УДК 517.956

О.В. Пелюшкевич

Львівський національний університет імені Івана Франка

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

За допомогою методів характеристик і стискуючих відображень встановлено існування і єдиність глобального узагальненого неперервного розв'язку мішаної задачі для гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку з горизонтальними характеристиками .

Applying the methods of characteristics and contractive mappings, the existence and uniqueness of global generalized continuous solution of mixed problem for hyperbolic system of the first order semilinear equations with horizontal characteristics are established.

Вступ. Якщо матрицю A в системі

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}=b(x,t,u), \qquad (1)$$

($u,\ b$ – m - вимірні вектори) можна звести до діагонального вигляду, а її власні значення $\lambda_i(x,t,u)$ - дійсні в області змінних x,t,u, то систему (1) називають гіперболічною [1].

Шляхом введення нових невідомих функцій цю систему можна, в окремих випадках, привести до вигляду [2]-[3]

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\Lambda(x,t,z)\frac{\partial z}{\partial x}=F(x,t,z),\qquad \Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_m), \qquad (2)$$

або завжди – до системи

$$G(x,t,u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=R(x,t,u), \qquad (3)$$

де G – матриця лівих власних векторів матриці A. Системи (2) і (43) називають, відповідно, канонічними формами Рімана та Шаудера [1].

Проте, за додаткових припущень, які сформульовані в [1, 4], систему (43) все ж таки можна представити у вигляді (2). Цей метод називають методом зведення (1) до продовженої системи , який дозволяє (43) записати у вигляді

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial t}+\Lambda\dfrac{\partial P}{\partial x}=\Omega(x,t,u,P,Q),\\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}+\Lambda\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\Psi(x,t,u,P,Q),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=G^{-1}Q,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=G^{-1}P,\end{cases} \qquad (4)$$

де $p=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ q=\dfrac{\partial u}{\partial t},\ P=Gp,\ Q=Gq.$

Зазначимо, що для останніх двох рівнянь системи (4) одержуємо сім'ю ортогональних характеристик, "незручність" яких проявляється в разі формулювання початково-крайових умов [1, 5]. Однак, гіперболічні системи, в яких частина рівнянь має горизонтальні або вертикальні характеристики виникають також і в деяких фізичних задачах [5]-[10].

Тому в цій праці розглянуто глобальну розв'язність одного варіанту мішаної задачі для гіперболічної системи напівлінійних рівнянь з горизонтальними характеристиками. Існування і єдиність узагальненого глобального розв'язку побудовано на використанні спеціальних вагових норм [11]-[12].

1. Постановка задачі. В області $G=\{(x,t)\ :\ 0<t<T,\ -kt<x<kt+l\}$, $T,\ k,\ l$ - додатні сталі, розглядаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}&=f(x,t,u,v),\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=g(x,t,u,v),\end{aligned} \qquad (5)$$

де $u=(u_1,...,u_m)$, $v=(v_1,...,v_n)$, $f=(f_1,...,f_m)$, $g=(g_1,...,g_n)$, $\Lambda(x,t)=diag(\lambda_1(x,t),...,\lambda_m(x,t))$.

Для системи (5) задамо початкові

$$u(x,0)=q(x),\ 0\le x\le l \qquad (6)$$

та крайові умови при $0\le t\le T$:

$$u_i(-kt,t)=\gamma_i^0\big(t,u(-kt,t)\big),\quad i\in I_0,$$
$$u_i(l+kt,t)=\gamma_i^l\big(t,(u(l+kt,t)\big),\ i\in I_l, \qquad (7)$$

$$v(-kt,t)=\psi\Big(t,u(-kt,t)\Big),\ \Big(\psi=(\psi_1,...,\psi_n)\Big), \quad (8)$$

де I_0, I_l – множини індексів:

$$I_0 = \{i \in \{1,\dots,m\} : \lambda_i(-kt,t) > -k\},$$
$$I_l = \{i \in \{1,\dots,m\} : \lambda_i(l+kt,t) < k\}.$$

Нехай множини I_0, I_l містять відповідно r_0, r_l елементів. Будемо вважати, що функції γ_i^0, ψ_j – не залежать від u_i при $i \in I_0$ і γ_i^l – не залежать від u_i при $i \in I_l$ і має місце умова

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(l+kt,t)-k) \neq 0,$$
$$t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,m\}.$$

Крім того всі задані функції $f : \overline{G}\times\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, $g : \overline{G}\times\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda_i : \overline{G} \to \mathbb{R}^m$, $q : [0,l] \to \mathbb{R}^n, \gamma^0 : [0,T]\times\mathbb{R}^{r_l} \to \mathbb{R}^{r_0}, \gamma^l : [0,T]\times\mathbb{R}^{r_0} \to \mathbb{R}^{r_l}, \psi : [0,T]\times\mathbb{R}^{r_l} \to \mathbb{R}^n$ – неперервні, а функції λ_i – задовольняють умову Ліпшиця за змінною x.

