УДК 517.91:532.2

©2011 р. О.М. Нікітіна

НТУ "ХПІ"

ЗАПРОВАДЖЕННЯ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера-Бесселя-Лежандра.

By a method delta - similar sequence (kernel of Dirikhle) on a segment $[0, R_3]$ arctic ax with two points of interface hybrid integral transformation is inculcated as Eylera- Besselya - Lezhandra.

Вступ

Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення розв'язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих в роботі [1]. Основи теорії ГІП закладено в роботі [2]. Дана стаття присвячена запровадженню одного із типів ГІП.

Мета статті

Побудувати гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера - Бесселя - Лежандра

Основні результати

Запровадимо методом дельта - подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2 = \{r : r \in (0, R_0) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\begin{aligned} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B^*_{\alpha_1} + \\ +\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} + \\ +\theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \Lambda_{(\mu)} \end{aligned} \qquad (1)$$

$\theta(x)-$ одинична функція Гевісайда [3], $a_j > 0, j = \overline{1, 3}$.

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Ейлера $B^*_{\alpha_1}$ [4], Бесселя B_{ν,α_2} [5] та Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$ [6]: $B^*_{\alpha_1} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_1^2$, $B_{\nu,\alpha_2} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha_2 + 1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu^2 - \alpha_2^2}{r^2}$, $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right)$, $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \ge \alpha_2 \ge -1/2$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$,$(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. За область визначення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r), g_2(r), g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2 ;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma g_1(r)] = 0,$$

$$\left(\alpha_{22}^3 d/dr + \beta_{22}^3\right) g_3(r)\,|_{r=R_3} = 0 \qquad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\begin{aligned} \Big[\left(\alpha_{j1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \\ - \left(\alpha_{j2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0, j, k = 1, 2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2}, \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{a_2^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{shR_2}\frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_1)\times$$
$$\times\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 shr$$

і скалярний добуток $u\in G$, $v\in G$

$$\begin{gathered}(u,v)=\int\limits_0^{R_3}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\\ \equiv\int\limits_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+\\ +\int\limits_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr+\\ +\int\limits_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shrdr\end{gathered}\tag{4}$$

Для $u\in G$ та $v\in G$ із умов спряження (3) випливає базова тотожність

$$\left(u_k(r)\frac{dv_k}{dr}-v_k(r)\frac{du_k}{dr}\right)\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}(u_{k+1}\times$$
$$\times(r)\frac{dv_{k+1}}{dr}-v_{k+1}(r)\frac{du_{k+1}}{dr})\Big|_{r=R_k},k=1,2\tag{5}$$

Наявність базової тотожності (5) з використанням властивостей функцій із G та структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ дають можливість переконатися в справедливості рівності

$$(M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[u],v)=(u,M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[v])\tag{6}$$

Рівність (6) означає, що ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ має на множині I_2 одну особливу точку $r=0$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральнй параметр $\beta\in(0,\infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^3\theta(r-R_j)\theta(R_j-r)\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta),R_0=0$$

Функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ знайдемо як розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера, Бесселя та Лежандра

$$(B^*_{\alpha_1}+b_1^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0,r\in(0,R_1),$$

$$(B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0,r\in(R_1,R_2),\tag{7}$$
$$(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0,r\in(R_2,R_3),$$

за однорідними крайовими умовами (2) та однорідними умовами спряження (3), $b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\geq0,j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}+b_1^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2)v=0$ утворюють функції Бесселя першого роду $v_1=J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)$ та 2-го роду $v_2=N_{\nu,\alpha_2}(b_2r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2)v=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $v_1=A^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr)$ та $v_2=B^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr)$ [6].

