УДК 517.956

©2012 р. **І.М. Довжицька, В.А. Літовченко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ШИЛОВА ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь типу Шилова із гладкими змінними обмеженими коефіцієнтами та невід'ємним родом у випадку, коли початкові дані належать до широкого класу узагальнених функцій.

We established the correct solvability of Cauchy problem for a class of Shilov type parabolic equations with smooth bounded variable coefficients and nonnegative genus in the case of initial data belonging to wide class of general functions.

Вступ. Розвиваючи ідею Я.І. Житомирського опису параболічно стійких до зміни коефіцієнтів систем типу Шилова, у [2] розглянуто клас диференціальних рівнянь із частинними похідними порядку p вигляду

$$\partial_t u(t;x) = \sum_{|k|_*\le p} a_k(t;x) i^{|k|_*} \partial_x^k u(t;x), \qquad (1)$$

$$t\in(0;T], x\in\mathbb{R}^n,$$

права частина яких допускає зображення

$$\sum_{|k|_*\le p} a_k(t;x) i^{|k|_*} \partial_x^k u(t;x) =$$

$$= \{P_0(t,i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x),$$

в якому

$$P_0(t,i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p} a_{0,k}(t) i^{|k|_*}\partial_x^k,$$

$$P_1(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p_1} a_{1,k}(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k,$$

причому відповідне рівняння

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t,i\partial_x)u(t;x), (t;x)\in(0;T]\times\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

є параболічним за Шиловим з показником параболічності h, $0<h\le p$ [3].

Для таких рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та досліджено його основні властивості гладкості й поведінки в околі нескінченно віддалених просторових точок за наступних умов:

A) $0\le p_1 < h - n(1-h\mu/p_0)$, $\quad 0\le\mu\le 1$ (тут μ – рід рівняння (2), а p_0 – зведений порядок цього рівняння [3]);

B) коефіцієнти $a_{0,k}(t)$– визначені на відрізку $[0;T]$ неперервні функції, $a_{1,k}(t;x)$ - неперервні за змінною t, нескінченно диференційовні за x обмежені на множині $[0;T]\times\mathbb{R}^n$ функції.

У пропонованій статті, використовуючи одержані в [2] результати про ФРЗК, для параболічних рівнянь (1) типу Шилова досліджується коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є.

1. Допоміжні відомості. Постановка задачі. Використовуватимемо тут позначення, введені в [2].

Нехай $S_\alpha, S^\beta, \alpha>0, \beta>0$, – відомі простори типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є., а S'_α і $S^{\beta\prime}$ – відповідні топологічно спряжені простори [4]. Через $G_\tau(t;\cdot), t\in(\tau;T], \tau\in[0;T)$, позначимо ФРЗК для рівняння (2). Відомо [5], що

$$G_\tau(t;\cdot) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot),$$

$$\theta_\tau^t(\cdot) := e^{\int_\tau^t P_0(\chi,\cdot)d\chi}, \quad 0\le\tau<t\le T$$

(тут $F^{-1}[\cdot]$ – обернене перетворення Фур'є), причому правильні такі оцінки:

$$\exists\delta_0>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists c_0>0\ \forall\tau\in[0;T)$$

$$\forall t \in (\tau; T]\ x \in \mathbb{R}^n: \quad |\partial_x^k G_\tau(t;x)| \le$$

$$\le c_0 (t-\tau)^{-\frac{n+|k|_*}{h}} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, \quad (3)$$

$$\alpha_* := \mu/p_0, \quad \mu \ge 0.$$

Звідси безпосередньо одержуємо, що функція $G_\tau(t;\cdot)$ при кожному фіксованому t з $(\tau; T]$ належить до простору $S_{1-\alpha_*}$, а отже, є згортувачем у цьому просторі.