2. Поняття узагальненого розв'язку задачі. Позначимо через $\varphi_i(t;x_0,t_0)$, $i \in \{1,\dots,m\}$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t), \ \ x(t_0) = x_0$$

і назвемо їх характеристиками системи (5). Для зручності введемо позначення $\varphi_i(t) := \varphi_i(t;x_0,t_0)$. Зауважимо, що дана система має також горизонтальні характеристики вигляду $t = t_0$. Через $\chi_i(x_0,t_0)$ позначимо найменше t, для якого в $\overline{G}$ визначений розв'язок $x = \varphi_i(t;x_0,t_0)$.

Уведемо області:

$$G_q^i = \{(x,t) \in G : \ \chi_i(x,t) = 0\},$$
$$i \in \{1,\dots,m\},$$
$$G_0^i = \{(x,t) \in G : \ \chi_i(x,t) > 0,$$
$$\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = -k\chi_i(x,t)\}, i \in I_0,$$
$$G_l^i = \{(x,t) \in G : \ \chi_i(x,t) > 0,$$
$$\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = l + k\chi_i(x,t)\}, i \in I_l.$$

За допомогою інтегрування вздовж характеристик зведемо задачу (5)-(8) до системи інтегро-операторних рівнянь [12]:

$$u_i(x,t) = F_i[w](x,t) + \\ + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau),\tau,u(\varphi_i(\tau),\tau),v(\varphi_i(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad (9)$$

$$i \in \{1,\dots,m\},$$

$$v_j(x,t) = \psi_j\big(t,u(-kt,t)\big) + \\ + \int\limits_{-kt}^{x} g_j\Big(y,t,u(y,t),v(y,t)\Big)dy, \quad (10)$$

$$j \in \{1,\dots,n\},$$

де

$$F_i[w](x,t) = \\ = \begin{cases} q_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big), & (x,t) \in G_q^i, \\ \gamma_i^0\big(\chi_i(x,t), u(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\big), & (x,t) \in G_0^i, \\ \gamma_i^l\big(\chi_i(x,t), u(l+k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\big), & (x,t) \in G_l^i. \end{cases} \quad (11)$$

Означення. *Узагальненим неперервним розв'язком задачі* (5)-(8)*, будемо називати пару функцій* (u,v) *, компоненти яких належать простору* $C(\overline{G})$ *і задовольняють системи інтегро-операторних рівнянь* (9)-(10).

3. Основний результат.

Теорема. *Нехай виконуються такі умови:*

1) λ, f, g, q, ψ, γ^1, γ^2 є неперервними функціями на відповідних множинах;
2) компоненти функції λ є ліпшицевими на множині $\overline{G}$ за змінною x;
3) компоненти функцій f, g, та ψ, γ^1, γ^2 є ліпшицевими за змінними u, v та змінною u, відповідно, на своїх множинах визначення;
4) правильне співвідношення

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(l+kt,t)-k) \neq 0,$$
$$t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,m\};$$

5) (умови погодження)

$$q_i(0) = \gamma_i^0\left(0, q(0)\right), \quad i \in I_0,$$
$$q_i(l) = \gamma_i^l\left(0, q(l)\right), \quad i \in I_l.$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (5)-(8) у $\overline{G}$.

Доведення.

Розглянемо метричний простір $\mathcal{Q}$, елементами якого є пари неперервних функцій $w = (u, v)$ з компонентами із $\mathrm{C}(\overline{G})$, причому $u_i(0,0) = q_i(0)$, $i \in I_0$ та $u_i(l, 0) = q_i(l)$, $i \in I_l$. Визначимо метрику наступним чином

$$\rho(w^1, w^2) =$$
$$= \max\left\{\max_{i,x,t} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|\alpha_i(x,t)e^{-at},\right.$$
$$\left.\max_{i,x,t} |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)|\beta_i(x,t)e^{-at}\right\}, \quad (12)$$

де сталу $a > 0$ і неперервні додатні функції α_i, β_i підберемо пізніше.

