УДК 517.956

©2012 р. Пукальський І.Д.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ІЗ ОСОБЛИВОСТЯМИ

У просторах класичних функцій із степеневою вагою доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач для лінійних еліптичних диференціальних рівнянь зі степеневими особливостями в коефіцієнтах довільного порядку на координатних площинах.

Boundary problems for linear elliptic differential equations with a power peculiarities in the equation coefficients of an arbitrary order are considered. Existence and uniqueness of solution has been established for a classic functions space with power weight.

Математичне моделювання багатьох фізичних та біологічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Дослідженню таких задач присвячено праці [1 – 4]. У працях [5, 6] розроблено методи розв'язання крайової задачі для осесиметричного потенціалу, який задовольняє еліптичне рівняння з виродженням за однією змінною.

Вивченню розв'язків нелокальної крайової задачі для системи двох еліптичних рівнянь з особливостями присвячено працю [7]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями приведені у працях [8, 9].

У цій статті розглядаються еліптичні крайові задачі для лінійного диференціального рівняння із степеневими особливостями довільного порядку у коефіцієнтах на координатних площинах $x_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Одержано інтегральне зображення розв'язку першої крайової задачі, задачі зі скісною похідною та встановлені оцінки розв'язків у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1, \dots, x_n)$ – координати точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D - обмежена область з множини $\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}\}$ з межею ∂D така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$. Розглянемо в області D задачу знаходження функції u, яка задовольняє рівняння

$$(Lu)(x) = \Big[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + \\ + A_0(x)\Big] u(t,x) = f(x), \tag{1}$$

а на межі області ∂D одну з крайових умов

$$\lim_{x \to z \in \partial D} [u(x) - \varphi(x)] = 0, \tag{2}$$

$$(\mathcal{B}u)(x) = \lim_{x \to z \in \partial D} \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\partial_{x_k} u + \\ + b_0(x)u - g(x)\Big] = 0. \tag{3}$$

Порядок особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і $\mathcal{B}$ будуть характеризувати функції $s(a_i, x_i)$: $s(a_i, x_i) = x_i^{a_i}$ при $0 \leq x_i \leq 1$, $s(a_i, x_i) = 1$ при $x_i = 1$; $S(a, x) = \min\{s(a_1, x_1), \dots, s(a_n, x_n)\}$, $a_1, \dots, a_n$ – довільні фіксовані дійсні числа.

Нехай $\overline{D} = D \cup \partial D$, $P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $H_i(x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ – точки з $\overline{D}$, p, l – додатні фіксовані дійсні числа. Визначимо функціональні простори, в яких будуть вивчатися задачі (1) – (3).

$C^l(\gamma; \beta; p; D)$ – множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в D вигляду $\partial_x^k u(P)$, $P(x_1, \dots, x_n) \in D$, $|k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_0 = \sup_{\overline{D}} |u| \equiv \|u; D\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;p;D\|_l=\sum_{|k|=0}^{[l]}\|u;\gamma;\beta;p;D\|_{|k|}+$$
$$+\langle u;\gamma;\beta;p;D\rangle_l\equiv$$
$$\equiv\sum_{|k|=0}^{[l]}\sup_{P\in\overline{D}}S((|k|+p)\gamma,x)\prod_{m=1}^{n}s(-k_m\beta_m,x_m)\times$$
$$\times|\partial_x^k u(P)|+\sum_{|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_1,H_i)\subset\overline{D}}S((l+p)\gamma,\tilde{x})\times$$
$$\times\prod_{m=1}^{n}s(-k_m\beta_m,\tilde{x}_m)s(-\{l\}\beta_i,\tilde{x}_i)\times$$
$$\times|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_x^k u(P_1)-\partial_x^k u(H_i)|,$$
γ, β_i – фіксовані дійсні числа, $\gamma\geq 0$, $\beta_i\in -\infty,\infty)$, $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $s(a,\tilde{x}_i)=\min\{s(a,x_i^{(1)}),s(a,x_i^{(2)})\}$, $S(a,\tilde{x})=\min\{S(a,x^{(1)}),S(a,x^{(2)})\}$.

