

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

$$x'' + F(x', x) = y(t)$$

Наведено умови існування обмежених на \mathbb{R} розв'язків нелінійного диференціального рівняння $x'' + F(x', x) = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

We obtain a conditions for the existence of bounded on the \mathbb{R} solutions of nonlinear differential equation $x'' + F(x', x) = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Основний об'єкт досліджень. По-значимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на \mathbb{R} функцій $x = x(t)$ зі значеннями в \mathbb{R} із нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|,$$

а через C^m , де $m \in \mathbb{N}$, – банаховий простір елементів x простору C^0 , для кожного з яких $\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^m x}{dt^m} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^m} = \sup_{k=0, m} \left\| \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0}.$$

Тут $\frac{d^0 x}{dt^0} = x$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція і $h \in C^0$.

У цьому рівнянні функція F може бути недиференційовною в усіх точках множини \mathbb{R}^2 .

Нас цікавитимуть умови існування обмежених розв'язків рівняння (1).

Зазначимо, що нелінійні диференціальні рівняння другого порядку були об'єктом досліджень багатьох математиків (див., наприклад, [1]–[6]). Особлива увага була приділена з'ясуванню умов існування періодичних розв'язків цих рівнянь.

2. Основний результат. При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати лінійний оператор $L_{k_1, k_2} : C^2 \rightarrow C^0$, що визначається рівністю

$$(L_{k_1, k_2} x)(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + k_2 x(t), \quad (2)$$

де k_1 і k_2 – такі дійсні числа, що цей оператор має неперервний обернений L_{k_1, k_2}^{-1} , і $x \in C^2$. Множину всіх таких операторів позначимо через \mathcal{E} .

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $L_{k_1, k_2} \in \mathcal{E}$, що виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \max_{|x_1| \leq r, |x_2| \leq r} |F(x_1, x_2) - (k_1 x_1 + k_2 x_2)| &\leq \\ &\leq \frac{r}{\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}} - H. \end{aligned} \quad (3)$$

Тоді для кожної функції $h \in C^0$ рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x \in C^2$.

Це теорема – окремий випадок теореми про існування обмежених розв'язків нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з використанням локальних лінійних апроксимацій рівнянь [7].

Щоб можна було застосовувати теорему 1 до рівняння (1), потрібно знати, коли оператор $L_{k_1, k_2} : C^2 \rightarrow C^0$ має обернений неперервний оператор L_{k_1, k_2}^{-1} , зображення оператора L_{k_1, k_2}^{-1} і норму $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$. Тому далі наведемо умови неперервної оборотності оператора L_{k_1, k_2} , з'ясуємо, в якому вигляді

ді подається оператор L_{k_1, k_2}^{-1} , і знайдемо для цього оператора норму $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$.

3. Умови оборотності L_{k_1, k_2} і зображення L_{k_1, k_2}^{-1} . Розглянемо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є дійсні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \quad (5)$$

якщо

$$k_1^2 - 4k_2 \geq 0,$$

і комплексні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}, \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}, \quad (7)$$

якщо

$$k_1^2 - 4k_2 < 0.$$

Згідно з [8] визначений рівністю (2) оператор L_{k_1, k_2} має неперервний обернений L_{k_1, k_2}^{-1} тоді і тільки тоді, коли

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} = \emptyset. \quad (8)$$

Розглянемо випадки:

- 1) $k_1 > 0, k_2 > 0, k_1^2 > 4k_2$;
- 2) $k_1 < 0, k_2 > 0, k_1^2 > 4k_2$;
- 3) $k_1 > 0, k_1^2 = 4k_2$;
- 4) $k_1 < 0, k_1^2 = 4k_2$;
- 5) $k_1 > 0, k_1^2 < 4k_2$;
- 6) $k_1 < 0, k_1^2 < 4k_2$;
- 7) $k_2 < 0$.

Очевидно, що тільки в цих випадках виконується співвідношення (8).

