

©2012 р. А.О. Данилюк, М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з оператором Фредгольма. Встановлено умови існування фундаментальної матриці розв'язків.

The theorem about the correctness of the Cauchy problem for the parabolic system of integro-differential equations with Fredholm operator has been proved. The existence conditions of the fundamental matrix of solutions have been established.

Існує завершена теорія коректної розв'язності задачі Коші для параболічних систем [1-3]. Теоретичний інтерес становить подальше дослідження задач для параболічних систем, що піддаються імпульсній дії, з псевдодиференціальними операторами, різними особливостями в коефіцієнтах системи, виродженнями на початковій гіперплощині та ін.

У даній статті розглядається задача Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь, що містить оператор Фредгольма. Подібна задача, тільки з оператором Вольтерри-Фредгольма, досліджувалась в [5], а відповідна крайова задача — в [6]. Головна відмінність тут полягає в оцінках, одержаних для об'ємного потенціалу W , що є складовою фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) Γ . Також важливим є встановлення диференціальних властивостей ядра K інтегрального оператора вихідної системи для коректної розв'язності задачі Коші.

В області $\Pi = (0, T) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для параболічної системи N інтегро-диференціальних рівнянь, що містить оператор Фредгольма

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k u + \int_{E_n} K(t, x, \xi) u(t, \xi) d\xi + f(t, x), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

Правильна наступна теорема.

Теорема. *Нехай система (1) рівномірно параболічна, коефіцієнти системи $A_k(t, x)$ визначені в шарі Π , неперервні по t , причому рівномірно щодо x при $|k| = 2b$, $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$. Елементи ядра $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ інтегрального оператора системи задовольняють нерівності*

$$|D_x^m K_{ij}(t, x, \xi)| \leq C_m t^{-\frac{n+|m|+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, x, \xi)}, \quad (3)$$

$$t > 0, \quad x, \xi \in E_n, \quad |m| = 0, 1,$$

$$\rho(t, \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - \xi_i|}{(t-\tau)^{1/2b}} \right)^q, \quad q = \frac{2b}{2b-1},$$

$$\rho(t, x, \xi) \equiv \rho(t, 0, x, \xi).$$

Тоді існує ФМР $\Gamma(t, \tau, x, \xi)$ системи (1), за допомогою якої розв'язок задачі Коші (1)-(2) за умов $\varphi \in C(E_n)$, $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$ визначається формулою

$$u(t, x) = \int_{E_n} \Gamma(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \quad (4)$$

$$|D_x^k u| \leq C(t^{-\frac{|k|}{2b}} |\varphi|_C + |f|_\alpha), \quad (5)$$

$$t > 0, \quad x \in E_n, \quad |k| \leq 2b.$$

Тут

$$\Gamma(t, \tau, x, \xi) = Z(t, \tau, x, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n} Z(t, \beta, x, z) R(\beta, \tau, z, \xi) dz \equiv Z + W, \quad (6)$$

R – резольвента відповідної системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду, повторні ядра якої виражаються через згортку інтегрального оператора K системи (1) та ФМР Z відповідної параболічної системи.

Для похідних об'ємного потенціалу W правильні оцінки

$$|D_x^k W(t, \tau, x, \xi)| \leq C_k (t - \tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \times \times (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c\nu_o - \varepsilon)\rho(\nu_o + m)t, \tau, x, \xi}, \quad (7)$$

$$|k| \leq 2b, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n,$$

$$r_m \equiv (C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}})^{m-1},$$

$$c\nu_o = c - \nu_o \varepsilon, \quad \nu_o = \left[\frac{n+2b}{\alpha} \right] + 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Доведення. Побудуємо ФМР задачі Коші (1)-(2) та знайдемо оцінки для її похідних.