Щодо задач (1) – (3) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність
$$\pi_1|\xi|^2\leq\sum_{ij=1}^{n}s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\pi_2|\xi|^2,$$
π_1, π_2 – додатні фіксовані сталі і $s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $s(\mu_i,x_i)A_i\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\mu_0,x)A_0\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $A_0(x)<0$ для $x\in\overline{D}$, $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;D)$, $\mu_0\geq 0$, $\mu_i\geq 0$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, межа $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0;1)$;

б) функція $\varphi\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$
$$\gamma=\max\Big\{\max_i(1+\beta_i),\max_i(\mu_i-\beta_i),\frac{\mu_0}{2}\Big\},$$

в) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)}=\{b_1^{(s)},\ldots,b_n^{(s)}\}$, $b_k^{(s)}=s(\beta_k,x_k)b_k(x)$ і $\overrightarrow{e}=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $e_k=\dfrac{b_k}{|\overrightarrow{b}|}$, $|\overrightarrow{b}|=\Big[\sum_{k=1}^{n}b_k^2(x)\Big]^{1/2}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в тій же точці $P\in\partial D$ кут менший $\dfrac{\pi}{2}$, $s(\beta_k,x_k)b_k\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $S(\delta,x)b_0\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $b_0>0$, $\delta\geq 0$, $g\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$,
$$\gamma=\max\Big\{\max_i(1+\beta_i),\max_i(\mu_i-\beta_i),\frac{\mu_0}{2},\delta\Big\}.$$

Правильні такі теореми.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ і справджується оцінка*
$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\leq c\Big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_{\alpha}+$$
$$+\|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\Big).\qquad(4)$$

Теорема 2. *Якщо для задачі (1), (3) виконуються умови а), в), то існує єдиний розв'язок задачі (1), (3) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ і справджується оцінка*
$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\leq c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_{\alpha}+$$
$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;D\|_{1+\alpha}).\qquad(5)$$

Для дослідження задачі (1) – (3) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовностей допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничними значеннями послідовностей розв'язків яких будуть розв'язки задач (1) – (3).

Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $D_m=D\cap\{x\in D\,\big|\,s(1,x_i)\geq m^{-1}\}$, $m>1$, – послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до D. Розглянемо в області D задачу знаходження розв'язків рівняння
$$(L_1u_m)(x)=\Big[\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\partial_{x_i}+a_0(x)\Big]u_m(x)=f_m(x),\quad(6)$$
які задовольняють на межі області одну з умов
$$\lim_{x\to z\in\partial D}[u_m(x)-\varphi_m(x)]=0,\qquad(7)$$
$$(\mathcal{B}_1u_m)(x)=\lim_{x\to z\in\partial D}\Big[\sum_{k=1}^{n}l_k(x)\partial_{x_k}u_m+$$
$$+l_0(x)u_m-g_m(x)\Big]=0.\qquad(8)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, l_k, l_0 і функції f_m, φ_m, g_m при $x\in D_m$ співпадають з A_{ij},

A_i, A_0, b_k, b_0 і f, φ, g відповідно, а при $x \in D \backslash D_m$ є продовженням зі збереженням норм і гладкості [10, стор. 82].

Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(x)$. Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(D)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; p; D\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; p; D\|_{2+\alpha}$, тільки замість функції $s(a_i, x_i)$ беремо відповідно $d(a_i, x_i) = \max(s(a_i, x_i), m_i^{-a_i})$, якщо $a_i \geq 0$, і $d(a_i, x_i) = \min(s(a_i, x_i), m_i^{-a_i})$, якщо $a_i < 0$, $\rho(a, x) = \max(S(a, x), \max\limits_i m^{-a_i})$, якщо $a_i \geq 0$, і $\rho(a, x) = \min(S(a, x), \max\limits_i m^{-a_i})$, якщо $a_i < 0$.

Сформулюємо принцип максимуму для розв'язків задач (6) – (8). Правильні теореми.

Теорема 3. *Нехай u_m – класичний розв'язок задачі (6), (7) в області D і виконані умови а), б). Тоді для u_m правильна нерівність*

$$|u_m| \leq \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|\varphi_m; D\|_0\}. \qquad (9)$$

Доводиться ця теорема за схемою доведення теореми 1.1 ([11], стор. 145), тобто аналізуються всі можливі розміщення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $u_m(x)$.