Легко переконатися, що оператор L_{k_1, k_2}^{-1} у випадках 1) і 5) подається у вигляді

$$\begin{aligned} (L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) &= \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} y(s) ds, \end{aligned} \quad (9)$$

у випадках 2) і 6) – у вигляді

$$\begin{aligned} (L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) &= \\ &= \int_t^{+\infty} \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} y(s) ds, \end{aligned} \quad (10)$$

у випадку 3) – у вигляді

$$(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) = \int_{-\infty}^t (t-s)e^{\lambda_1(t-s)} y(s) ds, \quad (11)$$

у випадку 4) – у вигляді

$$(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) = \int_t^{+\infty} (s-t)e^{\lambda_1(t-s)} y(s) ds \quad (12)$$

і у випадку 7) – у вигляді

$$\begin{aligned} (L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) &= \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} y(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} ds + \int_t^{+\infty} \frac{e^{\lambda_2(t-s)} y(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} ds, \end{aligned} \quad (13)$$

де $y \in C^0$.

4. Знаходження норми $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$. Визначимо норму $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$ в кожному з розглянутих випадків.

4.1. Допоміжне твердження. При знаходженні норми $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$ будемо використовувати співвідношення (9)–(13) та наступне твердження.

Лема 1. Нехай функція $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ і для деяких чисел $N \geq 1$ і $\gamma > 0$ задовольняє співвідношення

$$|G(t)| \leq Ne^{-\gamma|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Тоді для норми $\|\Upsilon\|_{L(C^0, C^0)}$ лінійного неперервного оператора $\Upsilon : C^0 \rightarrow C^0$, що визначається рівністю

$$(\Upsilon x)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s) ds,$$

де $x \in C^0$, виконується співвідношення

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0, C^0)} = \int_{\mathbb{R}} |G(s)| ds. \quad (15)$$

Доведення. Нагадаємо, що

$$\begin{aligned} & \|\Upsilon\|_{L(C^0, C^0)} = \\ &= \sup_{\|x\|_{C^0}=1, t \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Оскільки для кожного нормованого елемента $x \in C^0$ ($\|x\|_{C^0} = 1$) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\|_{C^0}=1, t \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right| \leq \\ & \leq \sup_{\|x\|_{C^0}=1, t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |G(t-s)||x(s)|ds \leq \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |G(t-s)|ds = \int_{\mathbb{R}} |G(s)|ds, \end{aligned}$$

то

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0, C^0)} \leq \int_{\mathbb{R}} |G(s)|ds. \quad (17)$$

Далі використаємо очевидне співвідношення

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\|_{C^0}=1, t \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right| \geq \\ & \geq \sup_{\|x\|_{C^0}=1} \left| \int_{\mathbb{R}} G(-s)x(s)ds \right| \end{aligned} \quad (18)$$

і неперервні й обмежені на \mathbb{R} функції

$$y_n(t) = \frac{z_n(t)}{\|z_n\|_{C^0}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де

$$z_n(t) = \begin{cases} 2^{n+1} \sqrt{\sin |t| G(-t)}, & \text{якщо } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2^{n+1} \sqrt{G(-t)}, & \text{якщо } |t| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\|y_n\|_{C^0} = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

і

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } G(-t) > 0, \\ 0, & \text{якщо } t = 0 \text{ або } G(-t) = 0, \\ -1, & \text{якщо } G(-t) < 0. \end{cases}$$

Тому завдяки (14)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} G(-s)z_n(s)ds \right| = \\ &= \int_{\mathbb{R}} G(-s) \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(s)ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |G(-s)|ds = \int_{\mathbb{R}} |G(s)|ds. \end{aligned}$$

Із цього співвідношення та співвідношень (16) і (18) випливає, що також

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0, C^0)} \geq \int_{\mathbb{R}} |G(s)|ds.$$

Тому на підставі (17) виконується співвідношення (15).

Лему 1 доведено.

Далі знайдемо норму $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$.

4.2. Випадок $k_1 > 0, k_2 > 0, k_1^2 > 4k_2$.
Визначимо $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$, урахувавши, що

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = \max\{a, b\},$$

де

$$\begin{aligned} a &= \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \|L_{k_1, k_2}^{-1}y\|_{C^0}, \\ b &= \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)} > 0,$$

якщо $s < t$, то завдяки співвідношенню (9) і лемі 1

$$\begin{aligned} & \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \|L_{k_1, k_2}^{-1}y\|_{C^0} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^0 (e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}) ds = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{k_2}. \end{aligned}$$

Тут використано те, що $\lambda_1 \lambda_2 = k_2$.

Отже,

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)} = \frac{1}{k_2}. \quad (19)$$

Тепер визначимо $\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0}$.