Згідно з [2] ФРЗК для (1) має структуру

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G_\tau(t;x-\xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де

$$W(t,x;\tau,\xi) :=$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_\beta(t;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy.$$

Тут $\Phi(t,x;\tau,\xi) := \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi)$ – функціональний ряд, в якому

$$K_1(t,x;\tau,\xi) := P_1(t,x;i\partial_x)G_\tau(t;x-\xi),$$

$$K_l(t,x;\tau,\xi) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y)\times$$

$$\times K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \ \ l > 1.$$

Для всіх $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ виконуються такі оцінки [2]:

$$|\partial_\xi^k \partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le c_2 (t-\tau)^{-\frac{n+|k+q|_*}{h}} e^{-\delta_2 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, \quad (4)$$

$$|\partial_\xi^k \Phi(t,x+\xi;\tau,\xi)| \le$$

$$\le c_3 (t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta_3 \left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \quad (5)$$

(тут оціночні сталі c_j, δ_j не залежать від t, τ, x і ξ, а δ_j – ще і від k та q).

Надалі нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Для похідних функції Z правильна оцінка*

$$|\partial_\xi^k Z(t,x+\xi;0,\xi)| \le c_k t^{\beta_k - \frac{n}{h}} e^{-\delta_4 \left(\frac{\|x\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n, t \in (0;T], \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $\beta_k := \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \alpha_0, & k \ne 0, \end{cases}$ $\alpha_0 := 1 + \alpha_* n - \frac{n+p_1}{h}$*; додатні сталі c_k, δ_4 не залежать від t, x і ξ, а δ_4 – ще й від k.*

Доведення. Згідно з оцінками (43), (5) маємо

$$Y_k(t,x,\xi) := \Big| \int_0^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_\beta(t;x-\zeta)\partial_\xi^k \times$$

$$\times \Phi(\beta,\zeta+\xi;0,\xi)d\zeta \Big| \le$$

$$\le c_0 c_3 \int_0^t (t-\beta)^{\alpha_0 + \frac{p_1}{h} - 1} \beta^{\alpha_0 - 1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_* \left\{ \left(\frac{\|x-\zeta\|}{(t-\beta)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}} + \left(\frac{\|\zeta\|}{\beta^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}} \right\}} \times$$

$$\times \frac{dy}{((t-\beta)\beta)^{\alpha_* n}} d\beta, \quad \delta_* := \min\{\delta_0, \delta_3\}.$$

Скориставшись тепер оцінкою (8) з [2] та рівністю

$$\int_0^t (t-\beta)^{\alpha_0 + \frac{p_1}{h} - 1} \beta^{\alpha_0 - 1} d\beta = t^{2\alpha_0 + \frac{p_1}{h} - 1} B\Big(\alpha_0 + \frac{p_1}{h}, \alpha_0\Big)$$

(тут $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція Ейлера), одержимо

$$Y_k(t,x,\xi) \le c_\varepsilon t^{\alpha_0 - \frac{n}{h}} e^{-\delta_*(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},$$

$$\varepsilon \in (0;1), k \in \mathbb{Z}_+^n, t \in (0;T], \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Звідси, врахувавши ще раз оцінку (43) та зображення

$$Z(t,x+\xi;0,\xi) = G_0(t;x) +$$

$$+ \int_0^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G_\beta(t;x-\zeta)\Phi(\beta,\zeta+\xi;\xi)d\zeta,$$

приходимо до твердження вихідної леми.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай $\varphi(\cdot)$ – довільно фіксований елемент простору $S_{1-\alpha_*}$, а $I_G(t;\cdot) := G_0(t;\cdot) * \varphi(\cdot)$, $t \in (0;T]$, тоді*

$$I_G(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \varphi(\cdot).$$

Доведення. Оскільки функція $G_0(t;\cdot)$, $t \in (0;T]$, є згортувачем у просторі $S_{1-\alpha_*}$, тобто $I_G(t;\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$, при кожному $t \in (0;T]$, а оператор перетворення Фур'є F встановлює неперервний ізоморфізм між просторами $S_{1-\alpha_*}$ і $S^{1-\alpha_*}$ [4], то для доведення цієї леми досить установити граничне співвідношення

$$F[\varphi](\cdot)\theta_0^t(\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S^{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} F[\varphi](\cdot). \qquad (6)$$

Згідно з критерієм збіжності в просторах типу S [4], співвідношення (6) виконуватиметься, якщо:

1) $\partial_\zeta^k(F[\varphi](\zeta)\theta_0^t(\zeta)) \underset{t\to+0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \partial_\zeta^k F[\varphi](\zeta)$ $(\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n)$,
або, що те ж саме, що

$$\partial_\zeta^q(\theta_0^t(\zeta) - 1) \underset{t\to+0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0 \quad (\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n\ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n) \quad (7)$$