Введемо підстановку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k u = y(t, x), \quad (8)$$

де $y(t, x)$ – невідома N -вектор-функція. Тоді задача (8)-(2) – це задача Коші для параболічної системи з неоднорідністю $y(t, x)$. Для цієї задачі Коші у припущенні, що $y \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$, розв'язок записується через ФМР Z у вигляді [1, с. 269]

$$u(t, x) = \int_{E_n} Z(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t, \tau, x, \xi) y(\tau, \xi) d\xi \quad (9)$$

і для похідних Z правильні оцінки [1, с. 73]:

$$|D_x^k Z(t, \tau, x, \xi)| \leq C_k (t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)}, \quad |k| \leq 2b, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n. \quad (10)$$

Підставимо вираз для u (9) у вихідну систему (1):

$$y(t, x) = f(t, x) + \int_{E_n} K(t, x, \xi) \left(\int_{E_n} Z(t, 0, \xi, z) \varphi(z) dz \right) d\xi + \int_{E_n} K(t, x, \xi) \left(\int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t, \tau, \xi, z) y(\tau, z) dz \right) d\xi. \quad (11)$$

Одержано інтегральне рівняння Вольтерри-Фредгольма 2-го роду відносно невідомої вектор-функції y . В останньому інтегралі змінимо порядок інтегрування, щоб виділити ядро інтегрального оператора

$$\int_{E_n} K(t, x, \xi) \left(\int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t, \tau, \xi, z) y(\tau, z) dz \right) d\xi = \int_0^t d\tau \int_{E_n} \left(\int_{E_n} K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz \right) y(\tau, \xi) d\xi,$$

яке позначимо через

$$H(t, \tau, x, \xi) \equiv \int_{E_n} K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz.$$

Тоді (11) набуде вигляду

$$y(t, x) = F(t, x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n} H(t, \tau, x, \xi) y(\tau, \xi) d\xi, \quad (12)$$

де

$$F(t, x) \equiv f(t, x) + \int_{E_n} H(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Згідно з теорією інтегральних рівнянь з регулярним чи квазірегулярним ядром ядру $H(t, \tau, x, \xi)$ відповідає резольвента

$$R(t, \tau, x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(t, \tau, x, \xi),$$

$$H_\nu(t, \tau, x, \xi) = \int_{E_n} d\beta \int_{E_n} H_1(t, \beta, x, z) H_{\nu-1}(\beta, \tau, z, \xi) dz,$$

$$\nu = 2, 3, \dots, \quad H_1 = H.$$

Тоді розв'язок рівняння (12) зобразиться у вигляді

$$y(t, x) = F(t, x) + \int_0^t \int_{E_n} R(t, \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi.$$

Якщо підставити його у зображення для u (9), то розв'язок вихідної задачі Коші (1)-(2) через оператор символічної згортки набуде вигляду:

$$\begin{aligned} u &= Z * \varphi + Z ** f + Z ** (R ** f) + \\ &+ Z ** [(H + R ** H) * \varphi] = \\ &= \{Z + Z ** R\} * \varphi + \{Z + Z ** R\} ** f. \end{aligned}$$

Отже, виділено ядро Γ (6) оберненого оператора задачі Коші (1)-(2), за допомогою якого розв'язок вихідної задачі записується у вигляді (4).

Визначимо, за яких умов можна побудувати резольвенту R для існування ФМР Γ . Для цього встановимо спочатку у вигляді леми наступну нерівність, яку будемо використовувати при подальших оцінках.

Лема. Для функції

$$\rho(t, \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - \xi_i|}{(t - \tau)^{1/2b}} \right)^q, \quad q = \frac{2b}{2b-1}$$

справджується нерівність

$$\rho(t, \tau, x, y) + \rho(\beta, \theta, y, \xi) \geq \rho(t + \beta - \tau, \theta, x, \xi),$$

$$t > \tau > 0, \quad \beta > \theta > 0, \quad x, y, \xi \in E_n. \quad (13)$$

Доведення. Якщо $y = x = \xi$, маємо тривіальний випадок. Якщо $y = x, y \neq \xi$ або $y = \xi, y \neq x$, нерівність очевидна.

