моделюванню взаємодії тіньової та правової економіки.

В статті [3] побудовано математичну модель динаміки взаємодії корупції, тіньової та легальної економік. Автори отримали аналітичні вирази мажорантного типу по відношенню до оцінювання обсягів складових економічної еволюції та ступенем ризику їх співіснування.

Коляда Ю. і Семашко К. розширили зазначені вище результати, використовуючи площинну динамічну модель, яка описує економічний стан суспільства, в якому співіснують офіційна та нелегальна економіка [4]. Автори отримали формули для оцінки ризику співіснування легальної та тіньової економік, які можуть бути використані для прогнозування в довільний момент часу  $t$ . На якість прогнозування впливають обрані коефіцієнти математичної моделі, початкові умови і обсяг легальної економіки.

У книзі "Complex-Valued Modeling in Economics and Finance"

Светуньков С. описав можливість моделювання тіньової економіки за допомогою комплексних функцій [10]. Використовуючи теорію комплексних чисел, побудовано модель для оцінки вартості основних засобів, що використовуються в незаконному виробництві, кількості співробітників, залучених до тіньової економіки, та обсягу тіньової економіки. Однак розрахунки в цій моделі мають умовний характер через відсутність достовірних початкових даних.

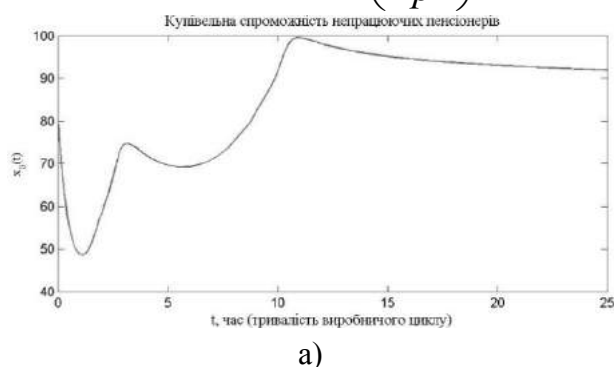
**Формулювання цілей статті.** Розглянуті публікації, як частина інших, спрямовані або на оцінювання впливу тіньової економіки на економічний розвиток, або оцінювання рівня тіньової економіки та визначення того, як впливають різні соціальні та економічні зміни на тіньову економіку. Метою даного дослідження є вивчення процесів прямої взаємодії між легальною та тіньовою економіками із врахуванням економічної структури суспільства. Для цієї мети була побудована математична модель економіки з урахуванням тіньового сектору [1, 2].

**Викладення основного матеріалу.** В роботах [1, 2] зазначено, що в моделі враховано наступну структуру суспільства: непрацюючі

пенсіонери (із заощадженнями  $x_0$ ), працівники реального сектора ( $x_1$ ), власники підприємств або підприємці ( $x_2$ ), працівники бюджетних організацій ( $x_3$ ), пенсіонери, що працюють у реальному секторі ( $x_4$ ), пенсіонери, що працюють у бюджетних організаціях ( $x_5$ ), еліта ( $x_6$ ). У даній роботі аналізуються також результати імітаційних експериментів з моделлю взаємодії тіньової та легальної економік, що розширюють результати, відображені в праці [9, 11].

Для розширення і доповнення результатів імітаційних експериментів досліджено динаміку попиту на легальний товар або послугу для

кожної групи населення  $G_i \left( \frac{\alpha_i x_i}{p} \right)$  ( $i = \overline{0,6}$ ).



Також досліджено динаміку купівельної спроможності для кожної групи населення  $\frac{x_i}{p}$  ( $i = \overline{0,6}$ ).

Проведені експерименти показують, що купівельна спроможність усіх груп населення, окрім власників підприємств, спочатку зростає, а потім починає зменшуватись до певної горизонтальної асимптоти.

В умовах зростання частки тіньової економіки зменшення купівельної спроможності відбувається стрімкіше, ніж в умовах детінізації економіки. Прикладом такої закономірності є динаміка купівельної спроможності непрацюючих пенсіонерів (рис. 1).

