

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта з двома невідомими, залежними від часу, параметрами в одновимірному параболічному рівнянні з інтегральними умовами перевизначення в області з невідомою ділянкою межі.

The conditions of unique solvability of the inverse problem of finding the minor coefficient with two unknown time-dependent parameters in a one-dimensional parabolic equation with integral overdetermination conditions in a free boundary domain are established.

Вступ. Завдяки своєму практичному застосуванню у численних галузях науки коефіцієнтні обернені задачі зайняли вагоме місце серед інших задач для рівнянь із частинними похідними. Сьогодні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо повно вивчені. В [1] знайдено умови локального за часом існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язку оберненої задачі для рівняння

$$u_t = u_{xx} + p(t)u_x, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T),$$

з невідомим коефіцієнтом $p(t)$ та умовою перевизначення

$$m(t) = \int_0^{b(t)} u(x, t) dx, \quad t \in [0, T],$$

де $0 < b(t) < 1$, $t \in [0, T]$, – задана функція. Дослідження такої задачі з умовою перевизначення

$$u_x(0, t) + p(t)u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

продовжено в [2, 3]. В [2] встановлено умови глобального існування розв'язку оберненої задачі, а в [3] отримано умови локального існування розв'язку, а також умови, за яких задача не може мати глобального розв'язку.

У [4, 5] досліджено обернені задачі визначення коефіцієнтів $(a(t), b(t))$, $(a(t), c(t))$, і $(a_0(t), a_1(t))$ у параболічних рівняннях

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x, t)u + f(x, t),$$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(t)u + f(x, t),$$

$$u_t = (a_0(t) + xa_1(t))u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, h) \times (0, T).$$

При розгляді цих задач для визначення невідомих параметрів були використані інтегральні теплові моменти.

Поряд із оберненими, в теорії рівнянь із частинними похідними важливе місце займають задачі з вільними межами. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дозволяє застосувати до цих задач методику, розроблену для дослідження обернених задач. В [6, 7] знайдено умови однозначної розв'язності обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. В [8, 9] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції у параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої є невідомою.

У цій роботі розглядається обернена задача визначення молодшого коефіцієнта одновимірного параболічного рівняння, який має вигляд лінійної функції за просторовою змінною з двома невідомими, залежними від часу, параметрами, в області з невідомою ділянкою межі.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b_1(t)$, $b_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x, t) dx = \mu_3(t), \quad \int_0^{h(t)} xu(x, t) dx = \mu_4(t),$$

$$\int_0^{h(t)} x^2 u(x, t) dx = \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Увівши нову змінну $y = \frac{x}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h(t), b_1(t), b_2(t), v(y, t))$, де $v(y, t) = u(yh(t), t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y, t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{yh(t)b_1(t) + b_2(t)}{h(t)} + \frac{yh'(t)}{h(t)} \right) v_y + c(yh(t), t)v + f(yh(t), t), \quad (y, t) \in Q_T, \quad (5)$$

$$v(y, 0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0, 1], \quad (6)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$h(t) \int_0^1 v(y, t) dy = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$h^2(t) \int_0^1 y v(y, t) dy = \mu_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$h^3(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy = \mu_5(t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

2. Існування розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

$$1) a \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T]), \varphi \in C^2[0, h_0], c, f \in H^{\alpha,0}([0, \infty) \times [0, T]), \alpha \in (0, 1), \mu_i \in C^1[0, T], i = \overline{1, 5};$$

$$2) 0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1, c(x, t) \leq 0, f(x, t) \geq 0, (x, t) \in [0, \infty) \times [0, T], \varphi(x) \geq \varphi_0 > 0, x \in [0, \infty), \varphi'(x) > 0, x \in [0, h_0], \varphi'(h_0 - x) - \varphi'(x) > 0, (h_0 - x)\varphi'(x) - x\varphi'(h_0 - x) > 0, x \in \left[0, \frac{h_0}{2}\right), \mu_i(t) > 0, i = \overline{1, 5}, t \in [0, T], \text{де } h_0 = h(0) > 0 \text{ є розв'язком}$$

$$\text{рівняння } \int_0^{h(0)} \varphi(x) dx = \mu_4(0);$$

3) умови узгодження нульового та першого порядків.

Тоді можна вказати таке число T_0 , $0 < T_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(h, b_1, b_2, v) \in C^1[0, T_0] \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T_0]$, задачі (5)–(10).