Розглянемо загальний випадок, коли $y \neq x, y \neq \xi$. Оскільки ліва частина нерівності

$$\begin{aligned} &\rho(t, \tau, x, y) + \rho(\beta, \theta, y, \xi) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - y_i|^q}{(t - \tau)^{q/2b}} + \frac{|y_i - \xi_i|^q}{(\beta - \theta)^{q/2b}} \right) \equiv \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \end{aligned}$$

– додатна функція для довільних $x, y, \xi \in E_n, t > \tau, \beta > \theta$, то її мінімум дорівнює сумі мінімумів функцій f_i . Знайдемо цей мінімум:

$$f_i'(y_i) = -\frac{q|x_i - y_i|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_i - y_i)}{(t - \tau)^{q-1}} +$$

$$+ \frac{q|y_i - \xi_i|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_i - \xi_i)}{(\beta - \theta)^{q-1}}, \quad q/2b = q - 1;$$

$$f_i'(y_i) = 0:$$

$$\frac{|x_i - y_i|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_i - y_i)}{(t - \tau)^{q/2b}} = \frac{|y_i - \xi_i|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_i - \xi_i)}{(\beta - \theta)^{q/2b}}.$$

Розглянемо випадки.

$$1) x_i > y_i > \xi_i: \frac{(x_i - y_i)^{q-1}}{(t - \tau)^{q-1}} = \frac{(y_i - \xi_i)^{q-1}}{(\beta - \theta)^{q-1}}.$$

Тоді

$$\frac{x_i - y_i}{t - \tau} = \frac{y_i - \xi_i}{\beta - \theta}$$

і

$$y_i^o = \frac{t - \tau}{t + \beta - \tau - \theta} \xi_i + \frac{\beta - \theta}{t + \beta - \tau - \theta} x_i$$

– стаціонарна точка.

$$2) x_i < y_i < \xi_i: -\frac{(y_i - x_i)^{q-1}}{(t - \tau)^{q-1}} = -\frac{(\xi_i - y_i)^{q-1}}{(\beta - \theta)^{q-1}}.$$

Домноживши на -1, маємо перший випадок.

$$3) x_i < y_i, y_i > \xi_i: -\frac{(y_i - x_i)^{q-1}}{(t - \tau)^{q-1}} = \frac{(y_i - \xi_i)^{q-1}}{(\beta - \theta)^{q-1}}.$$

Оскільки зліва від'ємна величина, а справа – додатна, то дана рівність розв'язків не має.

$$4) x_i > y_i, y_i < \xi_i: \frac{(x_i - y_i)^{q-1}}{(t - \tau)^{q-1}} = -\frac{(\xi_i - y_i)^{q-1}}{(\beta - \theta)^{q-1}}.$$

Аналогічно 3-му випадку розв'язків немає.

Покажемо, що y_i^o – точка мінімуму. Для цього вирахуємо другу похідну в цій точці:

$$\begin{aligned} f_i'' &= \frac{q(q-1)|x_i - y_i|^{q-2} (\operatorname{sgn}(x_i - y_i))^2}{(t - \tau)^{q-1}} + \\ &+ \frac{q(q-1)|y_i - \xi_i|^{q-2} (\operatorname{sgn}(y_i - \xi_i))^2}{(\beta - \theta)^{q-1}}; \end{aligned}$$

$$f_i''(y_i^o) = \frac{q(q-1)|x_i - \xi_i|^{q-2}}{(t + \beta - \tau - \theta)^{q-2}} \left[\frac{1}{t - \tau} + \frac{1}{\beta - \theta} \right].$$

Очевидно, що $f_i''(y_i^o) > 0 \forall x_i, \xi_i \in E_1, x_i \neq \xi_i, t > \tau, \beta > \theta$. Отже, в точці y_i^o функція f_i набуває свого мінімального значення

$$f_i(y_i^o) = \frac{|x_i - \xi_i|^q}{(t + \beta - \tau - \theta)^{q/2b}}.$$

А це означає, що виконується нерівність (13).

Лему доведено.

Припустимо, що ядро K інтегрального оператора системи (1) задовольняє нерівність (3). Оцінимо ядро H , користуючись оцінками (3) та (10):

$$|H(t, \tau, x, \xi)| \leq \int_{E_n} |K(t, x, z)| |Z(t, \tau, z, \xi)| dz \leq C_o \int_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t, x, z)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \cdot \frac{e^{-\varepsilon\rho(t, \tau, z, \xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz.$$

Згідно з лемою правильна наступна нерівність

$$\rho(t, x, z) + \rho(t, \tau, z, \xi) \geq \rho(2t, \tau, x, \xi).$$

Тоді

$$|H| \leq C_o \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t, \tau, x, \xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \int_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(t, x, z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(t, \tau, z, \xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz.$$

Тут $e^{-\varepsilon\rho(t, x, z)}$ оцінюється одиницею, а об'ємний інтеграл є інтегралом типу інтеграла Пуассона, що дорівнює $C_\varepsilon = \text{Const}(\varepsilon, b, n)$.