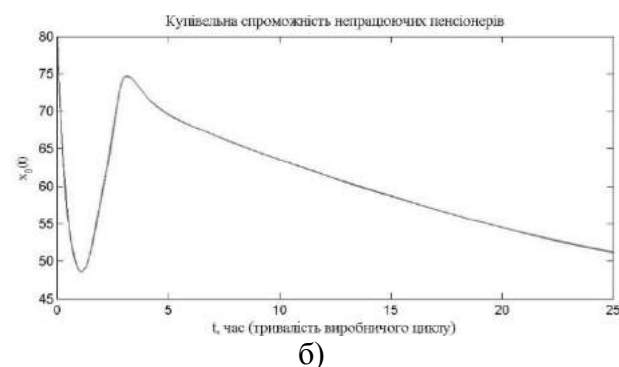


Рис. 1. Купівельна спроможність непрацюючих пенсіонерів

Досліджено також динаміку попиту на легальні товари та послуги для різних груп населення. В умовах зростання рівня тінізації економіки попит на легальні товари та послуги всіх груп населення, крім власників підприємств або підприємців, спочатку зростає до певного локального максимуму, який співпадає з точкою максимуму ціни агрегованого продукту, а далі

починає спадати до горизонтальної асимптоти. Цей рівень попиту на легальні товари встановлюється на рівні купівлі товарів другої категорії.

Типовим є графік динаміки попиту на легальну продукцію для працівників реального сектору (рис. 2).

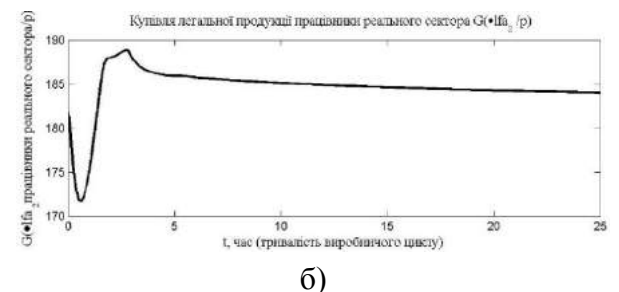
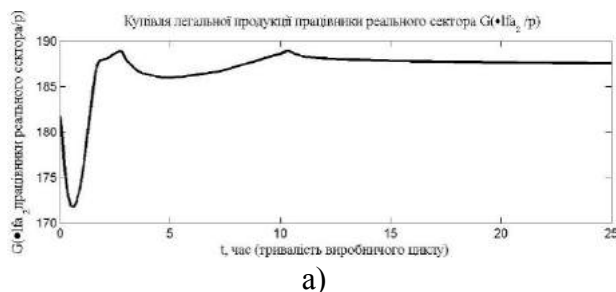


Рис. 2. Попит на легальну продукцію для працівників реального сектору

В умовах детінізації економіки динаміка попиту на легальну продукцію всіх груп населення при  $t \approx 10$  має характерну точку перегину, в якій попит починає знижуватись. Це відповідає точці, в якій уповільнюється зменшення частки тіньової економіки. З цього можна зробити висновок, що гальмування

зниження рівня тіньової економіки спричинює зниження попиту на легальну продукцію.

На базі отриманих розв'язків моделі, які знайдені на часовому періоді  $t \in [t_0, t_n]$ , де  $t_0$  – початковий період часу,  $t_n$  – кінцевий період часу, побудовано проекції фазових траєкторій на

площини  $(x_i, x_j)$  ( $i, j = \overline{1,10}$ ,  $i \neq j$ ). Ці проєкції пояснюють властивості знайдених розв'язків досліджуваної моделі взаємодії легальної та тіньової складових.

На рис. 3 показано графік проєкції фазової траєкторії моделі на площину  $(x_4, x_3)$

(заощадження працівників бюджетних організацій та власників підприємств). Цей графік ілюструє динаміку співвідношення заощаджень між двома учасниками ринку, які належать до різних за природою економічної активності груп населення. Кругочок на графіку визначає початкові умови експерименту.