Доведення. Доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку встановимо оцінки функції, що задає невідому частину межі області. З

умови (8) одержуємо рівняння

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y, t) dy}, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Використовуючи принцип максимуму [10] для розв'язку прямої задачі (5)–(7), отримуємо

$$v(y, t) \geq M_0 > 0, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T.$$

Тоді для розв'язків рівняння (11) справедлива оцінка

$$h(t) \leq \frac{1}{M_0} \max_{[0, T]} \mu_3(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0, T].$$

Застосовуючи принцип максимуму для розв'язку задачі (5)–(7), одержуємо

$$v(y, t) \leq M_1 < \infty, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T.$$

Тоді для $h(t)$ справедлива оцінка

$$h(t) \geq \frac{1}{M_1} \min_{[0, T]} \mu_3(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0, T].$$

Таким чином,

$$0 < M_0 \leq v(y, t) \leq M_1 < \infty, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$0 < H_0 \leq h(t) \leq H_1 < \infty, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

де числа M_0, M_1 визначаються вихідними даними.

Зведемо задачу до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\tilde{v}(y, t) = v(y, t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y - 1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\tilde{v}(y, t)$ одержуємо задачу

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t &= \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \tilde{v}_{yy} + \left(\frac{yh(t)b_1(t) + b_2(t)}{h(t)} + \right. \\ &+ \left. \frac{yh'(t)}{h(t)} \right) (\tilde{v}_y + d(y, t)) + c(yh(t), t) \tilde{v} + \\ &+ F(y, t), \quad (y, t) \in Q_T, \\ \tilde{v}(y, 0) &= 0, \quad y \in [0, 1], \\ \tilde{v}(0, t) &= \tilde{v}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$d(y, t) = h_0 \varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0),$$

$$F(y, t) = h_0^2 \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \varphi''(yh_0) + c(yh(t), t) \times (\varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0))) + f(yh(t), t) - y\mu_2'(t) + \mu_1'(t)(y - 1).$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_t = \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} \tilde{v}_{yy} + c(yh(t), t) \tilde{v}$$

задачу (13) зводимо до рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y, t) &= \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \left((\tilde{v}_\eta(\eta, \tau) + \right. \\ &+ d(\eta, \tau)) \frac{\eta h(\tau) b_1(\tau) + b_2(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} + \\ &+ \left. F(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Позначимо $w(y, t) = v_y(y, t)$, $p(t) = h'(t)$. Подамо (14) у вигляді

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \varphi(yh_0) + (1 - y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \\ &+ y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y, t, \eta, \tau) \times \\ &\times \left(\frac{\eta h(\tau) b_1(\tau) + b_2(\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right. \\ &+ \left. F(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \quad (y, t) \in \bar{Q}_T. \end{aligned} \quad (15)$$

Продиференціювавши (15) за змінною y , одержуємо

$$\begin{aligned} w(y, t) &= h_0 \varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \\ &+ \mu_1(0) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y, t, \eta, \tau) \left(F(\eta, \tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\eta h(\tau) b_1(\tau) + b_2(\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta, \tau) \right) d\eta d\tau, \end{aligned}$$