Припустимо, що

$$\begin{gathered}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+\\ +B_1r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r),r\in(0,R_1).\end{gathered}\tag{8}$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)+B_2N_{\nu,\alpha_2}(b_2r),$$
$$r\in(R_1,R_2),$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=A_3A^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr)+$$
$$+B_3B^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr),r\in(R_2,R_3).$$

Умови спряження (3) та крайова умова в точці $r=R_3$ для визначення величин $A_j,B_j(j=\overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$\begin{gathered}Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1-\\ -u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2\mathrm{R}_1)A_2-\\ -u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2\mathrm{R}_1)B_2=0,j=1,2.\\ u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2\mathrm{R}_2)A_2+u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2\mathrm{R}_2)B_2-\\ -Y^{(\mu);21}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR}_2)A_3-\\ -Y^{(\mu);22}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR}_2)B_3=0\end{gathered}\tag{9}$$

$$Y^{(\mu);31}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_3)B_3+Y^{(\mu);32}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_3)B_3=0$$

В системі (9) прийняті позначення:

$$Y^{m1}_{\alpha_1;j1}(\mathrm{b}_1,R_m)=[(\beta^m_{j1}-\alpha_1R_m^{-1}\alpha^m_{j1})\cos(b_1\ln R_m)-$$
$$-b_1(\beta)R_m^{-1}\alpha^m_{j1})\sin(b_1\ln R_m)]R_m^{-\alpha_1},m=0,1;$$

$$Y^{m2}_{\alpha_1;j1}(\mathrm{b}_1, R_m) = [(\beta^m_{j1} - \alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1})\sin(b_1 \ln R_m) + \alpha^m_{j1} b_1 R_m^{-1}\cos(b_1 \ln R_m)]R_m^{-\alpha_1},$$

$$u^{m1}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2\mathrm{R_m}) = (\tfrac{\nu-\alpha_2}{R_m}\alpha^m_{jk} + \beta^m_{jk})J_{\nu,\alpha_2}(b_2R_m) - \alpha^m_{jk}R_m b_2^2 J_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_2R_m),$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2\mathrm{R_m}) = (\tfrac{\nu-\alpha_2}{R_m}\alpha^m_{jk} + \beta^m_{jk})N_{\nu,\alpha_2}(b_2R_m) - \alpha^m_{jk}R_m b_2^2 N_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_2R_m), m = 1, 2;$$

$$Y^{(\mu);m1}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR_m}) = \left(\alpha^m_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j2}\right) A^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr)|_{r=R_m},$$

$$Y^{(\mu);m2}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR_m}) = \left(\alpha^m_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^m_{j2}\right) B^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(chr)|_{r=R_m}, m = 2, 3$$

Візьмемо $A_3 = -A_0 Y^{(\mu);32}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR_3})$, $B_3 = A_0 Y^{(\mu);31}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR_3})$, де A_0 підлягає вибору, і розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2 :

$$\begin{aligned} &u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2\mathrm{R}_2)A_2 + u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2\mathrm{R}_2)B_2 = \\ &= -A_0[Y^{(\mu);21}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR}_2)Y^{(\mu);32}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_2) - \\ &-Y^{(\mu);22}_{-1/2+ib_3;j2}(\mathrm{chR}_2)Y^{(\mu);31}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_3)] \equiv \\ &\equiv -A_0\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;j}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \end{aligned} \qquad (10)$$

Визначник алгебраїчної системи (10)

$$q_{\nu,\alpha_2}(\beta) = u^{21}_{\nu,\alpha_2;11}(b_2R_2)u^{22}_{\nu,\alpha_2;21}(b_2R_2) - u^{21}_{\nu,\alpha_2;21}(b_2R_2)u^{22}_{\nu,\alpha_2;11}(b_2R_2) = \tfrac{2}{\pi}\tfrac{c_{12}}{b_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}} \neq 0$$

Система (10) згідно правил Крамера [7] має єдиний розв'язок:

$$A_2 = -A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta)]^{-1}[\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;1}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \times u^{22}_{\nu,\alpha_2;21}(b_2\mathrm{R}_2) - \delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;2}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3)u^{22}_{\nu,\alpha_2;11}(b_2\mathrm{R}_2)]$$

$$B_2 = A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta)]^{-1}[\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;1}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \times u^{21}_{\nu,\alpha_2;21}(b_2\mathrm{R}_2) - \delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;2}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3)u^{21}_{\nu,\alpha_2;11}(b_2\mathrm{R}_2)] \qquad (11)$$

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_1, B_1 :

$$\begin{aligned} &Y^{11}_{\alpha_1;j1}(\mathrm{b}_1, R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(\mathrm{b}_1, R_1)B_1 = \\ &= A_0[q_{\nu,\alpha_2}(\beta)]^{-1}a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;j}(\beta), j = 1, 2 \end{aligned} \qquad (12)$$