(тут $\mathbb{K}$ – компактна множина з $\mathbb{R}^n$);

2) сукупність функцій $F[\varphi](\cdot)\theta_0^t(\cdot)$ є обмеженою по t (при $0 < t \ll 1$) у просторі $S^{1-\alpha_*}$, тобто

$$\exists A > 0\, \exists \varepsilon \in (0;1)\, \forall q \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists c_q > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n$$

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^n\, \forall t \in (0;\varepsilon):$$

$$|\zeta^q \partial_\zeta^k(F[\varphi](\zeta)\theta_0^t(\zeta))| \le c_q A^{|k|_*}|k|_*^{(1-\alpha_*)|k|_*}.$$

Виконання граничного співвідношення (7) стає очевидним, якщо зважити на структуру функції $\theta_0^t(\cdot)$ та обмеженість коефіцієнтів $a_{0,k}(\cdot)$.

Твердження 2) також виконується, воно одержується безпосередньо з властивостей $F[\varphi](\cdot)$, як елемента простору $S^{1-\alpha_*}$, та оцінки [5]

$$|\partial_\xi^k \theta_0^t(\xi))| \le cA^{|k|_*}|k|_*^{(1-\alpha_*)|k|_*}e^{-\delta t\|\xi\|^h},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

(тут оціночні сталі c, A і δ не залежать від t, ξ і k).

Лему доведено.

Тепер задамо для рівняння (1) початкову умову

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in S'_{1-\alpha_*}, \qquad (8)$$

яку розумітимемо як слабку збіжність у просторі $S'_{1-\alpha_*}$, тобто

$$\langle u(t;\cdot), \varphi(\cdot)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f, \varphi(\cdot)\rangle \quad (\forall \varphi \in S_{1-\alpha_*})$$

(тут кутовими дужками $\langle,\rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну).

Задача полягає у знаходженні диференційовної за змінною t, нескінченно диференційовної за змінною x на множині $\Pi_{(0;T]} := (0;T] \times \mathbb{R}^n$ функції $u(t;x)$, яка задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (8) у сенсі слабкої збіжності в просторі $S'_{1-\alpha_*}$.

2. Коректна розв'язність. Передусім встановимо необхідні властивості ФРЗК для рівняння (1) у вигляді наступних допоміжних тверджень.

Лема 3. *Функція $Z(t,x;0,\cdot)$, як абстрактна функція у просторі $S_{1-\alpha_*}$ параметра:*

1) t з $(0;T]$ (при фіксованому $x \in \mathbb{R}^n$), диференційовна за змінною t;

2) x з $\mathbb{R}^n$ (при фіксованому $t \in (0;T]$), нескінченно диференційовна за змінною x.

Доведення твердження 1) зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\Psi_{\Delta t,x}(\xi) := \frac{Z(t+\Delta t, x; 0, \xi) - Z(t,x;0,\xi)}{\Delta t}$$

$$\underset{\Delta t\to 0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \partial_t Z(t,x;0,\xi),$$

тобто, що для кожного $q \in \mathbb{Z}_+^n$ при фіксованому $x \in \mathbb{R}^n$:

а) у кожній кулі $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}^n$

$$\partial_\xi^q \Psi_{\Delta t,x}(\xi) \underset{\Delta t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \partial_\xi^q(\partial_t Z(t,x;0,\xi));$$

б) $|\partial_\xi^q \Psi_{\Delta t,x}(\xi)| \le c_q e^{-\delta\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, де сталі c_q, δ не залежать від Δt (при $0 < |\Delta t| \ll 1$).

Оскільки функція $Z(t,x;0,\xi)$ диференційовна за t у звичайному розумінні, причому

$$\partial_t Z(t,x;0,\xi)=\{P_0(t,i\partial_x)+$$
$$+P_1(t,x;i\partial_x)\}Z(t,x;0,\xi),$$

то з нерівності (4) та властивостей коефіцієнтів рівняння (1) випливає, що

$$|\partial_\xi^q(\partial_t Z(t,x;0,\xi))|\le \tilde c_2 t^{-\frac{n+p+|q|_*}{h}}\times$$
$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|x-\xi\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},\quad q\in\mathbb{Z}_+^n, t\in(0;T],$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де сталі $\tilde c_2$, δ_3 не залежать від t, x і ξ, а δ_3 – ще й від q.