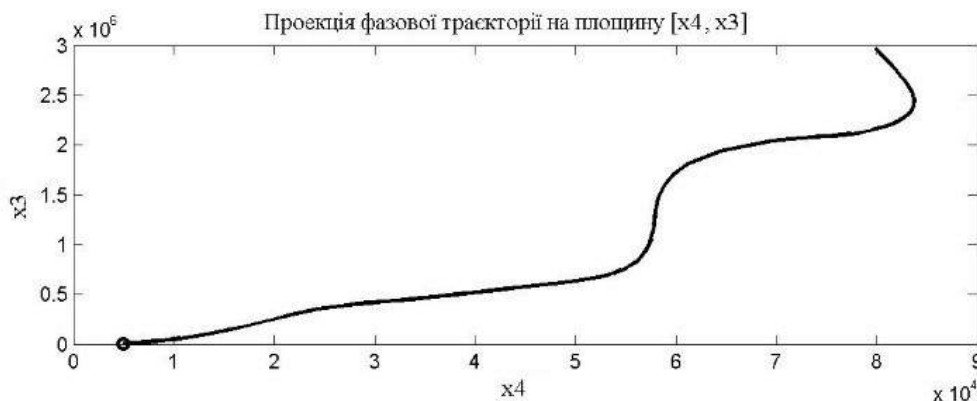
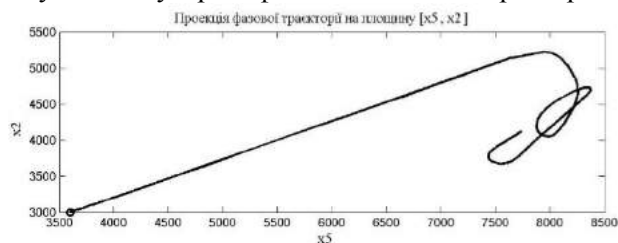


Рис. 3. Проєкція фазової траєкторії SL-моделі на площину  $(x_4, x_3)$

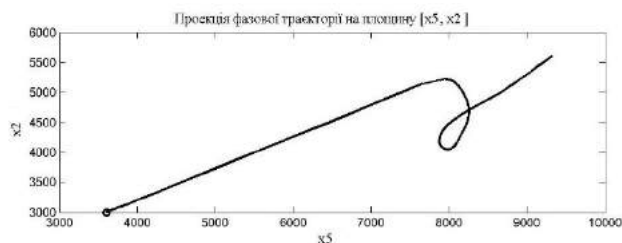
Графік показує кусково-лінійне зростання обох показників. Потрібно зауважити, що точка спершу переміщується вздовж однієї координати, а потім вздовж іншої. Це свідчить про черговість зміни заощаджень, то працівників бюджетних організацій, то власників підприємств, тобто коливання їхніх заощаджень відбувається у протифазі. Така зміна характерна

для груп, в яких фінансова спроможність значно відрізняється.

Цікавою є також проєкція розв'язку на площину  $(x_5, x_2)$ , що відображають заощадження пенсіонерів, які працюють у реальному секторі, та заощадження працівників реального сектору (рис. 4).



а)



б)

Рис. 4. Проєкція фазової траєкторії SL-моделі на площину  $(x_5, x_2)$

На цьому графіку в умовах детінізації економіки можна спостерігати дві «точки повороту», в яких починається коливання динамічних змінних. В одній з цих точок швидше починає спадати  $x_2(t)$ , а в іншій –  $x_5(t)$ . Однак після певного падіння заощаджень, вони знову починають зростати. Ці коливання відбуваються в певному діапазоні,

який можна вважати у деякому сенсі точкою рівноваги.

Проаналізуємо проєкції фазової траєкторії на площини, утворені динамічними змінними, що моделюють заощадження груп населення, які отримують доходи від держави, та часткою тіньової економіки  $\beta$ . Типова ілюстрація відображена на рис. 5.

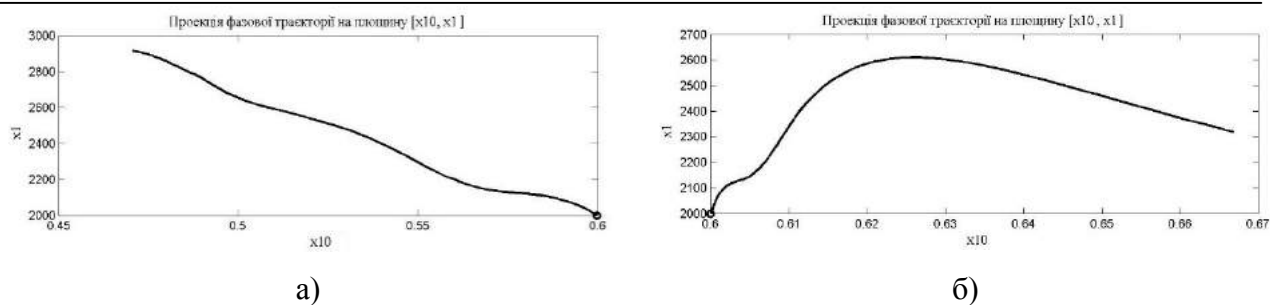


Рис. 5. Проекція фазової траєкторії SL-моделі на площину  $(\beta, x_1)$  (коефіцієнт  $\beta$  та заощадження пенсіонерів)