В системі (12) прийняті позначення

$$\delta_{\nu,\alpha_2;jk}(b_2R_1, b_2R_2) = u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1) \times u^{22}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2) - u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)u^{21}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2), \quad j, k = 1, 2;$$

$$a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;j}(\beta) = \delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;2}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \times \delta_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_1, b_2R_2) - \delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;1}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3)\delta_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1, b_2R_2),$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{\alpha_1}(\beta) = Y^{11}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - Y^{11}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1)Y^{12}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1) = \tfrac{c_{11}b_1(\beta)}{R_1^{2\alpha_1+1}} \neq 0$$

При $A_0 = q_{\nu,\alpha_2}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta)$ із системи (12) маємо:

$$A_1 = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta), \quad B_1 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta),$$

$$\begin{aligned} &\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1, R_1) - \\ &-a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1, R_1), j = 1, 2; \end{aligned} \qquad (13)$$

Підставивши визначені за формулами (11) A_2 та B_2 й за формулами (13) A_3 та B_3 в рівності (8), одержуємо функції:

$$\begin{aligned} &V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r), \\ &V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r, \beta) = q_{\alpha_1}[\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;1}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \times \psi^2_{\nu,\alpha_2;21}(\mathrm{b_2R_2, b_2r}) - \delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_3;2}(\mathrm{chR}_2, \mathrm{chR}_3) \times \psi^2_{\nu,\alpha_2;11}(\mathrm{b_2R_2, b_2r})]; \\ &\psi^2_{\nu,\alpha_2;j1} = u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)N_{\nu,\alpha_2}(b_2r) - u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)J_{\nu,\alpha_2}(b_2r); \\ &V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r, \beta) = q_{\nu,\alpha_2}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta) \times [Y^{(\mu);31}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_3)B^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(\mathrm{ch}r) - Y^{(\mu);32}_{-1/2+ib_3;22}(\mathrm{chR}_3)A^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(\mathrm{ch}r)]. \end{aligned} \qquad (14)$$

Наявність спектральної функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}([\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$ дає можливість визначити пряме $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ й обернене $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО

$M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ [2]:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)] = \int\limits_0^{R_3} g(r)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{15}$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \tag{16}$$

$g(r)$ – будь-яка функція із G – області визначення ГДО.

Математичним обгрунтуванням правил (15),(16) є твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r)r^{\alpha_1 - 1/2} + \\ +r^{\alpha_2+1/2}\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) + \\ +\theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sqrt{shr}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0, R_3)$, *то для будь-якого* $r \in I_2$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\int\limits_0^{R_3} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta)\times \\ \sigma(\rho)d\rho \times \Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta \tag{17}$$

Доведення. Функції $V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$,задовольняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера:

$$[a_1^2 B_{\alpha_1}^* + (\lambda^2 + k_1^2)]V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda) = 0,$$

$$[a_1^2 B_{\alpha_1}^* + (\beta^2 + k_1^2)]V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $r^{2\alpha_1 - 1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_1 - 1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)r^{2\alpha_1 - 1} = \frac{a_1^2}{\beta^2 - \lambda^2}\times$$
$$\times\frac{d}{dr}[r^{2\alpha_1+1}(V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda)}{dr} -$$
$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}]. \tag{18}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$,задовольняють відповідно диференціальні рівняння Бесселя:

$$[a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} + (\lambda^2 + k_2^2)]V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda) = 0,$$

$$[a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} + (\beta^2 + k_2^2)]V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $r^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)$, а друге - на $r^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)r^{2\alpha_2+1} = \frac{a_2^2}{\beta^2 - \lambda^2}\times$$
$$\times\frac{d}{dr}[r^{2\alpha_2+1}(V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda)}{dr} -$$
$$-V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}] \tag{19}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Лежандра:

$$[a_3^2 \Lambda_{(\mu)} + (\lambda^2 + k_3^2)]V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda) = 0,$$

$$[a_3^2 \Lambda_{(\mu)} + (\beta^2 + k_3^2)]V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $shrV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)$, а друге - на $shrV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)shr = \frac{a_3^2}{\beta^2 - \lambda^2}\times$$
$$\times\frac{d}{dr}[shr(V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda)}{dr} -$$
$$-V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\lambda)\tfrac{dV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}] \tag{20}$$