Використаємо співвідношення

$$\begin{aligned} & \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} = \\ & = \int_{-\infty}^t \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t-s)} - \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} y(s) ds, \quad (20) \end{aligned}$$

що випливає з (9). Позначимо через t^* додатне число, для якого

$$\lambda_2 e^{\lambda_2 t^*} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t^*} = 0. \quad (21)$$

Таке число існує, оскільки функція

$$\mu(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

неперервна на проміжку $[0, +\infty)$,

$$\mu(0) > 0$$

і

$$\mu(t) < 0$$

для всіх досить великих додатних t . Тому на підставі (20) і леми 1

$$\begin{aligned} & \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0} = \\ & = \int_{-\infty}^0 \frac{|\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}|}{\lambda_2 - \lambda_1} ds = \\ & = \int_0^{+\infty} \frac{|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}|}{\lambda_2 - \lambda_1} dt = \\ & = \int_0^{t^*} \frac{|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}|}{\lambda_2 - \lambda_1} dt + \\ & + \int_{t^*}^{+\infty} \frac{|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}|}{\lambda_2 - \lambda_1} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{t^*} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} dt +$$

$$+ \int_{t^*}^{+\infty} \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} dt = \frac{2(e^{\lambda_2 t^*} - e^{\lambda_1 t^*})}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Оскільки на підставі (21)

$$t^* = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

то

$$\begin{aligned} & \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0} = \\ & = \frac{2 \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (22) \end{aligned}$$

Отже, завдяки (19) і (22) справджується рівність

$$\begin{aligned} & \|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = \\ & = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \frac{2 \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\}. \end{aligned}$$

На підставі (4) і (5)

$$\begin{aligned} & \|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = \\ & = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \omega_1(k_1, k_2) \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} & \omega_1(k_1, k_2) = \\ & = \frac{2 \left(\frac{k_1^2 - 2k_2 + |k_1| \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2k_2} \right)^{\frac{-|k_1| + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2\sqrt{k_1^2 - 4k_2}}}}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}} - \\ & - \frac{2 \left(\frac{k_1^2 - 2k_2 + |k_1| \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2k_2} \right)^{\frac{-|k_1| - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2\sqrt{k_1^2 - 4k_2}}}}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}}. \quad (24) \end{aligned}$$

4.3. Випадок $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, $k_1^2 > 4k_2$.

У цьому випадку для $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$ також виконується співвідношення (23). Це

можна встановити безпосередньо, використовуючи (10) замість (9). Можна також звести цей випадок до попереднього випадку заміною t на $-t$.

4.4. Випадок $k_1 > 0$, $k_1^2 = 4k_2$. Спочатку знайдемо $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)}$. Використовуючи (11) і лему 1, отримуємо

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)} = \int_{-\infty}^0 s e^{-\lambda_1 s} ds = \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{k_2}.$$

Отже,

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)} = \frac{1}{k_2}. \quad (25)$$

Далі визначимо $\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0}$.

Використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} &= \\ &= \int_{-\infty}^t (1 + \lambda_1(t-s)) e^{\lambda_1(t-s)} y(s) ds, \end{aligned}$$

що впливає з (11), та додатне число

$$\tau^* = -\lambda_1^{-1}, \quad (26)$$

на підставі 1 отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0} &= \\ &= \int_{-\infty}^0 |(1 - \lambda_1 s) e^{-\lambda_1 s}| ds = \\ &= \int_0^{+\infty} |1 + \lambda_1 \tau| e^{\lambda_1 \tau} d\tau = \\ &= \int_0^{\tau^*} (1 + \lambda_1 \tau) e^{\lambda_1 \tau} d\tau - \int_{\tau^*}^{+\infty} (1 + \lambda_1 \tau) e^{\lambda_1 \tau} d\tau = \\ &= (\tau e^{\lambda_1 \tau}) \Big|_0^{\tau^*} - (\tau e^{\lambda_1 \tau}) \Big|_{\tau^*}^{+\infty} = 2\tau^* e^{\lambda_1 \tau^*}. \end{aligned}$$

Тому на підставі (26) і того, що $\lambda_1^2 = k_2$

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0} = \frac{2}{e\sqrt{k_2}}.$$

Із цього співвідношення і (25) випливає, що

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \frac{2}{e\sqrt{k_2}} \right\}. \quad (27)$$

4.5. Випадок $k_1 < 0$, $k_1^2 = 4k_2$. Цей випадок зводиться до попереднього випадку заміною t на $-t$. Тому також виконується рівність (27).