На рис. 5 відображено проекцію фазової траєкторії моделі на площину  $(\beta, x_1)$ , яка відображає заощадження пенсіонерів та коефіцієнт  $\beta$ . На рис. 5-а відображено проекцію у випадку детінізації економіки. Очевидно, що при зменшенні тіньової економіки доходи зростають, тобто спостерігається обернений зв'язок. У випадку зростання рівня тіньової економіки (рис. 5-б) спостерігається віддалення точок у початковий і кінцевий момент часу. Як впливає із графіку, збільшення частки тіньової економіки приносить короткостроковий ефект у вигляді збільшення заощаджень, однак в подальшому зростання тіньової економіки призводить до падіння рівня заощаджень.

Проаналізуємо фазові траєкторії на площини динамічних змінних, які моделюють ціну агрегованого продукту та заощадження різних

груп населення. У випадку ціни агрегованого продукту та заощаджень працівників реального сектора (рис. 6) спостерігається одночасне лінійне зростання обох показників та їх лінійне спадання. В умовах детінізації економіки можна спостерігати чотири точки повороту, в яких змінюється динаміка процесів. Між ціною агрегованого продукту та заощадженнями працівників реального сектора існує тісний зв'язок, оскільки зміна напряму траєкторії ціни призводить до зміни напряму руху заощаджень. Цей зв'язок можна пояснити залежністю ціни від виробництва продукції, яке забезпечують вище зазначені групи. Можливість власників підприємств збільшувати заробітну платню залежить від їх фінансових результатів, на які впливає ціна продукції. Дані коливання мають циклічний характер.

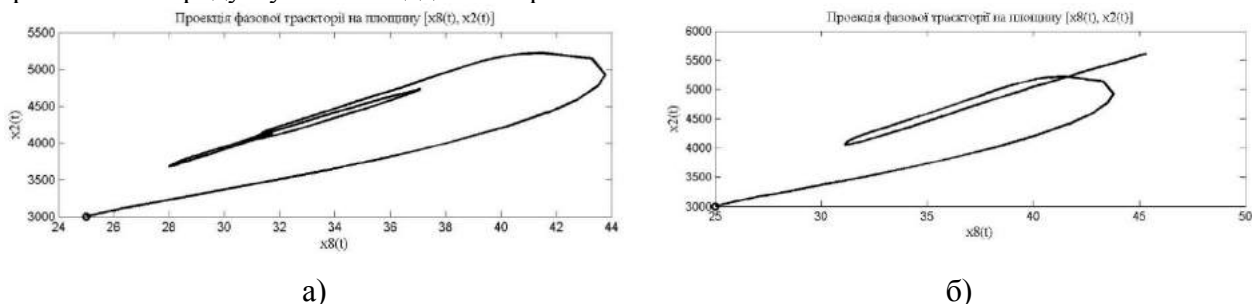


Рис. 6. Проекція фазової траєкторії моделі на площину  $(p, x_2)$  (ціна агрегованого продукту та заощадження працівників реального сектора)

Проекції фазової траєкторії на площини, утворені динамічними змінними, які моделюють ціну агрегованого продукту та заощаджень непрацюючих пенсіонерів, власників підприємств, працівників та пенсіонерів, що працюють в бюджетних організаціях, відображають схожі тенденції в умовах детінізації економіки (типова ілюстрація на рис. 7-а). На фоні коливань ціни рівень заощаджень даних соціальних груп відображає тенденцію до

поступового зростання. В умовах детінізації зростають фінансові можливості держави і вона має можливість забезпечити осіб, що залежать від бюджетної сфери, нівелюючи зростання ціни активною соціальною політикою. Так само можна спостерігати значно швидше зростання заощаджень в умовах, коли ціна на агрегований суспільний продукт має тенденцію до зменшення.