Помножимо рівність (18) на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо по r від $r = \varepsilon > 0$ до $r = R_1$; помножимо рівність (19) на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо по r від $r = R_1$ до $r = R_2$; помножимо рівність (20) на $\sigma_3 dr$ й проінтегруємо по

r від $r = R_2$ до $r = R_3$. Якщо одержані результати додати, то в силу крайової умови в точці $r = R_3$., базової тотожності в точках $r = R_1$ та $r = R_2$ і виразів $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будемо мати рівність:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R_3} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = -\frac{\varepsilon^{2\alpha_1+1}}{\beta^2-\lambda^2}\times$$
$$\times[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)-$$
$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)] \qquad (21)$$

Для довільних додатних c та $d(c < d)$ і довільної скінченної функції $\psi(\lambda)$, визначеної на сегменті $[c, d]$, знайдемо величину подвійного невласного інтеграла

$$J = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R_3}\int\limits_c^d \psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{2}{\pi}\int\limits_\varepsilon^{R_3}\int\limits_c^d \psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{2}{\pi}\int\limits_c^d(\int\limits_\varepsilon^{R_3} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr)\times$$
$$\times\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda \qquad (22)$$

В силу рівності (21) подвійний інтеграл (22) набуває вигляду:

$$J=\lim_{\varepsilon\to0}\tfrac{2}{\pi}\int\limits_c^d\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}\tfrac{\varepsilon^{2\alpha_1+1}}{\beta^2-\lambda^2}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\varepsilon,\beta)\times$$
$$\times V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\varepsilon,\lambda)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)]d\lambda \qquad (23)$$

Введемо до розгляду функції:

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)-$$
$$-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)$$
$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)-$$
$$-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)$$
$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)+$$
$$+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)$$
$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)+$$
$$+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)\times$$
$$\times V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)=\frac{1}{2\varepsilon^{2\alpha_1+1}}[G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)z^-\times$$
$$\times\sin(\overset{+}{z}\ln\varepsilon)+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)z^+\cos(\bar{z}\ln\varepsilon)+$$
$$+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)z^-\cos(z^+\ln\varepsilon)+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)z^+\times$$
$$\times\sin(z^-\ln\varepsilon)] \qquad (24)$$

Невласний інтеграл (23) перепишемо в такому вигляді:

$$J=-\lim_{\varepsilon\to0}\tfrac{1}{\pi}\int\limits_c^d\tfrac{1}{a_1^2}\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)[G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)\times$$
$$\times\frac{\sin(\overset{+}{z}\ln\varepsilon)}{b_1(\beta)+b_1(\lambda)}+\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{b_1(\beta)-b_1(\lambda)}\cos(\bar{z}\ln\varepsilon)+$$
$$+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)\frac{\cos(\overset{+}{z}\ln\varepsilon)}{b_1(\beta)+b_1(\lambda)}+ \qquad (25)$$
$$+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\frac{\sin[(b_1(\beta)-b_1(\lambda))\ln\varepsilon]}{b_1(\beta)-b_1(\lambda)}]d\lambda.$$

Покладемо $A = [-\ln\varepsilon] = \ln(\varepsilon^{-1})$. Тоді при $\varepsilon\to0$ величина $A\to\infty$. Інтеграл J зобразимо у вигляді чотирьох доданків:

$$I=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi a_1^2}\int\limits_c^d\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{b_1(\beta)+b_1(\lambda)}\times$$
$$\times\sin[(b_1(\beta)+b_1(\lambda))A]d\lambda+$$
$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi a_1^2}\int\limits_c^d\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\times$$
$$\times\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{b_1(\beta)-b_1(\lambda)}\cos[(b_1(\beta)-b_1(\lambda))A]d\lambda+$$
$$+\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi a_1^2}\int\limits_c^d\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{b_1(\beta)+b_1(\lambda)}\times$$

$$\times\cos[(b_1(\beta)+b_1(\lambda))A]d\lambda+$$

$$+\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d a_1^{-2}\psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\frac{\sin[(b_1(\beta)-b_1(\lambda))A]}{b_1(\beta)-b_1(\lambda)}d\lambda\equiv$$

$$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (26)$$

В силу леми Рімана [8]

$$\lim_{A\to\infty} I_m=0, m=\overline{1,3} \qquad (27)$$

В силу леми Діріхле [8]

$$\lim_{A\to\infty} I_4=\begin{cases}\psi(\beta), & \text{якщо} \quad \lambda=\beta\in[c,d]\\ 0, & \text{якщо} \quad \lambda=\beta\overline{\in}[c,d]\end{cases} \qquad (28)$$