Отже,

$$|H(t, \tau, x, \xi)| \leq C_o C_\varepsilon t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Далі оцінимо повторні ядра

$$H_2(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n} H_1(t, \beta, x, z) H_1(\beta, \tau, z, \xi) dz.$$

Для оцінки H_2 знову відповідно до леми скорижаємось нерівністю

$$\rho(2t, \beta, x, z) + \rho(2\beta, \tau, z, \xi) \geq \rho(2t + \beta, \tau, x, \xi) \geq \rho(3t, \tau, x, \xi),$$

оскільки $\beta \leq t$. У результаті одержимо

$$|H_2(t, \tau, x, \xi)| \leq C_o^2 C_\varepsilon^2 t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t, \tau, x, \xi)} \times \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(2t, \beta, x, z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(2\beta, \tau, z, \xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}} dz \leq C_o^2 C_\varepsilon^2 t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t, \tau, x, \xi)} 2^{\frac{n}{2b}} \times$$

$$\times \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int_{E_n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(2\beta, z, \xi)}}{(2\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq C_o^2 C_\varepsilon^3 2^{\frac{n}{2b}} \frac{2b}{\alpha} t^{-\frac{n+2b-2\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Тут

$$\rho(2\beta, \tau, z, \xi) \geq \rho(2\beta, z, \xi).$$

Аналогічними міркуваннями встановлюється оцінка для H_3 :

$$|H_3(t, \tau, x, \xi)| \leq C_o^3 C_\varepsilon^4 2^{\frac{n}{2b}} 3^{\frac{n}{2b}} \frac{2b}{\alpha} t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \times e^{-(c-3\varepsilon)\rho(4t, \tau, x, \xi)} \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-2\alpha}{2b}}} \int_{E_n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(3\beta, z, \xi)}}{(3\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq C_o^3 C_\varepsilon^5 2^{\frac{n}{2b}} 3^{\frac{n}{2b}} \frac{2b}{\alpha} \frac{2b}{2\alpha} t^{-\frac{n+2b-3\alpha}{2b}} e^{-(c-3\varepsilon)\rho(4t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

По індукції будемо мати:

$$|H_\nu(t, \tau, x, \xi)| \leq C_o^\nu C_\varepsilon^{2\nu-1} 2^{\frac{n}{2b}} \cdot 3^{\frac{n}{2b}} \cdot \dots \cdot \nu^{\frac{n}{2b}} \times \frac{2b}{\alpha} \frac{2b}{2\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{2b}{(\nu-1)\alpha} t^{-\frac{n+2b-\nu\alpha}{2b}} e^{-(c-\nu\varepsilon)\rho((\nu+1)t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n, \quad \nu \geq 2.$$

З останньої нерівності видно, що, починаючи з $\nu \geq \nu_o = \lceil \frac{n+2b}{\alpha} \rceil + 1$, ядра не матимуть особливості і для H_{ν_o} правильна нерівність

$$|H_{\nu_o}(t, \tau, x, \xi)| \leq C_{\nu_o} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+1)t, \tau, x, \xi)},$$

$$C_{\nu_o} \equiv C_o^{\nu_o} C_\varepsilon^{2\nu_o-1} 2^{\frac{n}{2b}} 3^{\frac{n}{2b}} \cdot \dots \cdot \nu_o^{\frac{n}{2b}} \cdot \frac{2b}{\alpha} \frac{2b}{2\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{2b}{(\nu_o-1)\alpha}, \quad c_{\nu_o} \equiv c - \nu_o\varepsilon, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Оцінимо наступне ядро:

$$|H_{\nu_o+1}| \leq \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n} |H_1(t, \beta, x, z)| |H_{\nu_o}(\beta, \tau, z, \xi)| dz \leq C_o C_\varepsilon C_{\nu_o} 2^{\frac{n}{2b}} t^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+2)t, \tau, x, \xi)} \times \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(2t, \beta, x, z)}}{(2t)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq C_o C_\varepsilon C_{\nu_o} \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} t^{\frac{\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+2)t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Для всіх наступних ядер справедлива оцінка:

$$|H_{\nu_o+m}(t, \tau, x, \xi)| \leq C_o^m C_\varepsilon^m C_{\nu_o} \tilde{C}_\varepsilon^m \left(2^{\frac{n}{2b}}\right)^m t^{\frac{m\alpha}{2b}} \times \\ \times \frac{2b}{2b+\alpha} \cdot \frac{2b}{2b+2\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{2b}{2b+(m-1)\alpha} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m+1)t, \tau, x, \xi)}, \\ t > \tau, \quad x, \xi \in E_n, \quad m \geq 1,$$