Теорема 4. *Якщо u_m – класичний розв'язок задачі (6), (8) в області D і виконані умови а), в), то для u_m правильна нерівність*

$$|u_m| \leq \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|l_0^{-1} g_m; D\|_0\}. \qquad (10)$$

Нерівність (10) одержується за схемою доведення теореми 1.1 ([11], стор. 145). Відмінність є тільки у випадку, коли $0 < \max\limits_{\overline{D}} u_m = \max\limits_{\partial D} u = u_m(P_3)$. В точці P_3 маємо $\dfrac{du_m}{d\overrightarrow{l}} \geq 0$ (вектор $\overrightarrow{l}$ задовольняє умову в)), тому з крайової умови (8) отримаємо

$$u_m(P_3) \leq l_0^{-1}(P_3) g_m(P_3).$$

Якщо P_4 (точка мінімума для $u_m(x)$) належить ∂D, то $\dfrac{du_m(P_4)}{d\overrightarrow{l}} \leq 0$. Враховуючи крайову умову (8), одержуємо

$$u_m(P_4) \geq l_0^{-1}(P_4) g_m(P_4).$$

При виконанні умов а) – в), згідно з теоремою 2.17 із [12, стор. 231], існують єдині розв'язки задач (6) – (8) із простору $C^{2+\alpha}(D)$. Ці розв'язки мають скінченну норму $\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}$ при кожному m. Знайдемо оцінку цієї норми.

Правильна така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі (6), (7) правильна оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha +$$

$$+ \|\varphi; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}). \qquad (11)$$

Доведення. В задачі (6), (7) зробимо заміну $u_m(x) = v_m(x) + \varphi_m(x)$. Тоді $v_m(x)$ буде розв'язком однорідної задачі

$$(L_1 v_m)(x) = f_m(x) -$$

$$-(L\varphi_m)(x) \equiv F_m(x), \qquad (12)$$

$$v_m|_{\partial D} = 0. \qquad (13)$$

Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [10, 13] маємо

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha) \langle v_m; \gamma; \beta; 0; D \rangle_{2+\alpha} +$$

$$+ c(\varepsilon) \|v_m; D\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0, 1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle v_m; \gamma; \beta; 0; D \rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в D точок P_1 та H_i, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2} \|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq E(v_m), \qquad (14)$$

$$E(v_m) = \sum_{|k|=2} \sum_{i=1}^{n} \rho((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) d(-\alpha\beta_i, \tilde{x}_i) \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{n} d(-k_m \beta_m, \tilde{x}_m) \times$$

$$\times |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha} |\partial_x^k v_m(P_1) - \partial_x^k v_m(H_i)|.$$

Розглянемо випадок $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq n^{-1}\rho(\gamma,\tilde{x})d(-\beta_i,\tilde{x}_i)\dfrac{r}{4} \equiv T$, $r \in (0,1)$, r – довільна стала. Нехай $\tilde{x} = x^{(1)}$. Будемо вважати, що $|x^{(1)} - y| \geq 2Tn$, або $|x_n^{(1)} - y_n| \geq 2T$. Запишемо задачу (12), (13) у вигляді

$$(L_2 v_m)(x) \equiv \Big[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \lambda\Big]v_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(x^{(1)}) - a_{ij}(x)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i}v_m + (a_m(x) - \lambda)v_m + F_m(x) \equiv$$

$$\equiv \Phi(x, v_m) + F_m(x), \qquad (15)$$

$$v_m|_{\partial D} = 0, \qquad (16)$$

де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\sup\limits_{\overline{D}} A_0(x) - \lambda \geq 0$.

Нехай $V_\nu^{(1)}$ – область із D, $V_\nu^{(1)} = \{x \in D, |x_j - x_j^{(1)}| \leq \nu T, j \in \{1,\ldots,n\}\}$. Зробимо в задачі (15), (16) заміну

$$v_m(x) = \omega_m(z), \quad z_j = d(\beta_j, x_j^{(1)})x_j,$$

одержимо

$$(L_3\omega_m)(x) \equiv \Big[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\times$$

$$\times a_{ij}(x^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j} - \lambda\Big]\omega_m = \Phi(z,\omega_m) + F_m(Z),$$

$$\omega_m|_{\partial D} = 0,$$

де $Z = (d(-\beta_1, x_1^{(1)})z_1, \ldots, d(-\beta_n, x_n^{(1)})z_n)$.