Отже, внаслідок рівностей (27), (28) одержуємо, що

$$J=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{R_3}\int\limits_c^d\psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta), \qquad (29)$$

якщо $\beta=\lambda\in[c,d]$. Якщо ж $\lambda=\beta\overline{\in}[c,d]$, то $J=0$.

Якщо функція $\psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то невласний подвійний інтеграл

$$J=\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{R_3}\int\limits_0^{\infty}\psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta), \qquad (30)$$

якщо $\lambda=\beta\in[0,\infty]$. Якщо $\lambda=\beta\overline{\in}[0,\infty]$, то $J=0$.

Припустимо, що функція

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \qquad (31)$$

Помножимо рівність (31) на вираз $\sigma(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)dr$, де $\lambda-$ довільне додатне число, й проінтегруємо по r від $r=0$ до $r=R_3$. В силу рівності (30) маємо:

$$\int\limits_0^{R_3} g(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\psi(\lambda).$$

Підставивши функцію

$$\psi(\beta)=\int\limits_0^{R_3} g(\rho)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

в рівність (31), приходимо до інтегрального зображення (17). Доведення теореми завершено.

Зауваження: Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то зліва в рівності (17) замість $g(r)$ буде $\frac{1}{2}[g(r+0)+g(r-0)]$.

Побудова алгебри ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ здійснюється на основі основної тотожності ГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r)=\{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)];B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2*, а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови*

$$\lim_{r\to 0}[r^{2\alpha_1+1}(\tfrac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\tfrac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr})]=0,$$
$$(\alpha^3_{22}d/dr+\beta^3_{22})g_3(r)|_{r=R_3}=g_R \qquad (32)$$

та умови спряження

$$[(\alpha^k_{j1}d/dr+\beta^k_{j1})g_k(r)-(\alpha^k_{j2}d/dr+\beta^k_{j2})\times$$
$$\times g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=\omega_{jk}; j,k=1,2, \qquad (33)$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$*:*

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde g(\beta)-$$
$$-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde g_j(\beta)+\sigma_3a_3^2shR_3V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)\times$$

$$\times(\alpha^3_{22})^{-1}g_R+\sum_{k=1}^{2}h_k[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-$$

$$-Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (34)$$

У рівності (34) прийняті позначення:

$$\tilde g_1(\beta)=\int\limits_0^{R_1} g_1(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)r^{2\alpha_1-1}\sigma_1dr, \tilde g_2(\beta)=$$
$$=\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)r^{2\alpha_2+1}\sigma_2dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta)=\int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 shr dr, h_1(\beta)= = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}, h_2(\beta)=a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}c_{12}^{-1},$$

$$Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)=(\alpha^k_{i1}d/dr+\beta^k_{i1})V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}.$$

Доведення. Згідно правила (15)

$$R\equiv H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]]=$$

$$=\int\limits_0^{R_3} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$

$$=\int\limits_0^{R_1}(a_1^2 B^*_{\alpha_1}[g_1(r)])V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+ +\int\limits_{R_1}^{R_2}(a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)])V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3}(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)])V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 shr dr \quad (35)$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами:

$$R=\int\limits_0^{R_1} g_1(r)(a_1^2 B^*_{\alpha_1}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)])\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)(a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)])\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r)(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)])\sigma_3 shr dr+$$

$$+a_1^2\sigma_1[r^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-$$

$$-g_1(r)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr})]\Big|_0^{R_1}+a_2^2\sigma_2[r^{2\alpha_2+1}(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)- \quad (36)$$

$$-g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr})]\Big|_{R_1}^{R_2}+a_3^2\sigma_3\times$$

$$\times[shr(g_3'(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3})]\Big|_{R_2}^{R_3}$$