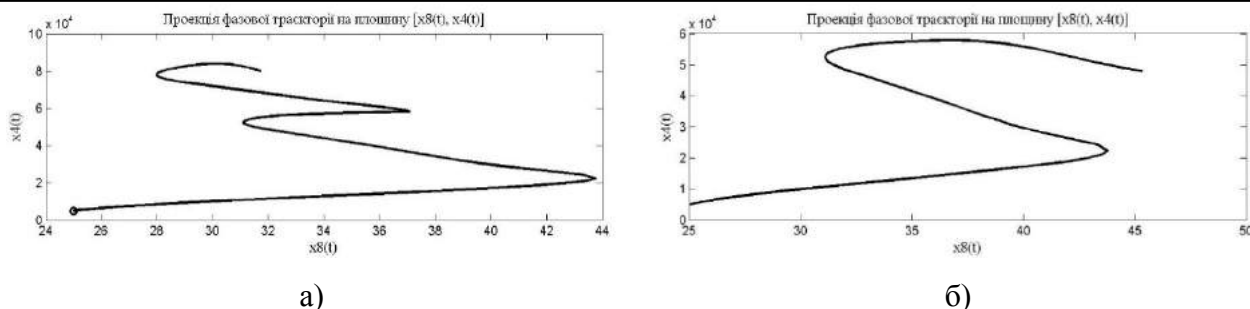


Рис. 7. Проекція фазової траєкторії моделі на площину  $(p, x_4)$  (ціна агрегованого продукту та заощадження працівників бюджетних організацій)

В умовах тінізації економіки для непрацюючих пенсіонерів, працівників бюджетних організацій та пенсіонерів, що працюють в бюджетних організаціях, спостерігається схожа тенденція і траєкторія має дві точки повороту (рис. 7-б). Спочатку в умовах зростання ціни заощадження розглянутих груп населення також незначно зростають, однак в умовах зменшення ціни доходи починають зростати швидше. Подальше зростання ціни призводить до падіння рівня заощаджень, що є небажаною тенденцією досліджуваної економіки.

На рис. 8-б відображено проекцію траєкторії розв'язків моделі на площини динамічних

змінних, які моделюють заощадження підприємців та ціну агрегованого продукту. Як випливає з рисунку після досить повільного зростання заощаджень в умовах значного підвищення ціни, далі заощадження і ціна знаходяться в протифазі. Після точки повороту ціна і заощадження підприємців починають зростати на відміну від ситуації, коли спостерігається детінізація економіки і заощадження чотирьох розглянутих вище груп мають тенденцію до зростання, в умовах тіньового ринку заощадження зростають тільки для власників підприємств, що підтверджує їх вигоду від тіньової економіки.

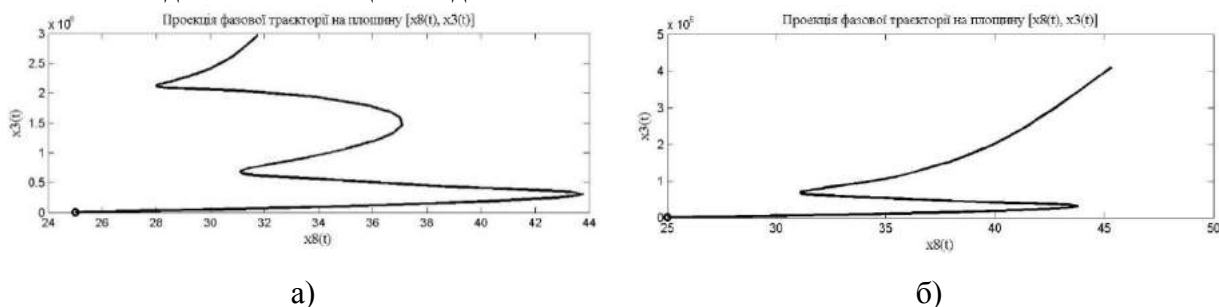


Рис. 8. Проекція фазової траєкторії SL-моделі на площину  $(p, x_3)$  (ціна агрегованого продукту та заощадження власників підприємств)

**Висновки.** Аналіз проекцій фазових траєкторій, утворених розв'язками моделі взаємодії легальної та тіньової економік, дозволяє дійти до висновку, що заощадження членів суспільства зі сталими доходами мають характерні точки, в яких траєкторії повертаються у зворотному напрямі. Це описує своєрідні «протилено-направлені» економічні процеси. Для членів різних суспільних груп такі «повороти» наступають в різні моменти часу.

На основі обчислювальних експериментів з комплексом моделей взаємодії легальної та тіньової складових соціально-економічної системи виявлено залежність розв'язків моделі

від її параметрів та встановлено закономірності впливу ряду факторів на динаміку процесів, що відбуваються у досліджуваній економіці, зокрема подолання тіньової економіки можливе. Для цього необхідно впровадити комплекс заходів, що враховують загальні макроекономічні тенденції взаємодії тіньового й легального секторів економіки, ефективно використати важелі ризику в припиненні тіньових явищ і сприятливій легалізації тіньових виробництв. Все це формує відповідні рекомендації щодо вдосконалення управління та державного регулювання економіки.