$$(y, t) \in \overline{Q_T}. \quad (16)$$

Продиференціювавши (8)–(10) за змінною t і використавши (5), одержуємо

$$\begin{aligned}
 b_1(t) = & \left[(h(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t))a(0, t)w(0, t) + \right. \\
 & + \int_0^1 (h(t)a_x(yh(t), t))(h(t)y^2(h(t)\mu_1(t) - \\
 & - \mu_3(t)) + y(2\mu_4(t) - h^2(t)\mu_1(t)) + h(t) \times \\
 & \times \mu_3(t) - 2\mu_4(t)) + a(yh(t), t)(2\mu_4(t) - \\
 & - h^2(t)\mu_1(t) + 2yh(t)(h(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))) \times \\
 & \times w(y, t)dy - h^2(t) \int_0^1 (c(yh(t), t)v(y, t) + \\
 & + f(yh(t), t))(h(t)y^2(h(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) + \\
 & + y(2\mu_4(t) - h^2(t)\mu_1(t)) + h(t)\mu_3(t) - \\
 & - 2\mu_4(t))dy + (h(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t))h(t) \times \\
 & \times \mu'_3(t) + \mu'_4(t)(2\mu_4(t) - h^2(t)\mu_1(t)) + \\
 & \left. + \mu'_5(t)(h(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) \right] \left[2h(t)\mu_3(t) \times \right. \\
 & \times \mu_4(t) - 4\mu_4^2(t) - h^2(t)\mu_3^2(t) + 3(\mu_3(t) - \\
 & - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) \Big]^{-1}, \\
 & t \in [0, T], \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(t) = & \left[(3\mu_5(t) - 2h(t)\mu_4(t))a(0, t)w(0, t) + \right. \\
 & + \int_0^1 (h(t)a_x(yh(t), t))(h(t)y^2(2\mu_4(t) - h(t) \times \\
 & \times \mu_3(t)) + y(h^2(t)\mu_3(t) - 3\mu_5(t)) + 3\mu_5(t) - \\
 & - h(t)\mu_4(t)) + a(yh(t), t)(h^2(t)\mu_3(t) + 2h(t) \times \\
 & \times y(2\mu_4(t) - h(t)\mu_3(t)) - 3\mu_5(t))w(y, t)dy - \\
 & - h^2(t) \int_0^1 (c(yh(t), t)v(y, t) + f(yh(t), t)) \times \\
 & \times (h(t)y^2(2\mu_4(t) - h(t)\mu_3(t)) + (h^2(t)\mu_3(t) - \\
 & - 3\mu_5(t))y - h(t)\mu_4(t) + 3\mu_5(t))dy + \mu'_3(t) \times \\
 & \times (2\mu_4(t) - h^2(t)\mu_1(t)) + \mu'_4(t)(2\mu_4(t) - \\
 & - h^2(t)\mu_1(t)) + \mu'_5(t)(h(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) \Big] \times \\
 & \times \left[2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 4\mu_4^2(t) - h^2(t)\mu_3^2(t) + 3(\mu_3(t) - \right. \\
 & - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) \Big]^{-1}, \\
 & t \in [0, T], \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 3\mu_5(t))y - h(t)\mu_4(t) + 3\mu_5(t))dy + \mu'_3(t) \times \\
 & \times (3\mu_5(t) - 2h(t)\mu_4(t))h(t) + (h^2(t)\mu_3(t) - \\
 & - 3\mu_5(t))\mu'_4(t) + \mu'_5(t)(2\mu_4(t) - h(t)\mu_3(t)) \Big] \times \\
 & \times (2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - h^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + \\
 & + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t)) \times \\
 & \times \mu_5(t) \Big]^{-1}, \quad t \in [0, T], \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(t) = & \left[(3\mu_3(t)\mu_5(t) - 3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - \right. \\
 & - h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t) + 4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t) - \\
 & - 4\mu_4^2(t))\frac{a(0, t)}{h(t)}w(0, t) + (h^2(t)\mu_3^2(t) - \\
 & - 2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + \\
 & + 4\mu_4^2(t) - 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t)) \times \\
 & \times \frac{a(h(t), t)}{h(t)}w(1, t) + \int_0^1 (a_x(yh(t), t) \times \\
 & \times (h^2(t)y^2(2(\mu_1(t) - \mu_2(t))\mu_4(t) - \mu_3^2(t) + \\
 & + 2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)) + \\
 & + yh(t)(2\mu_3(t)\mu_4(t) + 3(\mu_2(t) - \mu_1(t)) \times \\
 & \times \mu_5(t) - h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - 2h(t)\mu_2(t) \times \\
 & \times \mu_4(t) + h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)) + 3\mu_3(t)\mu_5(t) - \\
 & - 3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - \\
 & - 4\mu_4^2(t) + 4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + a(yh(t), t) \times \\
 & \times (2yh(t)(2\mu_4(t)(\mu_1(t) - \mu_2(t)) - \mu_3^2(t) + \\
 & + 2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)) + \\
 & + 3\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - \\
 & - 2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + \\
 & + 2\mu_3(t)\mu_4(t))w(y, t)dy - h(t) \int_0^1 (v(y, t) \times \\
 & \times c(yh(t), t) + f(yh(t), t))(h^2(t)y^2(2\mu_4(t) \times \\
 & \times (\mu_1(t) - \mu_2(t)) + 2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - \\
 & - \mu_3^2(t) - h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)) + yh(t)(2\mu_3(t) \times \\
 & \times \mu_4(t) + 3\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - h^2(t) \times \\
 & \times \mu_2(t)\mu_3(t) - 2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + h^3(t) \times \\
 & \times \mu_1(t)\mu_2(t) - 3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) + 3\mu_3(t) \times \\
 & \times \mu_5(t) - h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - 4\mu_4^2(t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t))dy + (3\mu_3(t)\mu_5(t) - \\
& - 4\mu_4^2(t) - 3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) + 4h^2(t)\mu_2(t) \times \\
& \times \mu_4(t) - h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t))\mu_3'(t) + \mu_4'(t) \times \\
& \times (3(\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_5(t) - h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - \\
& - 2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + \\
& + 2\mu_3(t)\mu_4(t)) + \mu_5'(t)(2(\mu_1(t) - \mu_2(t)) \times \\
& \times \mu_4(t) + 2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - h^2(t)\mu_1(t) \times \\
& \times \mu_2(t) - \mu_3^2(t)) \Big] (\mu_2(t)(2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - \\
& - h^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + \\
& + 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t))^{-1}, \\
& t \in [0, T]. \quad (19)
\end{aligned}$$