Скористаємось базовою тотожністю для випадку, коли умови спряження неоднорідні:

$$[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)\frac{dg_k}{dr}-g_k(r)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}]\,|_{r=R_k}=$$

$$=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\frac{dg_{k+1}}{dr}-$$

$$-g_{k+1}(r)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}]\Big|_{r=R_k}+$$

$$+\frac{1}{c_{1k}}[Z^{(\mu);k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu);k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \quad (37)$$

В силу структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ та рівності (37) при $k=1,2$ маємо в точках $r=R_1$ та $r=R_2$:

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}-g_1\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr})\Big|_{r=R_1}-$$

$$-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}-g_2\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr})\Big|_{r=R_1}=$$

$$=(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1})\times$$

$$\times(g_2'(R_1)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)-g_2(R_1)\times$$

$$\times V^{(\mu)\prime}_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta))+h_1(Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-$$

$$-Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11})=(R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-$$

$$-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_2+1})\times$$

$$\times(g_2'(R_1)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)-g_2(R_1)V^{(\mu),\prime}_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta))+$$

$$+h_1(Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11})=$$

$$=0\times(g_2'V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta))\,|_{r=R_1}+$$

$$+h_1(Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11})=$$

$$=h_1(Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu);1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11});$$

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}(g_2'(R_2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)-g_2(R_2)\times$$

$$\times V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta))-a_3^2\sigma_3 shR_2(g_3'(R_2)\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)-g_3(R_2)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta))=$$

$$(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3 shR_2)(g_3'(R_2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)-$$

$$-g_3(R_2)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta))+a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}c_{12}^{-1}\times$$

$$\times(Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12})=$$

$$=(\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1}-$$

$$-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{shR_2}shR_2)\times$$

$$\times(g_3'(R_2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)-g_3(R_2)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta))$$

$$+h_2(Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12})=$$

$$=0\times(g_3'(R_2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)-g_3(R_2)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta))+$$

$$+h_2(Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12})=$$

$$=h_2(Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu);2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12});\quad(39)$$

При $\alpha^3_{22}\neq 0$ одержуємо:

$$a_3^2\sigma_3 shR_3(g_3'(R_3)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)-$$

$$-g_3(R_3)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta))=$$

$$=a_3^2\sigma_3 shR_3[\frac{1}{\alpha^3_{22}}(\alpha^3_{22}g'(R_3)+\beta^3_{22}g(R_3))\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)-\frac{\beta^3_{22}}{\alpha^3_{22}}g(R_3)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)-$$

$$-g_3(R_3)V^{(\mu)/}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)]=a_3^2\sigma_3 shR_3(\alpha^3_{22})^{-1}\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)[(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22})g_3(r)]\,|_{r=R_3}-$$

$$-a_3^2\sigma_3 shR_3(\alpha^3_{22})^{-1}g(R_3)[(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22})\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)\,|_{r=R_3}]=a_3^2\sigma_3 shR_3(\alpha^3_{22})^{-1}\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R+[-a_3^2\sigma_3 shR_3(\alpha^3_{22})^{-1}g(R_3)]\times 0=$$

$$a_3^2\sigma_3 shR_3(\alpha^3_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R\qquad(40)$$

В силу диференціальних тотожностей

$$(a_1^2B^*_{\alpha_1}+b_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\equiv 0,$$

$$(a_2^2B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0,$$

$$(a_3^2\Lambda_{(\mu)}+b_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0,$$

маємо рівності

$$a_1^2B^*_{\alpha_1}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_1^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta);$$

$$a_2^2B_{\nu,\alpha_2}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta);$$

$$a_3^2\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta);\quad(41)$$

Якщо тепер в (36) підставити (38)-(41) та роз'єднати інтеграли на суму двох доданків, то матимемо основну тотожність (34).

Логічну схему застосування запровадженого формулами (15), (16) ГІП покажемо на одній із типових задач математичної фізики.