Позначимо $z_i^{(1)} = d(\beta_i, x_i^{(1)})x_i^{(1)}$, $H_\nu^{(1)} = \Big\{Z, |z_i - z_i^{(1)}| \leq \nu n^{-1}\rho(\gamma, x^{(1)})\dfrac{r}{4}, i \in \{1,2,\ldots,n\}\Big\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in H_{1/4}^{(1)}, 0 \leq \eta(z) \leq 1; \\ 0, & z \notin H_{3/4}^{(1)}, |\partial_z^k \eta| \leq \\ & \qquad \leq c_{|k|}\rho(-|k|\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(z) = \omega_m(z)\eta(z)$ задовольняє задачу Діріхле

$$(L_3 V_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\times$$

$$\times[\partial_{z_i}\omega_m\partial_{z_j}\eta + \partial_{z_j}\omega_m\partial_{z_i}\eta] +$$

$$+\omega_m\Big[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i, x_i^{(1)})d(\beta_j, x_j^{(1)})\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta(z)\Big] +$$

$$+\eta\Phi + \eta F_m \equiv \Phi_1(\eta,\omega_m) + \eta F_m,$$

$$V_m|_{\partial D} = 0. \qquad (18)$$

Згідно з теоремою 1.1 із ([11], стор. 145) для розв'язку задачі (17), (18) і довільних точок M_1 та $M_2 \in H_{1/4}^{(1)}$ правильна нерівність

$$|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^\alpha |\partial_\xi^2 \omega_m(M_1) - \partial_\xi^2 \omega_m(M_2)| \leq$$

$$\leq c(\|\Phi_1(\eta,\omega_m)\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} + \|\eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})}). \qquad (19)$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$, знаходимо

$$\|\Phi_1(\eta,\omega_m)\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} \leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})\times$$

$$\times(\|\omega_m;\gamma;0;0;H_{3/4}^{(1)}\|_2 +$$

$$+\|\omega_m; H_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|\Phi;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha), \qquad (20)$$

$$\|\eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} \leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})\times$$

$$\times\|F_m;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha.$$

Підставляючи (20) у (19) і повертаючись до змінних x, одержимо

$$E(v_m) \leq c_1(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha +$$

$$+\|\Phi;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha +$$

$$+\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(1)}\|_2 + \|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0). \qquad (21)$$

Знайдемо оцінку норми виразу $\Phi(x, v_m)$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка. Наприклад, $\langle a_0 v_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\rangle_\alpha$. Маємо

$$\langle a_0 v_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\rangle_\alpha \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{(A,B_j)\subset V_{3/4}^{(1)}} \{|v_m|(\rho((2+\alpha)\gamma,\tilde{\xi})|\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$\times|a_0(A)-a_0(B_j)|)+\rho(2\gamma,\tilde{\xi})|a_0(B_j)|(\rho(\alpha\gamma,\tilde{\xi})\times$$

$$\times d(-\alpha\beta_j,\tilde{\xi})|\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$\times|v_m(A)-v_m(B_j)|)\} \leq c_2(\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(1)}\|_1+$$

$$+\|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0).$$

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків виразу $\Phi(x,v_m)$:

$$\|\Phi;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha \leq \varepsilon_1\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(1)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+c_3\|v_m;V_{3/4}^{(1)}\|_0, \qquad (22)$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon^\alpha(n+2)+n^2r^2c_1$.

Підставляючи (22) у (21) знаходимо

$$E(v_m) \leq (\varepsilon_1+\varepsilon^\alpha)\|v_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$

$$+c_4\|v_m;D\|_0+c_5\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha. \qquad (23)$$

Розглянемо випадок, коли $|x^{(1)}-y| \leq 2Tn$ і $|x_n^{(1)}-y_n| \leq 2T$, $y \in \partial D$. Нехай $K_R(P)$ – куля радіуса R, $R \geq 4Tn$, з центром в деякій точці $P \in \partial D$, яка містить точки P_1 та H_i. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K_R(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(\tau)$ із ([10], стор. 126). В результаті такого перетворення область $D\cap K_R(P)$ переходить в область Q, для точок якої $\tau_n \geq 0$.