Отже, задачу (5)–(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (11), (15)–(19) відносно невідомих $(h(t), v(y, t), w(y, t), b_1(t), b_2(t), p(t))$. Задача (5)–(10) та система рівнянь (11), (15)–(19) є еквівалентними у такому сенсі: якщо $(h, b_1, b_2, v) \in C^1[0, T] \times (C[0, T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(h, v, w, b_1, b_2, p) \in C[0, T] \times (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0, T])^3$ є розв'язком системи рівнянь (11), (15)–(19). Покажемо, що правильним є і обернене твердження.

Нехай $(h(t), v(y, t), w(y, t), b_1(t), b_2(t), p(t))$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (11), (15)–(19). Продиференціюємо (15) за змінною y . Праві частини отриманої рівності та рівності (16) співпадають, тому можемо зробити висновок, що $w(y, t) = v_y(y, t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
v_t = & \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{y(h(t)b_1(t) + p(t))}{h(t)} + \right. \\
& \left. + \frac{b_2(t)}{h(t)} \right) v_y + c(yh(t), t)v + f(yh(t), t), \\
& (y, t) \in Q_T, \quad (20)
\end{aligned}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0, T]$ функцій $b_1(t), b_2(t), h(t), p(t)$. З рівності (11) випливає умова (8). Подано (17)–(19) у вигляді

$$b_1(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_3(t)) + b_2(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& + p(t)\mu_2(t) = \int_0^1 a_x(yh(t), t)v_y(y, t)dy + \mu_3'(t) - \\
& - h(t) \int_0^1 (c(yh(t), t)v(y, t) + f(yh(t), t))dy + \\
& + \frac{a(0, t)v_y(0, t) - a(h(t), t)v_y(1, t)}{h(t)}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1(t)(h^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) + \\
& + b_2(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_3(t)) + p(t)h(t)\mu_2(t) = \\
& = -a(h(t), t)v_y(1, t) + \int_0^1 (yh(t)a_x(yh(t), t) + \\
& + a(yh(t), t))v_y(y, t)dy - h^2(t) \int_0^1 y(v(y, t) \times \\
& \times c(yh(t), t) + f(yh(t), t))dy + \mu_4'(t), \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1(t)(h^3(t)\mu_2(t) - 3\mu_5(t)) + \\
& + b_2(t)(h^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) + p(t)h^2(t)\mu_2(t) = \\
& = -h(t)a(h(t), t)v_y(1, t) + h(t) \int_0^1 yv_y(y, t) \times \\
& \times (yh(t)a_x(yh(t), t) + 2a(yh(t), t))dy - \\
& - h^3(t) \int_0^1 y^2(c(yh(t), t)v(y, t) + \\
& + f(yh(t), t))dy + \mu_5'(t). \quad (23)
\end{aligned}$$

Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати (11) за t . Використавши те, що функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (20), та віднявши від отриманої рівності (21), одержимо

$$(h'(t) - p(t)) \frac{\mu_3(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = h'(t)$, $h \in C^1[0, T]$ і функція $v(y, t)$ задовольняє рівняння (5). Зведемо (22), (23) до вигляду

$$2h'(t)h(t) \int_0^1 yv(y, t)dy + h^2(t) \int_0^1 y \left(f(yh(t), t) +$$

$$+c(yh(t), t)v(y, t) + \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)}v_{yy}(y, t) + \frac{yh(t)b_1(t) + b_2(t) + yh'(t)}{h(t)}v_y(y, t) dy = \mu'_4(t),$$

$$3h'(t)h^2(t) \int_0^1 y^2 v(y, t) dy + h^3(t) \int_0^1 y^2 \left(v(y, t) \times c(yh(t), t) + f(yh(t), t) + \frac{a(yh(t), t)}{h^2(t)}v_{yy}(y, t) + \frac{yh(t)b_1(t) + b_2(t) + yh'(t)}{h(t)}v_y(y, t) \right) dy = \mu'_5(t).$$

Використавши рівняння (5) та проінтегрувавши від 0 до t , одержуємо умови (9), (10). Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (11), (15)–(19) у вище зазначеному сенсі доведено.