На елементах простору $\mathcal{Q}$ введемо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$, який діє за формулою $\mathcal{A}[w] = (\mathcal{A}^1[u,v], \mathcal{A}^2[u,v])$, де оператори $\mathcal{A}^1$ і $\mathcal{A}^2$ визначені, відповідно, правими частинами рівностей (9),(10), тобто

$$\mathcal{A}_i^1[w](x,t) = F_i[w](x,t) +$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u(\varphi_i(\tau), \tau), v(\varphi_i(\tau), \tau)\Big) d\tau,$$
$$i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\mathcal{A}_i^2[w](x,t) = \psi_i\big(t, u(-kt, t)\big) +$$
$$+ \int\limits_{-kt}^{x} g_j\Big(y, t, u(y,t), v(y,t)\Big) dy, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Отже, відшукання узагальненого неперервного розв'язку задачі (5)-(8) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$. Застосовуючи теорему Банаха про стискуюче відображення, встановимо існування і єдиність нерухомої точки оператора. Зауважимо, що оператор $\mathcal{A}$ перводить неперервні функції в неперервні. Це випливає з відомих теорем математичного аналізу, а також із неперервності всіх функцій $\varphi_i(\tau; x, t)$.

Через L позначимо спільну сталу в умові Ліпшиця для функцій f, g, ψ, γ^0, γ^l , яку запишемо, наприклад, так:

$$|f_i(x,t,u^1,v^1) - f_i(x,t,u^2,v^2)| \leq$$
$$\leq L \max\{\max_{j,x,t} |u_j^1 - u_j^2|, \ \max_{j,x,t} |v_j^1 - v_j^2|\}$$

і аналогічно для інших функцій.

Нехай w^1, $w^2 \in \mathcal{Q}$. Тоді із формули (12) при всіх допустимих i, x, t одержимо

$$|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{\alpha_i(x,t)} e^{at},$$
$$|v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{\beta_j(x,t)} e^{at}.$$

Щоб знайти коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}$, проведемо наступні оцінки. Із (11) отримаємо таку нерівність

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \leq$$
$$\leq \begin{cases} L \max\limits_{j \notin I_0} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(-k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))}, & (x,t) \in G_0^i, \\ L \max\limits_{j \notin I_l} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(l + k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))}, & (x,t) \in G_l^i. \end{cases} \quad (13)$$

Якщо виконується перша оцінка (13), то з означення характеристики системи (5) для $i \in I_0$ маємо нерівність $\chi_i(x,t) \leq \dfrac{-x + \Lambda t}{\Lambda + k}$, де $\Lambda = \max\limits_{i,x,t} \mid \lambda_i(x,t) \mid$. Аналогічно, якщо виконується друга оцінка, то для $i \in I_l$ маємо $\chi_i(x,t) \leq \dfrac{x + \Lambda t - l}{\Lambda + k}$.

Тоді на основі отриманих оцінок для оператора $\mathcal{A}^1$ одержимо

$$\Big|\mathcal{A}_i^1[w^1](x,t) - \mathcal{A}_i^1[w^2](x,t)\Big| \alpha_i(x,t)e^{-at} \leq$$

$$\leq L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{x+\Lambda t-l}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(l+k\tau,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2)+$$

$$+\int_0^t e^{a(\sigma-t)}d\sigma L\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2)\leq$$

$$\leq L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\tau,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2)+$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\rho(w^1,w^2).$$

Для оператора $\mathcal{A}^2$ одержимо

$$\left|\mathcal{A}_i^2[w^1](x,t)-\mathcal{A}_i^2[w^2](x,t)\right|\beta_i(x,t)e^{-at}\leq$$

$$\leq L\rho(w^1,w^2)\left(\max_{\substack{i,\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}+\right.$$

$$\left.+\int_{-kt}^{x}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\right).$$

Із (12) та оцінок для $\mathcal{A}^1,\mathcal{A}^2$ одержуємо

$$\rho(A[w^1],A[w^2])\leq$$

$$\leq\max_{(x,t)\in\overline{G}}\left(L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)},\right.\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\tau,\tau)}\right\}+$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}+$$

$$+L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}+\int_{-kt}^{x}L\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\right.$$

$$\left.\left.\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\right)\rho(w^1,w^2).$$

Виберемо функції α_i, β_i так, щоб коефіцієнт стиску оператора $\mathcal{A}$ був меншим від одиниці, а саме

$$\alpha_i(x,t)=\begin{cases}e^{p(kt+x)(kt-x+l)}, & i\in I_0,\ i\in I_l,\\ e^{p(kt+x)}, & i\in I_0,\ i\notin I_l,\\ e^{p(kt-x+l)}, & i\notin I_0,\ i\in I_l,\\ e^{p(2kt+l)}, & i\notin I_0,\ i\notin I_l,\end{cases}$$

$$\beta_i(x,t)=\varepsilon e^{-p(kt+x)}.$$

Нехай $\mu=\dfrac{1}{\Lambda+k}$ і виконуються припущення $p\leq a\mu$, $\quad pl-a\mu\leq-2pkT$. Дослідивши вибрані функції на екстремум в $\overline{G}$, одержимо співвідношення:

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(-x-kt)}}{\alpha_j(-k\tau,\tau)}=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{i\in I_0}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(-x-kt)}}{e^{pl}}=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max\left\{e^{p(kt+x)(kt-x+l)},\right.$$

$$\left.e^{p(kt+x)}\right\}e^{a\mu(-x-kt)-pl}=e^{-pl};$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\,\tau}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(x-kt-l)}}{\alpha_j(l+k\tau,\tau)}=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(x-kt-l)}}{e^{pl}}=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max\{e^{p(kt+x)(kt-x+l)},$$

$$e^{p(kt-x+l)}\}e^{a\mu(x-kt-l)-pl}=e^{-pl};$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{V}}\frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}}=\max_{(x,t)\in\overline{V}}\varepsilon e^{-3pkt-px-pl}=$$

$$=\max_t\varepsilon e^{-2pkt+pl}=\varepsilon e^{-pl}.$$

Проведемо окремо оцінку для

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\leq$$

$$\leq\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}dy+$$

$$+\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}dy.$$

Тоді

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}dy=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\varepsilon e^{-p(kt+x)}dy\le$$

$$\le\max_{x,t}\{\varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt)\}=\varepsilon(l+2kT),$$

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}dy=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{\varepsilon e^{-p(kt+y)}}dy=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}e^{p(y-x)}dy=$$

$$=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\frac{1}{p}(1-e^{-p(kt+x)})\le\frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int\limits_{-kt}^{x}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\,\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}\right\}dy\le$$

$$\le\varepsilon(l+2kT)+\frac{1}{p}.$$

У результаті одержимо нерівність

$$\rho(A[w^1],A[w^2])\le\Bigg(Le^{-pl}+L\varepsilon+$$

$$+L\Big(\varepsilon(l+2kT)+\frac{1}{p}\Big)+\frac{L}{a}\times$$

$$\times\max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\tau)},\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\tau)}\right\}\Bigg)\rho(w^1,w^2).$$

Спочатку зафіксуємо параметри p^*, ε^* так, щоб виконувалась нерівність

$$Le^{-p^*l}+L\varepsilon^*+L(\varepsilon^*(l+2kT)+\frac{1}{p^*})<\frac{1}{2},$$

причому функції α_i^*, β_i^* дорівнюють відповідно функціям α_i, β_i при $p=p^*$, $\varepsilon=\varepsilon^*$.

Нехай

$$M=\max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i^*(x,t)}{\alpha_j^*(y,\tau)}\max_{i,j,y,\tau}\frac{\alpha_i^*(x,t)}{\beta_j^*(y,\tau)}\right\}.$$

Тепер фіксуємо значення параметра a^*, так щоб задовольнити нерівності

$$p^*\le a^*\mu,\quad p^*l-a^*\mu\le-2p^*kT,\quad \frac{LM}{a^*}<\frac{1}{2}.$$

Отже, оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{Q}^*=\mathcal{Q}$ з вибраними функціями $\alpha_i=\alpha_i^*$, $\beta_i=\beta_i^*$ та параметром $a=a^*$.

Тому за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}^*$. Ця нерухома точка є узагальненим неперервним розв'язком задачі (5)-(8). Теорема доведена. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* – М. : Наука, 1978. – 592 с.

2. *Риман Б.* О распространении волн конечной амплитуды [сочинения] / *Б. Риман.* – М.; Л., 1948. – С. 376-395.

3. *Schauder J.* Cauchy'sches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen / *J. Schauder* // Commen. Mathem. Helvetici. – 1936–1937. – Bd. 9. – S. 263-282.

4. *Courant R.* On nonlinear partial differential equations with two independent variables / *R. Courant, P. Lax* // Comm. Pure. Appl. Math. – 1949. – Vol. 2. – P. 255-273.

5. *Кирилич В. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *В. М. Кирилич, А. М. Филимонов* //Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42-60.

6. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации / *А. Ю. Ишлинский* // Прикл. математика и механика. – 1940. – Т.4. – Вып. 1. – С. 79-92.

7. *Шашков А. Г.* Волновые явления теплопроводности:системно-структурный подход / *А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский.* – М: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.

8. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях / *Я. С. Уфлянд* // Инж.-физ. журн. – 1964. – Т. 7. – № 1. – С. 89-92.

9. *Friedman A.* The Stefan problem for a hyperbolic heat equation / *A. Friedman, B. Hu* // Math. Anal. and Appl. – 1989. – Vol. 138. – N 1. – P. 249-279.

10. *Floresсu D.* Asupra existentei solutiilor unor sisteme hiperbolice de tip special./ *D. Floresсu* // Studii si cerc. Mat. - 1978. - T. 30, N. 3, P. 279-285.

11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ / *В. А. Треногин.* – М.: Наука, 1980. – 325 с.

12. *Мауленов О.* О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке / *О. Мауленов, А. Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – №5. – С. 25-29.