Вважаємо, що $v_m(x)$, P_1, H_i при цьому перетворенні переходять відповідно в $\omega_m(\tau)$, M_1, N_i. Позначимо коефіцієнти диференціального виразу L_1 в області Q через $p_{ij}(\tau)$, $p_i(\tau)$, $p_0(\tau)$. Тоді $\omega_m(\tau)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\sum_{ij=1}^{n} p_{ij}(M_1)\partial_{\tau_i}\partial_{\tau_j}-\lambda\right]\omega_m =$$

$$=\Phi(\psi(\tau),\omega_m)+F_m(\psi(\tau)),$$

$$\omega_m|_{\tau_n=0}=0.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (15), (16) і використовуючи при цьому теорему 1.1 із ([11], стор. 145), одержимо нерівність (23).

Якщо $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}| \geq T$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E(v_m) \leq \varepsilon^\alpha\|v_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$

$$+C(\varepsilon)\|v_m;D\|_0. \qquad (24)$$

Скориставшись нерівностями (14), (23), (24) і вибравши r та ε досить малими, одержимо оцінку

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c_6(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha+\|v_m;D\|_0). \qquad (25)$$

Оскільки $u_m = v_m+\varphi_m$, то враховуючи нерівності (9), (25) і умову б), отримаємо оцінку (11).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (11) не залежить від m, тоді послідовності $\{W_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{W_m^{(1)}\} \equiv \{\rho(\gamma,x)d(-\beta_i,x_i)\partial_{x_i}u_m(x)\}$, $\{W_m^{(2)}\} \equiv \{\rho(2\gamma,x)d(-\beta_i,x_i)d(-\beta_j,x_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(x)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в області $\overline{D}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{W_{m_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{D}$ до $W^{(\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2\}$. Переходячи до границі при $m_k \to \infty$ в задачі (6), (7), одержимо, що $u(x)=W^{(0)}$ єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$.

Теорема 6. *Якщо $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$ і виконані умови теореми 1, то єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u(x)=u_1+u_2=\int\limits_D G_1(x;d\xi)f(\xi)+$$

$$+\int\limits_{\partial D} G_2(x;d_\xi S)\varphi(\xi), \qquad (26)$$

компоненти (G_1,G_2) задовольняють нерівності

$$\Big|\int\limits_D G_1(x;d\xi)\Big| \leq \sup_{\overline{D}}|A_0^{-1}(x)|,$$

$$\Big|\int\limits_{\partial D} G_2(x;d_\xi S)| \leq 1. \qquad (27)$$

Доведення. Оскільки функція $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, то враховуючи теорему 1 і нерівність $\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;0;D\|_\alpha$ для розв'язку задачі (1), (2) одержуємо оцінку

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;0;D\|_\alpha +$$
$$+\|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}). \tag{28}$$

Розглядатимемо $u(x)$ при фіксованих x як лінійний неперервний функціонал на нормованому просторі $C^\alpha(\gamma;\beta;0;D) \subset C(D)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (28). На підставі теореми Рісса можна вважати, що $u(x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(x,Y)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин області D, включаючи D і всі відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (26).

З теорем 1, 5 для розв'язків задачі (1), (2) випливає справедливість нерівностей

$$\|u_1;D\|_0 \le \|fA_0^{-1}(x);D\|_0,$$
$$\|u_2;D\|_0 \le \|\varphi;D\|_0, \tag{29}$$

де $u_1(x)$ – розв'язок однорідної крайової задачі (1), (2) при $\varphi(x)\equiv 0$, а $u_2(x)$ – розв'язок задачі (1), (2) при $f\equiv 0$.

Підставивши в нерівності (29) $\varphi\equiv 1$, $f\equiv 1$, одержимо нерівності (27).

Теорема 7. *Нехай виконані умови теореми 2. Тоді для розв'язку задачі (6), (8) правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;D\|_\alpha +$$
$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;D\|_{1+\alpha}). \tag{30}$$

Доведення. Оцінка (30) встановлюється за схемою доведення нерівності (11). Покажемо найсуттєвіші моменти.