4.6. Випадок $k_1 > 0$, $k_1^2 < 4k_2$. Визначимо $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}$, використавши (9). Оскільки на підставі (6) і (7)

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 \tau} - e^{\lambda_1 \tau} &= \\ &= e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left(e^{i\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}\tau} - e^{-i\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}\tau} \right) = \\ &= 2ie^{-\frac{k_1}{2}\tau} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}\tau \end{aligned} \quad (28)$$

і

$$\lambda_2 - \lambda_1 = i\sqrt{4k_2 - k_1^2},$$

то

$$\begin{aligned} (L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) &= \\ &= 2 \int_t^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}(t-s)} \frac{\sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}(t-s)}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} y(s) ds \end{aligned}$$

і тому

$$\begin{aligned} (L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) &= \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \frac{\sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}\tau}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} y(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

для всіх $y \in C^0$ і $t \in \mathbb{R}$.

Отже, на підставі леми 1

$$\begin{aligned} \|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}\tau \right| d\tau. \end{aligned}$$

Функція $\left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right|$ періодична з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}. \quad (29)$$

Тому

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right| d\tau = \\ & = 2 \int_0^T e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \frac{\left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right|}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} d\tau \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}nT} \right) = \\ & = \int_0^T e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \frac{\left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right|}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} d\tau \frac{2}{1 - e^{-\frac{k_1}{2}T}} = \\ & = \int_0^T e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \frac{\left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right|}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} d\tau \frac{2}{1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}}. \end{aligned}$$

На підставі (28) і (29)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_0^T e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right| d\tau = \\ & = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^T (e^{\lambda_2\tau} - e^{\lambda_1\tau}) d\tau = \\ & = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_2} - \frac{e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1} \right) \Big|_0^T = \\ & = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{\lambda_2T}}{\lambda_2} - \frac{e^{\lambda_1T}}{\lambda_1} \right) + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \\ & = \frac{1}{k_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2T} - \lambda_2 e^{\lambda_1T}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \\ & = \frac{1}{k_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 e^{-\frac{k_1}{2}T} - \lambda_2 e^{-\frac{k_1}{2}T}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \\ & = \frac{1}{k_2} \left(1 + e^{-\frac{k_1}{2}T} \right) = \frac{1}{k_2} \left(1 + e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right). \end{aligned}$$

Тут використано те, що

$$e^{\lambda_1 T} = e^{\lambda_2 T} = e^{-\frac{k_1}{2}T}.$$

Отже,

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^0)} = \frac{1 + e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}}{k_2 \left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right)}. \quad (30)$$

Тепер визначимо $\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0}$. Використаємо (6), (7) і подамо (20) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cdot \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} = \\ & = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left(\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cos \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau - \right. \\ & \quad \left. - \frac{k_1}{2\sqrt{k_2}} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right) y(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left(\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}} \right)^2 = 1,$$

то можна використати співвідношення

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}, \quad \cos \alpha = \frac{k_1}{2\sqrt{k_2}},$$

де

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} = \arccos \frac{k_1}{2\sqrt{k_2}}.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cos \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau - \\ & \quad - \frac{k_1}{2\sqrt{k_2}} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau = \\ & = \sin \left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right). \end{aligned}$$

Тому для кожної функції $y \in C^0$

$$\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cdot \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \sin \left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right) y(t - \tau) d\tau.$$

Отже, завдяки лемі 1

$$\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cdot \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left| \sin \left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right) \right| d\tau.$$

Визначимо праву частину цієї рівності. Використаємо нову змінну інтегрування s , що визначається рівністю

$$\alpha - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau = -\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s.$$

Також використаємо число

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}.$$

Тоді на підставі (30)

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \left| \sin \left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau \right) \right| d\tau =$$

$$= \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_{-\tau_0}^0 e^{-\frac{k_1}{2}s} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s \right| ds +$$

$$+ \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}s} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s \right| ds =$$

$$= \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_{-\tau_0}^0 e^{-\frac{k_1}{2}s} \left| \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s \right| ds +$$

$$\frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0} \left(1 + e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right)}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0} \left(1 + e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right)}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}} \right)} -$$

$$- \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_{-\tau_0}^0 e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s ds.$$