Звідси, врахувавши зображення

$$\Psi_{\Delta t,x}(\xi)=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{\Delta t}\partial_t Z(t+\chi,x;0,\xi)d\chi,$$

одержуємо наступну оцінку:

$$|\partial_\xi^q\Psi_{\Delta t,x}(\xi)|\le\frac{\tilde c_2}{|\Delta t|}\int\limits_0^{|\Delta t|}(t+\chi)^{-\frac{n+p+|q|_*}{h}}\times$$
$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t+\chi)^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}d\chi\le\tilde c_2 t^{-\frac{n+p+|q|_*}{h}}\times$$
$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\frac{3t}{2})^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},\quad |\Delta t|<\frac{t}{2}, q\in\mathbb{Z}_+^n,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

яка при фіксованому x еквівалентна умові б).

Оскільки $\partial_t Z(t+\chi,x;0,\xi)$ неперевно залежить від параметра χ, то згідно з теоремою про середнє

$$\partial_\xi^q\Psi_{\Delta t,x}(\xi)=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{\Delta t}\partial_\xi^q(\partial_t Z(t+\chi,x;0,\xi))d\chi$$
$$\underset{\Delta t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}}\partial_\xi^q(\partial_t Z(t,x;0,\xi)),\quad q\in\mathbb{Z}_+^n,$$

тобто умова а) також виконується.

Доведемо твердження 2). Для цього досить установити граничне співвідношення

$$Y_{\Delta x_j,t}(\xi):=\frac{Z(t,x+\Delta x;0,\xi)-Z(t,x;0,\xi)}{\Delta x_j}$$
$$\xrightarrow[\Delta x_j\to 0]{S_{1-\alpha_*}}\partial_{x_j}Z(t,x;0,\xi),$$

в якому $\Delta x:=(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},\Delta x_j,0,\ldots,0)$, або, що теж саме, що:

в) $\partial_\xi^q Y_{\Delta x_j,t}(\xi)\underset{\Delta x_j\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}}\partial_\xi^q(\partial_{x_j}Z(t,x;0,\xi))$ $(\forall q\in\mathbb{Z}_+^n)$;

г) $\forall t\in(0;T]$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\exists\delta>0$ $\exists\varepsilon\in(0;1)$ $\forall q\in\mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_{q,t}>0$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ $\forall\Delta x_j\in(-\varepsilon;\varepsilon)$:

$$|\partial_\xi^q Y_{\Delta x_j,t}(\xi)|\le c_{q,t}e^{-\delta\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}.$$

Зобразимо $Y_{\Delta x_j,t}(\cdot)$ у вигляді

$$Y_{\Delta x_j,t}(\xi)=\frac{1}{\Delta x_j}\int\limits_0^{\Delta x_j}\partial_{x_j}Z(t,x+\omega;0,\xi)d\omega_j,$$

де $\omega:=(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},\omega_j,0,\ldots,0)$. Оскільки $\partial_{x_j}Z(t,x+\omega;0,\xi)$ неперервно залежить від параметра ω_j (бо зсув – неперервна операція в просторах типу S), то згідно з теоремою про середнє

$$\partial_\xi^q Y_{\Delta x_j,t}(\xi)=\frac{1}{\Delta x_j}\int\limits_0^{\Delta x_j}\partial_\xi^q(\partial_{x_j}Z(t,x+\omega;0,\xi))d\omega_j$$
$$\underset{\Delta x_j\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}}\partial_\xi^q(\partial_{x_j}Z(t,x;0,\xi)),\quad q\in\mathbb{Z}_+^n,$$

отже, умова в) виконується.