#### Список літератури

1. Буяк Л. М. Моделювання тіньової економічної діяльності в Україні / Л. М. Буяк, І. С. Вінничук // Науковий вісник Чернівецького національного університету : Збірник наук. праць. –

Чернівці : ЧНУ. – 2009. – Вип. 456. Економіка. – С. 130-138.

2. Вінничук І.С. Модель взаємодії легальної та тіньової економік з розширеною економічною

**АНАЛІЗ ПРОЕКЦІЙ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ РОЗВ'ЯЗКІВ МОДЕЛІ  
ВЗАЄМОДІЇ ТІНЬОВОЇ ТА ЛЕГАЛЬНОЇ ЕКОНОМІК**

структурою суспільства / І.С. Вінничук // Інноваційна економіка : Всеукраїнський науково-виробничий журнал. – Тернопіль. – № 12 (38). – 2012. – С. 54–58.

3. Вітлінський В.В., Коляда Ю.В. Аналітичне оцінювання динаміки ризику економічної еволюції з урахуванням корупції і тіньової економіки, *Вісник Запорізького національного університету : Економічні науки*, 2010 №1(5): 84 – 88.

4. Коляда Ю.В., Семашко К.А. Динаміка ризику співіснування легальної та тіньової економіки за допомогою площинної моделі нелінійної економічної динаміки, “*Молодий вчений*”, 2014. № 6 (9) : С. 145-147.

5. Alm, J., and Embaye, A. (2013) Using Dynamic Panel Methods to Estimate Shadow Economies Around the World, 1984–2006, *Public Finance Review*, 41(5): 510-543.

6. Elgin, C., Uras, B.R., Public debt, sovereign default risk and shadow economy, *Journal of Financial Stability*, 9 (4): 628–640.

7. Gomis-Porqueras, P., Peralta-Alva, A., Waller, C., (2014) The shadow economy as an equilibrium outcome, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 41: 1–19.

8. Gonzalez-Fernandez, M., and Gonzalez-Velasco, C. (2014) Shadow economy, corruption and public debt in Spain, *Journal of Policy Modeling*

9. Grygorkiv V., Vinnychuk I. Analysis of simulation experiments with shadow and legal economies interaction model // In Proceedings of the 4-th International Scientific Conference «Whither our economies – 2014», (Vilnius, Lithuania, 12 – 13 November 2014). – MykolasRomerisUniveristy, 2014. – P. 133-142. – [Electronic resource]. – Access mode : <http://woe.mruni.eu/wp-content/uploads/2013/06/Proceedings-edited1.pdf>. Назва з екрану (ISSN 2029-8501).

10. Svetunkov S. (2012) Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. – New York : Springer : 318 p.

11. Vinnychuk I., Ziukov S. Shadow economy in Ukraine // In Proceedings of the 3-rd International Scientific Conference «Practice and research in private and public sector», (Vilnius, Lithuania, 11 – 12 April 2013). – MykolasRomerisUniveristy, 2013. – P. 320-328. – [Electronic resource]. – Access mode : <http://prpps.mruni.eu/wp-content/uploads/2013/04/PRPPS-2013-PROCEEDINGS.pdf>. Назва з екрану (ISSN 2029-7378).

**Аннотація**

*Ігорь Винничук*

**АНАЛИЗ ПРОЕКЦИЙ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕНЕВОЙ И ЛЕГАЛЬНОЙ ЭКОНОМИК**

*В статье рассмотрена модель взаимодействия теневой и легальной экономик, которая позволяет определить динамику сбережений экономически активного населения и цены на агрегированный продукт. Имитационные эксперименты дают возможность исследовать факторы легализации теневой экономики.*

**Ключевые слова:** теневая экономика, экономическая структура общества, имитационное моделирование

**Summary**

*Igor Vinnychuk*

**ANALYSIS OF PHASE TRAJECTORIES PROJECTION OF SOLUTIONS OF LEGAL AND SHADOW  
ECONOMY INTERACTION MODEL**

*In the article a model of shadow and legal economies interaction is described. It allows to determine the dynamics of savings economically active population and the price of the aggregate product. Simulations make it possible to investigate the factors of the shadow economy legalization.*

**Keywords:** shadow economy, economic structure of society, simulation