Далі використаємо відому формулу

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

де C - довільна стала [9]. Отримаємо

$$\int_{-\tau_0}^0 e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s ds =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}s}}{k_2} \left(-\frac{k_1}{2} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \cos \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s \right) \Big|_{-\tau_0}^0 =$$

$$= \frac{e^{\frac{k_1}{2}\tau_0}}{k_2} \left(-\frac{k_1}{2} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \cos \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \tau_0 \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2k_2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{k_1}{2}\tau_0} \left(-\frac{k_1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} \cos \alpha \right)}{k_2} -$$

$$- \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2k_2} = -\frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2k_2}.$$

Таким чином,

$$- \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}} \int_{-\tau_0}^0 e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2} s ds +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2}} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}}{1 - e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2}} \left(1 + \frac{1 + e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}}{1 - e^{-\frac{k_1 \pi}{\sqrt{4k_2 - k_1^2}}}} \right) =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{k_1 \arcsin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}$$

i

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|y\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = 1} \left| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} \right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{k_1 \arcsin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}.$$

Отже,

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} =$$

$$= \max\{\omega_2(k_1, k_2), \omega_3(k_1, k_2)\}, \quad (31)$$

де

$$\omega_2(k_1, k_2) = \frac{1 + e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}{k_2 \left(1 - e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} \quad (32)$$

i

$$\omega_3(k_1, k_2) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_2} \left(1 - e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{|k_1| \arcsin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}. \quad (33)$$

4.7. Випадок $k_1 < 0$, $k_1^2 < 4k_2$. Цей випадок зводиться до попереднього випадку заміною t на $-t$. Тому також виконується рівність (31).

4.8. Випадок $k_2 < 0$. Визначимо $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$, використовуючи (13) і співвідношення

$$\frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\int_{-\infty}^t \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)} y(s) ds + \right.$$

$$\left. + \int_t^{+\infty} \lambda_2 e^{\lambda_2(t-s)} y(s) ds \right),$$

що випливає з (13), де також $y \in C^0$ і $t \in \mathbb{R}$. Ці співвідношення можна подати відповідно у вигляді

$$(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda_1\tau} y(t - \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^0 e^{\lambda_2\tau} y(t - \tau) d\tau \right)$$

i

$$\frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{\lambda_1\tau} y(t - \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^0 \lambda_2 e^{\lambda_2\tau} y(t - \tau) d\tau \right).$$

Завдяки лемі 1

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda_1\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\lambda_2\tau} d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_2} \Big|_{-\infty}^0 \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{1}{k_2}$$

i

$$\sup_{\|y\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} = 1} \left\| \frac{d(L_{k_1, k_2}^{-1}y)}{dt} \right\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(- \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} d\tau \right) = \\
&= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-e^{\lambda_1 \tau} \Big|_0^{+\infty} + e^{\lambda_2 \tau} \Big|_{-\infty}^0 \right) = \\
&= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = \max \left\{ -\frac{1}{k_2}, \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}} \right\}.$$

Отже, норма $\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}$ для оберненого оператора L_{k_1, k_2}^{-1} знайдена.

На підставі проведених досліджень можна розглянути визначену на множині

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t_1, t_2) : t_2 = 0 \text{ або } t_1 = 0 \text{ і } t_2 > 0\}$$

функцію

$$\begin{aligned}
&S(k_1, k_2) = \\
&= \begin{cases} S_1(k_1, k_2), & \text{якщо } k_1^2 > 4k_2 > 0, \\ S_2(k_1, k_2), & \text{якщо } k_1^2 = 4k_2 > 0, \\ S_3(k_1, k_2), & \text{якщо } 0 < k_1^2 < 4k_2, \\ S_4(k_1, k_2), & \text{якщо } k_2 < 0, \end{cases} \quad (34)
\end{aligned}$$

де

$$S_1(k_1, k_2) = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \omega_1(k_1, k_2) \right\},$$

$$S_2(k_1, k_2) = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \frac{2}{e\sqrt{k_2}} \right\},$$

$$S_3(k_1, k_2) = \max \{ \omega_2(k_1, k_2), \omega_3(k_1, k_2) \},$$

$$S_4(k_1, k_2) = \max \left\{ -\frac{1}{k_2}, \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}} \right\}$$

і $\omega_1(k_1, k_2)$, $\omega_2(k_1, k_2)$ і $\omega_3(k_1, k_2)$, – функції, що визначаються рівностями (24), (32) і (33). Ця функція є неперервною на множині \mathcal{A} , оскільки навіть у загальному випадку норма оберненого оператора A^{-1} неперервно залежить від оператора A [10]. Неперервність функції $S(k_1, k_2)$ на \mathcal{A} можна перевірити також і безпосередньо.