Задача теплопровідності. Побудувати обмежений в області

$$D=\{(t,r):t\in(0,\infty);r\in I_2\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B^*_{\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r),r\in(0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=f_2(t,r),r\in(R_1,R_2),\quad(42)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\Lambda_{(\mu)}[u_3]=f_3(t,r),r\in(R_2,R_3)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),r\in(R_{j-1},R_j),R_0=0,\quad(43)$$

$j=\overline{1,3}$, умовами спряження

$$\begin{array}{l}[(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1})u_k(t,r)-(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\\ +\beta^k_{j2})u_{k+1}(t,r)]|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t),j,k=1,2\end{array},\quad(44)$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial u_1}{\partial r}=0,$$

$$\left(\alpha^3_{22}d/dr+\beta^3_{22}\right)u_3(t,r)\,|_{r=R_3}=g_R(t)\quad(45)$$

Розв'язання. Запишемо систему (42) й початкові умови (43) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B^*_{\alpha_1})u_1(t,r)\\(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2})u_2(t,r)\\(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2\Lambda_{(\mu)})u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\f_2(t,r)\\f_3(t,r)\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\u_2(t,r)\\u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\g_2(r)\\g_3(r)\end{bmatrix}\quad(46)$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (15) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[...] = [\int\limits_0^{R_1} ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr$$
$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \dots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr$$
$$\int\limits_{R_2}^{R_3} \dots V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 shrdr] \tag{47}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (47) до задачі (46) за правилом множення матриць. В силу тотожності (34) отримаємо задачу Коші [4]:

$$\sum_{j=1}^{3}(\tfrac{d}{dt}+\gamma_j^2+k_j^2+\beta^2)\tilde{u}_j(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2} h_k(Z^{(\mu);k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t) - Z^{(\mu);k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}(t))+$$
$$+a_3^2\sigma_3(\alpha_{22}^3)^{-1}shR_3V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R(t) \equiv \tilde{F}(t,\beta) \tag{48}$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\,|_{t=0} = \sum_{j=1}^{3}\tilde{u}_j(t,\beta)\,|_{t=0} = \tilde{g}(\beta) \equiv \sum_{j=1}^{3}\tilde{g}_j(\beta) \tag{49}$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_3^2$. Покладемо всюди $k_1^2 = \gamma_3^2-\gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = \gamma_3^2-\gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = 0$.

Задача Коші (48), (49) набуває вигляду:

$$(\frac{d}{dt}+\beta^2+\gamma_3^2)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \tilde{u}(t,\beta)\,|_{t=0} = \tilde{g}(\beta) \tag{50}$$

Розв'язком задачі Коші (50) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\gamma_3^2)t}\tilde{g}(\beta)+$$
$$+\int\limits_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_3^2)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau \tag{51}$$

Інтегральний оператор $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (16) як обернений до (47) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[...] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix} \tag{52}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (52) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (51). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (42) – (45):

$$u_j(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(t,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta =$$
$$= \sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{m-1}}^{R_m} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jm}(t-\tau,r,\rho)[f_j(\tau,\rho)+$$
$$+\delta_+(\tau)g_j(\rho)]\varphi_m(\rho)\sigma_m d\rho d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{2} h_k\int\limits_0^t [R^{(\mu)k\mathrm{j}}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$
$$-R^{(\mu)k\mathrm{j}}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau, \varphi_1(r) =$$
$$= r^{2\alpha_1-1}, \varphi_2(r) = r^{2\alpha_2+1}, \varphi_3(r) = shr, j=\overline{1,3}, \tag{53}$$

$\delta_+(\tau)-$ дельта -функція, зосереджена в точці $\tau = 0+$ [3].

У рівностях (53) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_3^2)t}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta; j=\overline{1,3}, \tag{54}$$

породжені неоднорідністю системи (початкових умов);

2) функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_3^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_3 a_3^2(\alpha_{22}^3)^{-1} shR_3, \tag{55}$$

породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$;

3) функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k\mathrm{j}}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_3^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\times$$
$$\times Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k\mathrm{j}}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta, \tag{56}$$

$i = 1, 2$ $k = 1, 2,$ $j = \overline{1, 3},$
породжені неоднорідністю умов спряження.

За наведеною логічною схемою розв'язання задачі теплопровідності одержуються інтегральні зображення розв'язків відповідних задач статики та динаміки.

Висновки

В даній роботі запроваджено поліпараметричну сім'ю гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера - Бесселя - Лежандра на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі з двома точками спряження. Логічна схема застосування запровадженого ГІП показана на типовій задачі теплопровідності. Одержане ГІП поповнює сім'ю гібридних інтегральних перетворень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93 - 106.

2. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.

3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

5. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

6. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735с.