Беручи до уваги оцінку (4), знайдемо, що

$$|\partial_\xi^q Y_{\Delta x_j,t}(\xi)|\le\frac{c_{2,t}}{|\Delta x_j|}\int\limits_0^{|\Delta x_j|}e^{-\delta_2\left(\frac{\|x-\xi+\omega\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}d\omega_j\le$$
$$\le c_{2,t}e^{-\delta_2\left(\frac{\|x-\xi\|}{2t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},$$
$$q\in\mathbb{Z}_+^n,\ |\Delta x_j|<\frac{1}{2}|x_j-\xi_j|,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$$

(тут враховано те, що $|x_j - \xi_j + \omega_j| \geq |x_j - \xi_j|/2$ при $|\Delta x_j| < |x_j - \xi_j|/2$). Остання нерівність при фіксованих t і x еквівалентна умові г).

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай* $\omega(t;x) := \langle f, Z(t,x;0,\cdot)\rangle$, $f \in S'_{1-\alpha_*}$, *тоді:*

1) функція ω диференційовна за змінною t на $(0;T]$ при фіксованому $x \in \mathbb{R}^n$ і нескінченно дифренційовна за x на $\mathbb{R}^n$ при фіксованому $t \in (0;T]$;

2) граничне співвідношення $\omega(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} f$ виконується в просторі $S'_{1-\alpha_*}$.

Доведення. Згідно з твердженням леми 3 функція $Z(t,x;0,\xi)$ диференційовна за t і нескінченно диференційовна за x у сенсі топології простору $S_{1-\alpha_*}$, тому $\omega(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\cdot)\rangle$ є звичайною функцією, диференційовною за змінною t і нескінченно диференційовною за x на множині $\Pi_{(0;T]}$. Таким чином, твердження 1) справджується.

Доведемо твердження 2). Зафіксуємо довільно елемент φ з $S_{1-\alpha_*}$ і розглянемо

$$\Psi_t(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x+\xi;0,\xi)\varphi(x+\xi)dx,$$

$$\Psi_{t,R}(\xi) := \int\limits_{\|x\|\leq R} Z(t,x+\xi;0,\xi)\varphi(x+\xi)dx,$$

$$R > 0.$$

Передусім встановимо рівність

$$\langle \omega(t;\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle f, \Psi_t(\cdot)\rangle, \quad 0 < t \ll 1. \quad (9)$$

Для цього досить установити, по-перше, належність $\{\Psi_t, \Psi_{t,R}\} \subset S_{1-\alpha_*}$ при кожному фіксованому $R > 0$ і $0 < t \ll 1$, по-друге, виконання граничного співвідношення

$$\Psi_{t,R}(\cdot) \underset{R\to+\infty}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \Psi_t(\cdot), \quad 0 < t \ll 1. \quad (10)$$

Покажемо, що $\{\Psi_t, \Psi_{t,R}\} \subset S_{1-\alpha_*}$ $(\forall R > 0,\ 0 < t \ll 1)$. Скориставшись належністю $\varphi(\cdot)$ до $S_{1-\alpha_*}$, а також твердженням леми 1, дістанемо

$$|\partial_\xi^k \Psi_t(\xi)| \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_\xi^l Z(t,x+\xi;0,\xi)| \times$$

$$\times |\partial_\xi^{k-l}\varphi(x+\xi)|dx \leq$$

$$\leq ct^{\beta_k - \frac{n}{h}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}} + \|x+\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}\right\}} dx.$$

Звідси, врахувавши існування сталих $\delta_0 > 0$ і $\delta_1 > 0$ таких, що

$$\delta\|x+\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}} \geq \delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}} - \delta_1\|x\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}, \quad (11)$$

приходимо до оцінки

$$|\partial_\xi^k \Psi_t(\xi)| \leq c_0 t^{\beta_k - \frac{n}{h}} e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}, k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (12)$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, 0 < t \ll \Big(\delta/2\delta_1\Big)^{\frac{1-\alpha_*}{\alpha_*}},$$

яка означає належність $\Psi_t(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$ при кожному додатному досить малому t.

Оскільки для кожного $R > 0$

$$|\partial_\xi^k \Psi_{t,R}(\xi)| \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_\xi^l Z(t,x+\xi;0,\xi)| \times$$

$$\times |\partial_\xi^{k-l}\varphi(x+\xi)|dx, k \in \mathbb{Z}_+^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0;T],$$

то для $\partial_\xi^k \Psi_{t,R}(\xi)$ також виконується оцінка (12), тобто $\Psi_{t,R}(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$ $(\forall R > 0,\ 0 < t \ll 1)$. Крім цього, константи c_0 і δ_0 в (12) не залежать від R, тому послідовність $\Psi_{t,R}(\cdot)$ стосовно R є обмеженою в $S_{1-\alpha_*}$.