Будемо вважати, що $\tilde{x} = x^{(1)}$. Тоді у випадку $|x^{(1)}-y| \ge 2Tn$, або $|x_n^{(1)}-y_n| \ge 2T$, $y\in\partial D$, запишемо задачу (6), (8) у вигляді

$$(L_2u_m)(x) = \Phi(x,u_m) + f_m(x), \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})\partial_{x_k}u_m|_{\partial D} = \Big\{\sum_{k=1}^n [l_k(x^{(1)}) - l_k(x)]\times$$
$$\times\partial_{x_k}u_m - l_0(x)u_m + g_m(x)\Big\}\Big|_{\partial D} \equiv$$
$$\equiv G_m(x,u_m)|_{\partial D}. \tag{32}$$

В задачі (31), (32) зробимо заміну $u_m(t,x) = \omega_m^{(1)}(z)$, $z_i = d(\beta_i, x_i^{(1)})x_i$, одержимо

$$(L_3\omega_m^{(1)})(z) = \Phi(z,\omega_m^{(1)}) + f_m(z), \tag{33}$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})d(\beta_k;x_k^{(1)})\partial_{z_k}\omega_m^{(1)}|_{\partial D} =$$
$$= G_m(z,\omega_m^{(1)})|_{\partial D}, \tag{34}$$

де $Z = (d(-\beta_1,x_1^{(1)})z_1,\dots,d(-\beta_n,x_n^{(1)})z_n)$.

Коефіцієнти рівняння (33) і крайової умови (34), згідно із зробленими припущеннями, обмежені сталими, незалежними від точки P_1. Тоді функція $W_m(z) = \eta(z)\omega_m^{(1)}(z)$ є розв'язком крайової задачі

$$(L_3W_m)(z) = \Phi_1(\eta,\omega_m^{(1)}) + \eta f_m(z), \tag{35}$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})d(\beta_k;x_k^{(1)})\partial_{z_k}W_m|_{\partial D^{(1)}} = \tag{36}$$
$$= \left[\eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})\omega_m^{(1)}d(\beta_k,x_k^{(1)})\partial_{z_k}\eta\right]\Bigg|_{\partial D^{(1)}}.$$

На підставі теореми 1.17 ([12], стор. 228) для розв'язку задачі (35), (36) і довільних точок M_1 і $M_2 \in H_{1/4}^{(1)}$ правильна нерівність

$$|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_\xi^2 u_m(M_1) - \partial_\xi^2 u_m(M_2)| \le$$
$$\le c(\|\Phi_1 + \eta f_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} +$$
$$+\Big\|\eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})\omega_m^{(1)}\times$$
$$\times d(\beta_k,x_k^{(1)})\partial_{z_k}\eta\Big\|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4})^{(1)}}). \tag{37}$$

Враховуючи властивості функції $\eta(z)$, знаходимо

$$\|\Phi_1 + \eta f_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} \le c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})\times$$
$$\times(\|f_m;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha +$$
$$+\|\Phi_m;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha), \tag{38}$$

$$\Big\|\eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)})\omega_m^{(1)}d(\beta_k,x_k^{(1)})\partial_{z_k}\eta\Big\|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} \le$$

$$\le c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)})\times$$
$$\times(\|G_m;\gamma;0;\gamma;H^{(1)}_{3/4}\|_{1+\alpha}+$$
$$+\|\omega^{(1)}_m;\gamma;0;0;H^{(1)}_{3/4}\|_1+\|\omega^{(1)}_m;H^{(1)}_{3/4}\|_0). \quad (39)$$

Підставляючи (38), (39) у (37) і повертаючись до змінних x, одержимо нерівність

$$E(u_m)\le c(\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;V^{(1)}_{3/4}\|_\alpha+$$
$$+\|\Phi_m;\gamma;\beta;2\gamma;V^{(1)}_{3/4}\|_\alpha+$$
$$+\|G_m;\gamma;\beta;\gamma;V^{(1)}_{3/4}\|_{1+\alpha}+\|u_m;\gamma;\beta;0;V^{(1)}_{3/4}\|_1+$$
$$+\|u_m;V^{(1)}_{1/4}\|_0). \quad (40)$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінюючи півнорми кожного доданка виразів Φ_m і G_m, одержимо

$$E(u_m)\le(\varepsilon_1+\varepsilon^\alpha)\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+c_7\|u_m;D\|_0+c_8(\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha+$$
$$+\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;D\|_{1+\alpha}). \quad (41)$$