Легко перевірити, що для кожного $k_2 > 0$

$$\lim_{|k_1| \rightarrow +\infty} \omega_1(k_1, k_2) = 0 \quad (35)$$

і

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} S(k_1, k_2) = +\infty.$$

Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 2. Оператор $L_{k_1, k_2} : C^2 \rightarrow C^0$ для всіх $(k_1, k_2) \in \mathcal{A}$ має неперервний обернений L_{k_1, k_2}^{-1} і

$$\|L_{k_1, k_2}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = S(k_1, k_2).$$

5. Приклади. Наведемо приклади застосування теореми 1.

Приклад 1. Зафіксуємо довільне додатне число $a > 2$ і розглянемо непарну неперервну на \mathbb{R} кусково-лінійну функцію $\omega_a(t)$, що на проміжку $[0, +\infty)$ визначається рівностями

$$\omega_a(t) = -t,$$

якщо $t \in [0, a^0)$,

$$\omega_a(t) = -a^{2n} + \frac{a+1}{a-1} (t - a^{2n}),$$

якщо $t \in [a^{2n}, a^{2n+1})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і

$$\omega_a(t) = a^{2n+1} - \frac{a+1}{a-1} (t - a^{2n+1}),$$

якщо $t \in [a^{2n+1}, a^{2n+2})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будемо вважати, що в рівнянні (1) функція $F(x_1, x_2)$ має вигляд

$$F(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) + \omega_a(x_2), \quad (36)$$

де $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна і обмежена на \mathbb{R}^2 функція (ця функція може бути недиференційовною на \mathbb{R}^2). Використаємо позначення

$$b = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} |G(x_1, x_2)|.$$

Легко переконатися, використовуючи графік функції $\omega_a(t)$, що для кожного числа $r_n = a^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, виконуються співвідношення

$$\max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} |F(x_1, x_2) - (-x_2)| \leq$$

$$\leq b + \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} |\omega_a(x_2) + x_2| =$$

$$= b + 2a^{2n-1} = a^{2n} - (a^{2n} - 2a^{2n-1} - b).$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^{2n} - 2a^{2n-1} - b) = +\infty,$$

то для кожного числа $H > 0$ існує такий номер $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\begin{aligned} \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} |F(x_1, x_2) - (-x_2)| &\leq \\ &\leq r_n - H \end{aligned} \quad (37)$$

для всіх $n \geq n_0$.

За теоремою 2 оператор $L_{0,-1}$ має неперервний обернений $L_{0,-1}^{-1}$ і

$$\|L_{0,-1}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)} = S(0, -1) = 1. \quad (38)$$

Тому нерівність (37) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} |F(x_1, x_2) - (0x_1 + (-1)x_2)| &\leq \\ &\leq \frac{r_n}{S(0, -1)} - H. \end{aligned}$$

Отже, на підставі теореми 1 диференціальне рівняння (1), в якому функція $F(x_1, x_2)$ визначається рівністю (36), має для кожної функції $h \in C^0$ хоча б один розв'язок $x \in C^2$.

Приклад 2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + l\left(\frac{dx}{dt}\right) + z\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega(x) = h(t), \quad (39)$$

де $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, що визначається рівністю

$$l(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & \text{якщо } |x| \geq e, \\ x, & \text{якщо } |x| < e, \end{cases}$$

z – довільний елемент простору C^0 , ω – розглянута у прикладі 1 функція ω_a при $a = 10$ і $t \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що для функції

$$F(x_1, x_2) = l(x_1) + z(x_1) + \omega(x_2) \quad (40)$$

виконуються умови теореми 1.