Подамо знаменник у (17)–(19) у вигляді

$$2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - h^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t) = \frac{h^4(t)}{2} \left[\int_0^1 (1-y)(1-2y)w(y, t) dy \times \int_0^1 y(1-y)w(y, t) dy + \int_0^1 (1-y)w(y, t) dy \times \int_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y, t) dy \right].$$

Згідно з припущеннями теореми з (16) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1 , $0 < t_1 \leq T$, що

$$w(y, t) \geq \frac{h_0}{2} \min_{[0,1]} \varphi'(yh_0) > 0, \quad (y, t) \in \bar{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 (1-y)w(y, t) dy > 0, \quad t \in [0, t_1],$$

$$\int_0^1 y(1-y)w(y, t) dy > 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Подамо вирази $\int_0^1 (1-y)(1-2y)w(y, t) dy$,

$\int_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y, t) dy$ у вигляді

$$\int_0^1 (1-y)(1-2y)w(y, t) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y) \times ((1-y)w(y, t) - yw(1-y, t)) dy, \quad (24)$$

$$\int_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y, t) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} y(1-y) \times (1-2y)(w(1-y, t) - w(y, t)) dy. \quad (25)$$

Підставимо (16) в (24). Всі доданки, крім першого, при $t \rightarrow 0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число t_2 , $0 < t_2 \leq T$, що

$$\int_0^1 (1-y)(1-2y)w(y, t) dy \geq \frac{h_0}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y) \times ((1-y)\varphi'(yh_0) - y\varphi'(h_0(1-y))) dy > 0, \quad t \in [0, t_2].$$

Підставивши (16) в (25), можемо зробити висновок про існування такого числа t_3 , $0 < t_3 \leq T$, що

$$\int_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y, t) dy \geq \frac{h_0}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} y(1-y) \times (1-2y)(\varphi'(h_0(1-y)) - \varphi'(yh_0)) dy > 0, \quad t \in [0, t_3].$$

Таким чином,

$$2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t) + 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t) - h^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) \geq C_0 > 0, \quad t \in [0, t_4],$$

$$t_4 = \min\{t_1, t_2, t_3\}. \quad (26)$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (11), (15)–(19).

Позначимо $W(t) = \max_{y \in [0,1]} |w(y,t)|$. З (17)–(19), враховуючи (12), (26), одержуємо

$$|b_1(t)| \leq C_1 + C_2 W(t), \quad |b_2(t)| \leq C_3 + C_4 W(t),$$

$$|p(t)| \leq C_5 + C_6 W(t) \quad t \in [0, t_4]. \quad (27)$$

Використовуючи (12), (27) та оцінки Функції Гріна [10], з (16) отримуємо

$$W(t) \leq C_7 + C_8 \int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_4].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [11]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, t_5],$$

де $t_5, 0 < t_5 \leq t_4$, визначається сталими C_7, C_8 . Тоді

$$|b_1(t)| \leq C_1 + C_2 M_2 \equiv B_1,$$

$$|b_2(t)| \leq C_3 + C_4 M_2 \equiv B_2,$$

$$|p(t)| \leq C_5 + C_6 M_2 \equiv B_3, \quad t \in [0, t_5].$$

Подамо систему рівнянь (11), (15)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (h(t), v(y,t), w(y,t), b_1(t), b_2(t), p(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (11), (15)–(19).

Візьмемо довільні (h, v, w, b_1, b_2, p) , для яких справедливі вище встановлені оцінки. Оцінимо праву частину рівняння (16):

$$|P_3 w| \leq C_9 + C_{10} \sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_6, 0 < t_6 \leq T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_9 + C_{10} \sqrt{t_6} \leq M_2$, отримаємо

$$|P_3 w| \leq M_2, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0, t_6].$$

Позначимо $N = \{(h, v, w, b_1, b_2, p) \in C[0, T_0] \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^3 : H_0 \leq h(t) \leq H_1, M_0 \leq v(y,t) \leq M_1,$

$|w(y,t)| \leq M_2, |b_1(t)| \leq B_1, |b_2(t)| \leq B_2, |p(t)| \leq B_3\}$, де $T_0 = \min\{t_5, t_6\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N , доводиться як в [12].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок системи рівнянь (11), (15)–(19) і, відповідно, розв'язок задачі (5)–(10) при $(y,t) \in \overline{Q}_{T_0}$.

3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

$a \in C^{2,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0, \infty) \times [0, T]$, $c, f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 2, 3$, $t \in [0, T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [0, \infty)$, $(h_0 - x)\varphi'(x) - x\varphi'(h_0 - x) > 0$, $\varphi'(h_0 - x) - \varphi'(x) > 0$, $x \in \left[0, \frac{h_0}{2}\right)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0, h_0]$.