У випадку $|x^{(1)}-y|\le 2Tn$ і $|x^{(1)}_n-y_n|\le 2T$, $y\in\partial D$, позначимо коефіцієнти диференціального виразу $\mathcal{B}_1$ в області Q через $h_i(\tau)$. Тоді функція $u_m(\psi(\tau))\equiv\omega^{(2)}_m(\tau)$ в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$\left[\sum_{ij=1}^n k_{ij}(M_1)\partial_{\tau_i}\partial_{\tau_j}-\lambda\right]\omega^{(2)}_m=$$
$$=\Phi(\psi(\tau),\omega^{(2)}_m)+f_m(\psi(\tau)),$$
$$\sum_{i=1}^n h_i(M_1)\partial_{\tau_i}\omega^{(2)}_m\Big|_{\tau_n=0}=$$
$$=\left[\sum_{i=1}^n(h_i(M_1)-h_i(\tau))\partial_{\tau_i}\omega^{(2)}_m-\right.$$
$$\left.-h_0(\tau)\omega^{(2)}_m+g_m(\psi(\tau))\right]\Bigg|_{\tau_n=0}.$$

Повторюючи вищенаведені міркування й в цьому випадку одержуємо нерівність (41).

Скориставшись нерівностями (14), (24), (41) і вибравши r та ε досить малими, одержимо оцінку

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}\le c_9(\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_\alpha+$$
$$+\|g_m;\gamma;\beta;\gamma;D\|_{1+\alpha}+\|u_m;D\|_0). \quad (42)$$

Враховуючи нерівності (10), (42), отримаємо оцінку (30).

Доведення теореми 2. Оскільки права частина нерівності (30) не залежить від m і послідовності $\{W^{(\nu)}_m\}$, $\nu\in\{1,2\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в D, то за теоремою Арчела існують підпослідовності $\{W^{(\nu)}_{m(k)}\}$, рівномірно зібжні в D при $m(k)\to\infty$. Переходячи до границі при $m(k)\to\infty$ в задачі (6), (8), одержимо, що єдиний розв'язок задачі (1), (3) належить простору $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ і правильна оцінка (5).

Теорема 8. *Нехай $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)$, $g\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ і виконані умови теореми 2. Тоді єдиний розв'язок задачі (1), (3) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u=\int_D\Gamma_1(x;d\xi)f(\xi)+\int_{\partial D}\Gamma_2(x;d_\xi S)g(\xi), \quad (43)$$

компоненти (Γ_1,Γ_2) задовольняють нерівності

$$\Big|\int_D\Gamma_1(x;d\xi)\Big|\le\sup_{\overline{D}}|A_0^{-1}(x)|,$$
$$\Big|\int_{\partial D}\Gamma_2(x;d_\xi S)|\le\sup_{\overline{D}}|b_0^{-1}(x)|. \quad (44)$$

Оскільки $C^\alpha(\gamma;\beta;0;D)\subset C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;D)$, $C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)\subset C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;D)$, то повторюючи міркування при доведенні теореми 6 одержимо формулу (43) і оцінки (44).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бицадзе А.Б.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

3. *Dziubarski Jacek.* Note on H^1 spaces related to degenerate Schrödinger operators. J. Math. 2005. 49. № 4. – P. 1271-1297.

4. *Han Pigong.* Asymptotic behavior of solutions to semilinear elliptic equations with Hardy potential. Proc. Amer. Math. Soc. 2007. 135, № 2. – P. 365-372.

5. *Плакса С.А.* Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязанной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 12. – С. 1623-1640.

6. *Плакса С.А.* К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1634-1641.

7. *Моисеев Е.И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифф. уравнения. – 2001. – 37, № 11. – С. 1555-1567.

8. *Esteban Maria J.* Nonexistence result for positive solutions of nonlinear elliptic degenerate problems // Nonlinear Anal. Theory Math. and Appl. – 1996, 26, № 4. – P. 835-843.

9. *Amano Kazuo.* Maximum principle for degenerate elliptic-parabolic equations with Venttsel's boundary conditions. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. 263, № 2. – P. 377-396.

10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

11. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

12. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

13. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.