яка одержиться, коли в показнику експоненти відщеплювати від $c - \varepsilon$ величину c_{ν_o} і користуватись нерівністю

$$\rho(2t, \beta, x, z) + \rho((\nu_o + m)\beta, \tau, z, \xi) \geq \\ \geq \rho((\nu_o + m + 1)t, \tau, x, \xi), \quad \beta \leq t,$$

у результаті чого матимемо інтеграл типу інтеграла Пуассона, який оцінюється величиною \tilde{C}_ε , а інтеграл по часовій змінній безпосередньо вираховується.

Далі розглянемо залишковий ряд $\sum_{\nu=\nu_o+1}^{\infty} H_\nu$. За ознакою Даламбера мажорантний числовий ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}})^m C_{\nu_o} \frac{2b}{2b+\alpha} \frac{2b}{2b+2\alpha} \dots \frac{2b}{2b+(m-1)\alpha}$, де експонента оцінена одиницею, а $t \leq T$, збігається, а звідси впливає рівномірна і абсолютна збіжність за критерієм Вейерштрасса функціонального ряду $\sum_{\nu=\nu_o+1}^{\infty} H_\nu$. Це дозволяє побудувати резольвенту, для якої з нерівностей для повторних ядер можна одержати наступну оцінку:

$$|R(t, \tau, x, \xi)| \leq \sum_{m=1}^{\nu_o} |H_m| + \sum_{m=\nu_o+1}^{\infty} |H_m| \leq \\ \leq \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1} \frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!} \left(\frac{2b}{\alpha}\right)^{m-1} \times \\ \times t^{-\frac{n+2b-m\alpha}{2b}} e^{-(c-m\varepsilon)\rho((m+1)t, \tau, x, \xi)} + \\ + C_{\nu_o} \sum_{m=\nu_o+1}^{\infty} (C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}})^{m-\nu_o} \prod_{p=1}^{m-\nu_o} \frac{2b}{2b+(p-1)\alpha} \times \\ \times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+1)t, \tau, x, \xi)} \leq \\ \leq t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-\nu_o\varepsilon)\rho((\nu_o+1)t, \tau, x, \xi)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1} \frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!} \left(\frac{2b}{\alpha}\right)^{m-1} +$$

$$+ C_{\nu_o} \sum_{m=1}^{\infty} (C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}})^m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-1)\alpha} \times \\ \times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o+1)t, \tau, x, \xi)} \leq \\ \leq C_1 r_1 \frac{2b}{2b-\alpha} t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+1)t, \tau, x, \xi)} + \\ + C_2 t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=2}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\ \times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t, \tau, x, \xi)} \leq \\ \leq C_R t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\ \times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t, \tau, x, \xi)},$$

де

$$C_1 \equiv \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1} \frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!} \left(\frac{2b}{\alpha}\right)^{m-1} \frac{2b-\alpha}{2b},$$

$$C_2 \equiv C_{\nu_o} T^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \frac{2b-\alpha}{2b}, \quad C_R \equiv \max\{C_1, C_2\},$$

$$r_m \equiv (C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}})^{m-1}.$$

Отже,

$$|R(t, \tau, x, \xi)| \leq C_R t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t, \tau, x, \xi)}, \quad (14) \\ t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Далі покажемо, що функція u у розв'язку (9) є гельдеровою з показником α . Для цього встановимо спочатку оцінки для приростів ядер K , H та резольвенти R . Для ядра K правильна оцінка (3), з якої впливає оцінка для приросту ядра при $|\Delta x| \geq t^{1/2b}$:

$$|\Delta_x K(t, x, \xi)| \leq |K(t, x+\Delta x, \xi)| + |K(t, x, \xi)| \leq \\ \leq C \left[\frac{e^{-c\rho(t, x+\Delta x, \xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} + \frac{e^{-c\rho(t, x, \xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \right] \leq \\ \leq C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} [e^{-c\rho(t, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\rho(t, x, \xi)}].$$