Тоді можна вказати таке число t_4 , $0 < t_4 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків $(h, b_1, b_2, v) \in C^1[0, t_4] \times (C[0, t_4])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_4})$, $h(t) > 0$, $t \in [0, t_4]$.

Доведення. Припустимо, що $(h_i(t), b_{1i}(t), b_{2i}(t), v_i(y,t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{b_{2i}(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad \frac{h'_i(t)}{h_i(t)} = s_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$r(t) = b_{11}(t) - b_{12}(t)$, $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$. Функції $r(t), q(t), s(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + (y(b_{11}(t) + s_1(t)) + q_1(t)) v_y + c(yh_1(t), t) v + \left(\frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t), t)}{h_2^2(t)} \right) v_{2yy} + (y(r(t) + s(t)) +$$

$$+q(t)v_{2y} + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t))v_2 + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t), (y, t) \in Q_T, \quad (28)$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (29)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (30)$$

$$\int_0^1 v(y, t) dy = \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right),$$

$$\int_0^1 yv(y, t) dy = \mu_4(t) \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right),$$

$$\int_0^1 y^2v(y, t) dy = \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_1^3(t)} - \frac{1}{h_2^3(t)} \right),$$

$$t \in [0, T]. \quad (31)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t), t)}{h_1^2(t)}v_{yy} + (y(b_{11}(t) + s_1(t)) + q_1(t))v_y + c(yh_1(t), t)v$$

з урахуванням умов (29), (30) функцію $v(y, t)$ подамо у вигляді

$$v(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + (\eta(r(\tau) + s(\tau)) + q(\tau))v_{2\eta}(\eta, \tau) + (c(\eta h_1(\tau), \tau) - c(\eta h_2(\tau), \tau)) \times v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau) \right] d\eta d\tau,$$

$$(y, t) \in \bar{Q}_T. \quad (32)$$

Оскільки для $b_{1i}(t)$, $b_{2i}(t)$, $h'_i(t)$, $i = 1, 2$, справджуються рівності, аналогічні до (17)–(19), то звідси отримуємо

$$s(t)\mu_2(t) + q(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + r(t) \left(\mu_2(t) - \frac{\mu_3(t)}{h_1(t)} \right) = \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left(b_{12}(t)\mu_3(t) + \mu'_3(t) + \int_0^1 a_x(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t) dy \right) +$$

$$+ (a(0, t)v_{2y}(0, t) - a(h_2(t), t)v_{2y}(1, t)) \times \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) - \frac{v_{2y}(1, t)}{h_1^2(t)} (a(h_1(t), t) - a(h_2(t), t)) + \frac{1}{h_1(t)} \int_0^1 ((a_x(yh_1(t), t) - a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t) + a_x(yh_1(t), t) \times v_y(y, t)) dy - \int_0^1 (c(yh_1(t), t)v(y, t) + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t))v_2(y, t) + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t)) dy + a(0, t) \times \frac{v_y(0, t)}{h_1^2(t)} - a(h_1(t), t) \frac{v_y(1, t)}{h_1^2(t)}, t \in [0, T], \quad (33)$$