Розглянемо числа $r_n = 10^{2n+1}$, $n \geq 1$. Покладемо $k_1 = \ln r_n$ і $k_2 = \frac{9}{10}$. Використовуючи методи диференціального числення, легко показати існування такого числа $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\max_{|x| \leq r_n} |l(x) - (\ln r_n)x| = \frac{r_n}{e} \quad (41)$$

для всіх $n \geq n_0$. Ураховуючи те, що функція $\omega(x)$ є кусково-лінійною і непарною, легко показати, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \max_{|x| \leq r_n} |\omega(x) - k_2x| &= \\ &= \max \{ |\omega(10^{2n}) - k_2 10^{2n}|, \\ &|\omega(10^{2n+1}) - k_2 10^{2n+1}| \} = \\ &= \max \{ 10^{2n-1} 19, 10^{2n} \} = \frac{19}{100} r_n. \end{aligned}$$

Завдяки рівності (41) для всіх $n \geq n_0$

$$\max_{|x| \leq r_n} |l(x) + z(x) - (\ln r_n)x| \leq \frac{r_n}{e} + \|z\|_{C^0}.$$

Тому для $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} & \left| l(x_1) + z(x_1) + \omega(x_2) - \right. \\ & \left. - \left((\ln r_n)x_1 + \frac{9}{10}x_2 \right) \right| \leq \\ & \leq \max_{|x_1| \leq r_n} |l(x_1) + z(x_1) - (\ln r_n)x_1| + \\ & + \max_{|x_2| \leq r_n} \left| \omega(x_2) - \frac{9}{10}x_2 \right| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{e} + \frac{19}{100} \right) r_n + \|z\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{1}{e} + \frac{19}{100} < \frac{9}{10}$, то для кожного числа $H > 0$ існує такий номер $n_1 \geq n_0$, що

$$\begin{aligned} \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} & \left| l(x_1) + z(x_1) + \omega(x_2) - \right. \\ & \left. - \left((\ln r_n)x_1 + \frac{9}{10}x_2 \right) \right| \leq \frac{9}{10} r_n - H \end{aligned} \quad (42)$$

для всіх $n \geq n_1$.

На підставі (34) і (35) існує таке число $n_2 \geq n_1$, що

$$S\left(\ln r_n, \frac{9}{10}\right) = \frac{10}{9}$$

для всіх $n \geq n_2$. Тому (42) можна подати у вигляді

$$\max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} \left| l_e(x_1) + z(x_1) + \omega_{10}(x_2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left((\ln r_n)x_1 + \frac{9}{10}x_2 \right) \Big| \leq \\
& \leq \frac{r_n}{S \left(\ln r_n, \frac{9}{10} \right)} - H,
\end{aligned}$$

де $n \geq n_2$.

Отже, для функції $F(x_1, x_2)$, що визначається рівністю (40), виконуються умови теореми 1. Тоді диференціальне рівняння (39) для кожної функції $h \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^2$.

Зазначимо, що в диференціальному рівнянні (39) функція $l(x)$ задовольняє умову

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{l(x)}{x} = +\infty$$

(при $|x| \rightarrow +\infty$ ця функція швидше зростає, ніж будь-яка лінійна функція), функція $\omega(x)$ є осцилюючою, причому

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} \omega(x) = +\infty$$

і

$$\underline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} \omega(x) = -\infty,$$

а функція $z = z(x)$ може бути недиференційовною на \mathbb{R} . Тому з'ясувати існування навіть періодичних розв'язків цього рівняння для кожної періодичної правої частини $h \in C^0$ за допомогою методів, викладених, наприклад, в [6], неможливо.

Приклад 3. Розглянемо непарну неперервну функцію $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що на проміжку $[0, +\infty)$ визначається рівністю

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [0, 1], \\ 2(x-1), & \text{якщо } x \in I_0, \\ -2(x-2) + 2, & \text{якщо } x \in I_1, \\ 2(x-2^2), & \text{якщо } x \in I_2, \\ -2(x-2^3) + 2^3, & \text{якщо } x \in I_3, \\ 2(x-2^4), & \text{якщо } x \in I_4, \\ -2(x-2^5) + 2^5, & \text{якщо } x \in I_5, \\ \vdots & \\ 2(x-2^n), & \text{якщо } x \in I_n, \\ -2(x-2^{n+1}) + 2^{n+1}, & \text{якщо } x \in I_{n+1}, \\ \vdots & \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned}
I_0 &= (1, 2], \\
I_1 &= (2, 2^2], \\
I_2 &= (2^2, 2^3], \\
&\vdots \\
I_n &= (2^n, 2^{n+1}], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

і диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Omega(x) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (43)$$

де

$$\Omega(x) = G(x) + 1.$$

Визначимо функцію $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ рівністю

$$F(x_1, x_2) = \Omega(x_2).$$

Легко переконатися, використовуючи графік функції G , що для послідовності чисел $r_n = 2^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, виконується співвідношення

$$\max_{|x| \leq r_n} |\Omega(x) + x| \leq \frac{r_n}{2} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, для кожного числа $H > 0$ існує такий номер $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
& \max_{|x_1| \leq r_n, |x_2| \leq r_n} |F(x_1, x_2) - (0x_1 - x_2)| = \\
& = \max_{|x| \leq r_n} |\Omega(x) + x| \leq r_n - H = \\
& = \frac{r_n}{\|L_{0,-1}^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}} - H.
\end{aligned}$$

Тут ураховано (38).

Таким чином, виконується нерівність (3) при $k_1 = 0$ і $k_2 = -1$. Тому на підставі теореми 1 нелінійне диференціальне рівняння (43) для кожної функції $h \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^2$.

Зауваження 1. Метод, який використано для з'ясування умов існування обмежених розв'язків диференціального рівняння (1) та рівнянь у прикладах 1 – 3, застосовувався автором для дослідження обмежених розв'язків як систем нелінійних диференціальних та диференціально-функціональних

рівнянь [7,11], так і систем нелінійних різницевих рівнянь [12,13]. Цей метод для деяких класів рівнянь дає не тільки достатні, але й необхідні умови існування обмежених розв'язків відповідних рівнянь [7,11].

Зауваження 2. Твердження теореми 1 зберігається, якщо в цій теоремі простори C^0 , C^1 і C^2 замінити відповідними просторами T -періодичних функцій (T – довільне додатне число).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М: Наука, 1966. – 568 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М: Наука, 1981. – 568 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
4. Конторович М. И. Нелинейные колебания в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1973. – 320 с.
5. Мизгулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
6. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
7. Слюсарчук В. Е. Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103–126.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.
10. Наймарк М. А. Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
11. Слюсарчук В. Ю. Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541–1556.
12. Слюсарчук В. Ю. Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – 2009. – Вип. 454. Математика. – С. 88–94.
13. Слюсарчук В. Ю. Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – 109–115.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ, ЯКІ ПОДАЮТЬСЯ ДО
"НАУКОВОГО ВІСНИКУ ЧЕРНІВЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ" СЕРІЯ "МАТЕМАТИКА"

1. Автори повинні підготувати статтю в текстовому редакторі \LaTeX (версія MiKTeX 2.1 і вище). Статті, підготовлені в інших текстових редакторах, до розгляду не приймаються.

2. Надрукований текст статті (2 екз.) надсилається на адресу редколегії. Електронний варіант статті передається електронною поштою за адресою `appl-dpt@chnu.cv.ua`.

3. Остання сторінка набраної в редакторі \LaTeX статті повинна бути заповнена не менше ніж на три чверті аркуша паперу формату А4.

4. Файл редактора \LaTeX повинен мати наступний вигляд:

```
\documentclass[10pt]{book}
\slippy
\setlength{\voffset}{-30mm} \setlength{\hoffset}{-20mm}
\setlength{\textwidth}{170mm} \setlength{\textheight}{240mm}
\usepackage[cp1251]{inputenc} \usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[english,russian,ukrainian]{babel}
\usepackage{amssymb} \usepackage{amsthm} \usepackage{amsmath}
\begin{document}
\large
\twocolumn[УДК 123.456]
\begin{center}
{\Large \bf \copyright 2012 р. \, \, , А.Б. Автор (Автор англійською мовою)\,/}
\bigskip
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
\end{center}

\begin{center}
{\bf НАЗВА СТАТТІ (Назва статті англійською мовою)\,/}
\end{center}

\begin{center}
\parbox{15cm}{\normalsize \parindent=0.5cm
Резюме українською мовою.}

\bigskip

Резюме англійською мовою.}
\end{center}

\bigskip
] \markboth{}{}

Текст статті.

\bigskip

{\normalsize\centerline{СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ}}
\medskip

1. {\it Автор А.Б.\,/} Назва статті
// Укр. мат. журн.--- 2004.--- {\bf 10}, N1.--- С.101---111.
}

\end{document}
```