При $|\Delta x| < t^{1/2b}$ за теоремою Лагранжа одержимо

$$|\Delta_x K(t, x, \xi)| = |D_x K(t, x + \theta \Delta x, \xi)| \cdot |\Delta x| \leq \\ \leq C |\Delta x| \frac{e^{-c\rho(t, x + \theta \Delta x, \xi)}}{t^{\frac{n+2b+1-\alpha}{2b}}}.$$

За лемою з [4, с. 144] $\exists c_1 > 0$, що

$$e^{-c\left(\frac{|x+\theta\Delta x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q} \leq e^{-c_1\left(\frac{|x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q} e^{c'(|\theta|\frac{|\Delta x|}{t^{1/2b}})^q} \leq \leq const \cdot e^{-c_1\left(\frac{|x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q},$$

оскільки $\frac{|\Delta x|}{t^{1/2b}} < 1$. Тоді

$$|\Delta_x K(t, x, \xi)| \leq C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} \left(\frac{|\Delta x|}{t^{1/2b}}\right)^{1-\alpha} e^{-c_1\rho(t, x, \xi)} \leq \leq C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c_1\rho(t, x, \xi)}.$$

Отже, для приросту інтегрального ядра K правильна оцінка

$$|\Delta_x K(t, x, \xi)| \leq C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} [e^{-c\rho(t, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\rho(t, x, \xi)}],$$

$$t > 0, \quad x, \xi \in E_n.$$

Оцінимо приріст ядра H

$$\Delta_x H(t, \tau, x, \xi) = \int_{E_n} \Delta_x K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz.$$

$$|\Delta_x H| \leq C_o \int_{E_n} \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} [e^{-c\rho(t, x+\Delta x, z)} + e^{-c\rho(t, x, z)}] \times \times \frac{e^{-c\rho(t, \tau, z, \xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq C_o \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} \int_{E_n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(t, \tau, z, \xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz \times \times [e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t, \tau, x+\Delta x, \xi)} + e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t, \tau, x, \xi)}] \leq \leq C_o C_\varepsilon \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} [e^{-c'\rho(2t, \tau, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c'\rho(2t, \tau, x, \xi)}],$$

$$t > \tau, \quad x, \xi \in E_n, \quad c' = c - \varepsilon.$$

Аналогічними міркуваннями, що і при встановленні оцінок для повторних ядер H_m та резольвенти R , для приросту резольвенти $\Delta_x R(t, \tau, x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_x H_m(t, \tau, x, \xi)$ будемо мати оцінку:

$$|\Delta_x R(t, \tau, x, \xi)| \leq C_R \frac{|\Delta x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \times [e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, \tau, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, \tau, x, \xi)}],$$

$$t > \tau, \quad x, \xi \in E_n. \quad (15)$$

Тепер покажемо, що функція y , яку можна подати у вигляді

$$y(t, x) = f(t, x) + \int_{E_n} H(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t, \tau, x, \xi) \int_{E_n} H(\tau, 0, \xi, z) \varphi(z) dz d\xi \equiv \equiv f(t, x) + J_1 + J_2 + J_3,$$

є гельдеровою за просторовою змінною x . f є гельдеровою за припущенням. Розглянемо приріст другого доданку:

$$|\Delta_x J_1(t, x)| \leq \int_{E_n} |\Delta_x H| |\varphi| d\xi \leq \leq C_o C_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} |\varphi|_C \int_{E_n} \frac{e^{-c'\rho(2t, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c'\rho(2t, x, \xi)}}{(2t)^{\frac{n}{2b}}} d\xi \times \times \frac{|\Delta x|^\alpha}{t} \leq C |\varphi|_C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t}, \quad t > 0, \quad x \in E_n. \quad (16)$$