$$q(t)(h_1(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) + r(t) \left(\mu_3(t) - \frac{2\mu_4(t)}{h_1(t)} \right) = \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left(\mu'_4(t) + \int_0^1 v_{2y}(y, t)(h_2(t)(y-1)a_x(yh_2(t), t) + a(yh_2(t), t)) dy - a(0, t)v_{2y}(0, t) + 2b_{12}(t)\mu_4(t) \right) + \left(\int_0^1 (1-y)(v_2(y, t) \times c(yh_2(t), t) + f(yh_2(t), t)) dy + \frac{1}{h_1(t)} \times \int_0^1 (y-1)a_x(yh_2(t), t)v_{2y}(y, t) dy - q_2(t)\mu_1(t) \right) (h_1(t) - h_2(t)) - a(0, t) \times \frac{v_y(0, t)}{h_1(t)} + \frac{1}{h_1(t)} \int_0^1 (h_1(t)a_x(yh_1(t), t) \times (y-1) + a(yh_1(t), t))v_y(y, t) dy + \frac{1}{h_1(t)} \times \int_0^1 (h_1(t)(a_x(yh_1(t), t) - a_x(yh_2(t), t)) \times (y-1) + a(yh_1(t), t) - a(yh_2(t), t)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times v_{2y}(y, t)dy + h_1(t) \int_0^1 (1 - y)(c(yh_1(t), t) \times \\ & \times v(y, t) + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t)) \times \\ & \times v_2(y, t) + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t))dy, \\ & t \in [0, T], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(t) = & \left[(h_2(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t))a(0, t)v_{2y}(0, t) + \right. \\ & + \int_0^1 v_{2y}(y, t)(h_2(t)a_x(yh_2(t), t)(h_2(t)y^2 \times \\ & \times (h_2(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) + y(2\mu_4(t) - h_2^2(t) \times \\ & \times \mu_1(t) + h_2(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t)) + (2\mu_4(t) - \\ & - h_2^2(t)\mu_1(t) + 2yh_2(t)(h_2(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))) \times \\ & \times a(yh_2(t), t))dy - h_2^2(t) \int_0^1 (c(yh_2(t), t) \times \\ & \times v_2(y, t) + f(yh_2(t), t))(h_2(t)y^2(h_2(t) \times \\ & \times \mu_1(t) - \mu_3(t)) + y(2\mu_4(t) - h_2^2(t)\mu_1(t)) + \\ & + h_2(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t))dy + (h_2(t)\mu_3(t) - \\ & - 2\mu_4(t))h_2(t)\mu_3'(t) + \mu_4'(t)(2\mu_4(t) - h_2^2(t) \times \\ & \times \mu_1(t) + \mu_5'(t)(h_2(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))) \left. \right] \times \\ & \times ((h_1(t) - h_2(t))(3\mu_1(t)\mu_5(t) - 2\mu_3(t) \times \\ & \times \mu_4(t) + (h_1^2(t) - h_2^2(t))(\mu_3^2(t) - 2\mu_1(t) \times \\ & \times \mu_4(t)))((2h_1(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 4\mu_4^2(t) - \\ & - h_1^2(t)\mu_3^2(t) + 3(\mu_3(t) - h_1(t)\mu_1(t))\mu_5(t) + \\ & + 2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t))(2h_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - \\ & - 4\mu_4^2(t) - h_2^2(t)\mu_3^2(t) + 3(\mu_3(t) - h_2(t) \times \\ & \times \mu_1(t))\mu_5(t) + 2h_2^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)))^{-1} + \\ & + \left[(h_1(t) - h_2(t))(\mu_1(t)\mu_5'(t) - 2\mu_3'(t)\mu_4(t) + \right. \\ & + \mu_3(t)a(0, t)v_{2y}(0, t)) + (h_1^2(t) - h_2^2(t)) \times \\ & \times (\mu_3(t)\mu_3'(t) - \mu_1(t)\mu_4'(t)) + (h_1(t)\mu_3(t) - \\ & - 2\mu_4(t))a(0, t)v_y(0, t) + h_1^2(t) \int_0^1 (h_1(t)y^2 \times \\ & \times (\mu_3(t) - h_1(t)\mu_1(t)) + y(h_1^2(t)\mu_1(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 2\mu_4(t)) - h_1(t)\mu_3(t) + 2\mu_4(t))(c(yh_1(t), t) \times \\ & \times v(y, t) + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t)) \times \\ & \times v_2(y, t) + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t))dy + \\ & + \int_0^1 (2\mu_4(t)(1 - y)(h_1^2(t) - h_2^2(t)) + \mu_3(t) \times \\ & \times (y^2 - 1)(h_1^3(t) - h_2^3(t)) + \mu_1(t)y(1 - y) \times \\ & \times (h_1^4(t) - h_2^4(t)))(c(yh_2(t), t)v_2(y, t) + \\ & + f(yh_2(t), t))dy + \int_0^1 (a(yh_1(t), t)(2\mu_4(t) - \\ & - h_1^2(t)\mu_1(t) + 2yh_1(t)(h_1(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))) + \\ & + h_1(t)a_x(yh_1(t), t)(h_1(t)y^2(h_1(t)\mu_1(t) - \\ & - \mu_3(t)) + y(2\mu_4(t) - h_1^2(t)\mu_1(t)) - 2\mu_4(t) + \\ & + h_1(t)\mu_3(t))v_y(y, t)dy + \int_0^1 ((a(yh_1(t), t) - \\ & - a(yh_2(t), t))(2\mu_4(t) - h_1^2(t)\mu_1(t) + 2y \times \\ & \times h_1(t)(h_1(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))) + h_1(t)(h_1(t) \times \\ & \times y^2(h_1(t)\mu_1(t) - \mu_3(t)) + y(2\mu_4(t) - \\ & - h_1^2(t)\mu_1(t) + h_1(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t)) \times \\ & \times (a_x(yh_1(t), t) - a_x(yh_2(t), t)) + 2(h_1(t) - \\ & - h_2(t))(\mu_4(t)(y - 1)a_x(yh_2(t), t) - y\mu_3(t) \times \\ & \times a(yh_2(t), t) + (h_1^2(t) - h_2^2(t))(\mu_3(t) \times \\ & \times (1 - y^2)a_x(yh_2(t), t) + (2y - 1)\mu_1(t) \times \\ & \times a(yh_2(t), t) + (h_1^3(t) - h_2^3(t))\mu_1(t)(y^2 - \\ & - y)a_x(yh_2(t), t))v_{2y}(y, t)dy \left. \right] (2h_1(t)\mu_3(t) \times \\ & \times \mu_4(t) - 4\mu_4^2(t) - h_1^2(t)\mu_3^2(t) + 3(\mu_3(t) - \\ & - h_1(t)\mu_1(t))\mu_5(t) + 2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t))^{-1}, \\ & t \in [0, T], \quad (35) \end{aligned}$$