Знайдемо приріст третього доданку:

$$|\Delta_x J_2(t, x)| \leq C_R |f|_\alpha \frac{|\Delta x|^\alpha}{t} \times \times \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \int_0^t d\tau \int_{E_n} \frac{e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, x, \xi)}}{((\nu_o + m)t)^{\frac{n}{2b}}} d\xi \leq \leq C |f|_\alpha |\Delta x|^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \leq \leq C |f|_\alpha |\Delta x|^\alpha, \quad t > 0, \quad x \in E_n. \quad (17)$$

Тут почленне інтегрування законне на основі ознаки Вейерштрасса, оскільки числовий ряд $\sum_{m=1}^{\infty} 2r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha}$, що мажорує відповідний функціональний ряд, є збіжним. При оцінюванні приросту четвертого доданку аналогічно завдяки рівномірній збіжності функціонального ряду можна почленно інтегрувати:

$$\begin{aligned}
|\Delta_x J_3(t, x)| &\leq C_o C_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} |\varphi|_C \times \\
&\times \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int_{E_n} |\Delta_x R| \int_{E_n} \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(2\tau, \xi, z)}}{(2\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz d\xi \leq \\
&\leq C |\varphi|_C \frac{|\Delta x|^\alpha}{t} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \\
&\int_{E_n} \frac{e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, \tau, x+\Delta x, \xi)} + e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)t, \tau, x, \xi)}}{((\nu_o + m)t)^{\frac{n}{2b}}} d\xi \leq \\
&\leq C |\varphi|_C |\Delta x|^\alpha t^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}, \quad t > 0, x \in E_n. \quad (18)
\end{aligned}$$

На основі оцінок (16)-(18) маємо, що

$$|\Delta_x y(t, x)| \leq |\Delta x|^\alpha \left(C_1 |f|_\alpha + C_2 \frac{|\varphi|_C}{t} \right), \quad (19)$$

$$t > 0, x \in E_n.$$

Оцінка (19) означає, що функція y задовольняє нерівномірну умову Гельдера з показником α . Ця умова необхідна для існування старших похідних об'ємного потенціалу у формулі (9) для розв'язку u .

Тепер встановимо оцінки для ФМР $\Gamma = Z + W$ (6) та її похідних. За побудовою [1]

$$\begin{aligned}
Z(t, \tau, x, \xi) &\equiv G_o(t, \tau, x - \xi, \xi) + \\
&+ \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n} G_o(t, \beta, x - y, y) R_o(\beta, \tau, y, \xi) dy \equiv G_o + W_o
\end{aligned}$$

і для G_o, W_o правильні оцінки

$$|D_x^k G_o(t, \tau, x, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)},$$

$$\begin{aligned}
|D_x^k W_o(t, \tau, x, \xi)| &\leq C(t - \tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)}, \\
|k| &\leq 2b, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.
\end{aligned}$$

Для Z маємо оцінку (10). Оцінимо похідні об'ємного потенціалу W . За лемою про диференціювання об'ємного потенціалу [1, с. 68] молодші похідні знаходимо безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла, а старші похідні вирахуємо за спеціальними формулами, врахувавши конструкцію ФМР Z :

$$\begin{aligned}
D_x^{2b} W(t, \tau, x, \xi) &= \\
&= \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{E_n} D_x^{2b} Z(t, \beta, x, z) R(\beta, \tau, z, \xi) dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{t_1}^t d\beta \int_{E_n} \bar{D}_x^{2b} G_o(t, \beta, x - z, x) [R(\beta, \tau, z, \xi) - \\
&- R(\beta, \tau, x, \xi)] dz + \int_{t_1}^t d\beta \int_{E_n} [D_x^{2b} G_o(t, \beta, x - z, z) - \\
&- \bar{D}_x^{2b} G_o(t, \beta, x - z, x)] R(\beta, \tau, z, \xi) dz + \\
&+ \int_{t_1}^t R(\beta, \tau, x, \xi) d\beta \int_{E_n} \bar{D}_x^{2b} G_o(t, \beta, x - z, x) dz + \\
&+ \int_{t_1}^t d\beta \int_{E_n} D_x^{2b} W_o(t, \beta, x, z) R(\beta, \tau, z, \xi) dz \equiv \\
&\equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,
\end{aligned}$$

де \bar{D} означає диференціювання тільки по третьому аргументу.

$A_4 = 0$ на основі властивості матриці Гріна G_o . W_o має менший порядок особливості, тому достатньо оцінити $A_1 - A_3$.

Оцінка A_1 одержується з оцінок (10), (14) і того, що $t - \beta \geq (t - \tau)/2$:

$$\begin{aligned}
|A_1| &\leq C_R \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, z)}}{(t - \beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} \beta^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \times \\
&\times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-c\nu_o\rho((\nu_o+m)\beta, \tau, z, \xi)} dz \leq \\
&\leq \frac{CC_R}{(t - \tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\times e^{-(c\nu_o-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t, \tau, x, \xi)} \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \\
&\int_{E_n} e^{-(\nu_o+1)\varepsilon\rho(t, \beta, x, z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho((\nu_o+m)\beta, z, \xi)}}{(\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \beta^{\frac{n}{2b}}} dz \leq \\
&\leq C(t - \tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\times (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} e^{-(c\nu_o-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t, \tau, x, \xi)}, \\
&t > \tau, \quad x, \xi \in E_n. \quad (20)
\end{aligned}$$

Нерівномірною умовою Гельдера резольвенти R по третьому аргументу (15) дає можливість оцінити A_2 :

$$\begin{aligned}
|A_2| &\leq C_R \int_{t_1}^t d\beta \int_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}} \right)^\alpha \times \\
&\quad \times \int_{E_n} \left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}} \right)^\alpha e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq \\
&\leq CC(\varepsilon)(t-\tau)^{-\frac{n+2b-2\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \quad t > \tau, x, \xi \in E_n. \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times \frac{e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)\beta,\tau,z,\xi)} + e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)\beta,\tau,x,\xi)}}{\beta^{\frac{n+2b}{2b}}} dz \leq \\
&\leq C_R C(\varepsilon) \left(\frac{2}{t-\tau} \right)^{\frac{n+2b}{2b}} \int_{t_1}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \times \\
&\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times \left[e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int_{E_n} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz + \right. \\
&\quad \left. + e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int_{E_n} \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \right] \leq \\
&\leq C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \quad t > \tau, x, \xi \in E_n. \quad (21)
\end{aligned}$$

Тут ми скористались очевидною нерівністю

$$\left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}} \right)^\alpha e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \leq C(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Також в показнику експоненти відщепили від $c-\varepsilon$ величину $c_{\nu_o} = c-\nu_o\varepsilon$ і скористались нерівністю

$$\begin{aligned}
\rho(t, \beta, x, z) + \rho((\nu_o + m)\beta, \tau, z, \xi) &\geq \\
&\geq \rho((\nu_o + m)t, \tau, x, \xi), \quad \beta \leq t.
\end{aligned}$$

Далі, застосувавши лему про оцінку об'ємного інтегралу і скориставшись тим, що $\beta - \tau \geq (t - \tau)/2$, остаточно одержали оцінку (21).

Оцінка A_3 впливає з гелдеровості матриці Гріна G_o по четвертому аргументу та оцінки (14) для резольвенти R :

$$\begin{aligned}
|A_3| &\leq C_R (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int_{t_1}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \int_{E_n} \left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}} \right)^\alpha e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq \\
&\leq CC(\varepsilon)(t-\tau)^{-\frac{n+2b-2\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times \\
&\quad \times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \quad t > \tau, x, \xi \in E_n. \quad (22)
\end{aligned}$$

У результаті оцінок для $A_1 - A_5$ (20)-(22) одержимо:

$$\begin{aligned}
|D_x^{2b} W(t, \tau, x, \xi)| &\leq C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \times \\
&\quad \times (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \\
&\quad t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.
\end{aligned}$$

Отже, для похідних об'ємного потенціалу W правильні оцінки (7).

Оцінка похідних розв'язку (5) впливає із його зображення (4) та оцінок для ФМР Г.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 444 с.
2. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических задач. — К.: Вища школа, 1990. — 199 с.
3. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — К.: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.
5. *Данилюк А.О.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболическої системи інтегро-диференціальних рівнянь // *Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика.* — 2007. — Вип. 349. — С. 18-24.
6. *Данилюк А.О.* Крайова задача для параболическої системи інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами // *Укр. мат. журн.* — 2008. — 60, №12. — С. 1610-1618.