Згідно з (26) маємо

$$\begin{aligned} & 2h_i(t)\mu_3(t)\mu_4(t) + 3(\mu_3(t) - h_i(t)\mu_1(t))\mu_5(t) - \\ & - h_i^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h_i^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) \geq \\ & \geq C_0 > 0, \quad t \in [0, t_4], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Продиференціювавши (32) за змінною y , одержуємо

$$v_y(y, t) = \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau), \tau)}{h_1^2(\tau)} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a(\eta h_2(\tau), \tau)}{h_2^2(\tau)} v_{2\eta}(\eta, \tau) + (\eta(r(\tau) + s(\tau)) + \\
& + q(\tau)) v_{2\eta}(\eta, \tau) + (c(\eta h_1(\tau), \tau) - c(\eta h_2(\tau), \tau)) \times \\
& \times v_2(\eta, \tau) + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau) \Big] d\eta d\tau, \\
& (y, t) \in \overline{Q}_T. \quad (36)
\end{aligned}$$

Виразимо $h_i(t)$ через $s_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0) \exp \left(\int_0^t s_i(\tau) d\tau \right), \quad i = 1, 2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Звідси, використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{y+\tau(x-y)} d\tau,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0} \int_0^t s(\tau) d\tau \times \\
& \times \int_0^1 \exp \left(-\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau)) d\tau \right) d\sigma. \quad (37)
\end{aligned}$$

Аналогічно (37) можемо використати для зображення різниць $\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}$, $h_1(t) - h_2(t)$, $h_1^2(t) - h_2^2(t)$, $h_1^3(t) - h_2^3(t)$, $h_1^4(t) - h_2^4(t)$.

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$\begin{aligned}
& f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t) = y(h_1(t) - h_2(t)) \times \\
& \times \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t) d\sigma, \quad (38)
\end{aligned}$$

що справедлива і для $a(yh_i(t), t)$, $a_x(yh_i(t), t)$, $c(yh_i(t), t)$, $i = 1, 2$.

Використавши (37), (38) і підставивши (32), (36) в (33)–(35), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольterra другого роду відносно невідомих $s(t), q(t), r(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. Звідси отримуємо, що

$s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$, $t \in [0, t_4]$. Тому $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $b_{11}(t) = b_{12}(t)$, $t \in [0, t_4]$. Отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_{21}(t) = b_{22}(t)$, $t \in [0, t_4]$. Враховуючи це в задачі (28)–(30), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in \overline{Q}_{t_4}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cannon J. Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation / J. Cannon, S. Perez-Esteve // Inverse Problems. – 1994. – **10**, N. 3. – P. 521–531.
2. Hong-Ming Yin. Global solvability for some parabolic inverse problems / Yin Hong-Ming // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – P. 392–403.
3. Trong D.D. Coefficient identification for a parabolic equation / D.D. Trong, D.D. Ang // Inverse Problems. – 1994. – **10**, N. 3. – P. 733–752.
4. Іванчов М.І. Однозначне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов / М.І. Іванчов, Н.В. Пабирицька // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5 – С. 589–596.
5. Пабирицька Н.В. Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь / Н.В. Пабирицька // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.
6. Баранська І. Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами / І. Баранська // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
7. Іванчов М.І. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності / М.І. Іванчов // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
8. Снітко Г.А. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / Г.А. Снітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7–18.
9. Снітко Г.А. Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею / Г.А. Снітко // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". "Фізико-математичні науки". – 2009. – Вип. 643, № 643. – С. 45–52.
10. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралъцева // Москва: Наука, 1967. – 736 с.
11. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
12. Снітко Г.А. Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / Г.А. Снітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37–47.