Врахувавши тепер співвідношення

$$\int\limits_{\|x\|>R} e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

із оцінки

$$|\partial_\xi^k(\Psi_t(\xi) - \Psi_{t,R}(\xi))| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l \int\limits_{\|x\|>R} |\partial_\xi^l Z(t,x+\xi;0,\xi)|\,|\partial_\xi^{k-l}\varphi(x+\xi)|dx \leq$$

$$\leq c t^{\beta_k - \frac{n}{h}} \int\limits_{\|x\|>R} e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{t^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} dx,$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0;T],$$

одержуємо, що

$$\partial_\xi^k \Psi_{t,R}(\xi) \underset{R\to+\infty}{\overset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}} \partial_\xi^k \Psi_t(\xi) (\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall t \in (0;T]).$$

Звідси, згідно з критерієм збіжності в просторах типу S, приходимо до виконання граничного співвідношення (10), а відтак, і до правильності рівності (9).

З огляду на рівність (9), доведення твердження 2) зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\Psi_t(\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \varphi(\cdot),$$

або, що те ж саме,

$$I_G(t;\cdot) + I_W(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \varphi(\cdot),$$

де

$$I_G(t;\cdot) := G_0(t;\cdot) * \varphi(\cdot),$$

$$I_W(t;\cdot) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(t, x+\cdot; 0, \cdot)\varphi(x+\cdot)dx.$$

Однак, згідно з твердженням леми 2,

$$I_G(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \varphi(\cdot),$$

тому залишається встановити лише співвідношення

$$I_W(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} 0,$$

тобто переконатися у правильності таких тверджень:

а) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$: $\partial_\xi^k I_W(t;\xi) \underset{t\to+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0$;

б) $\exists \delta > 0\ \exists \varepsilon \in (0;1)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_k > 0\ \forall t \in (0;\varepsilon)\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $|\partial_\xi^k I_W(t;\xi)| \leq c_k e^{-\delta\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}$.

Згідно із структурою об'ємного потенціала W, маємо:

$$I_W(t;\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\beta(t; x+\xi-y) \times$$

$$\times \Phi(\beta, y; 0, \xi) dy\Big) \varphi(x+\xi)dx,\ (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Здійснивши тут послідовно заміну змінних інтегрування за правилами

$$y - \xi = \zeta, \quad x - \zeta = z,$$

відтак змінивши порядок інтегрування на підставі теореми Фубіні, прийдемо до такого зображення I_W:

$$I_W(t;\xi) = \int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\beta(t;z)\varphi(z+\zeta+\xi)dz \Big) \times$$

$$\times \Phi(\beta, \zeta+\xi; 0, \xi)d\zeta,\ (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Одержане зображення дозволяє встановити формулу

$$\partial_\xi^k I_W(t;\xi) = \sum_{l=0}^k C_k^l \int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} J_l(t-\beta; \zeta+\xi) \times$$

$$\times \partial_\xi^{k-l} \Phi(\beta, \zeta+\xi; 0, \xi)d\zeta,\ k \in \mathbb{Z}_+^n,\ (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{13}$$

в якій

$$J_l(t;\eta) := G_0(t;\eta) * \Phi_l(\eta), \quad \Phi_l(\eta) := \partial_\eta^l \varphi(\eta).$$

Оскільки у просторах типу S визначена операція диференціювання, то $\Phi_l(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$. Урахувавши все це, а також твердження леми 2, дістанемо граничне співвідношення

$$J_l(t;\cdot) \underset{t\to+0}{\overset{S_{1-\alpha_*}}{\longrightarrow}} \Phi_l(\cdot) \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_+^n),$$

яке гарантує обмеженість по t (при $0 < t \ll 1$) сукупності функцій $J_l(t;\cdot)$ у просторі $S_{1-\alpha_*}$, тобто

$$\exists \delta > 0\, \exists \varepsilon \in (0;1)\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists c_k > 0\, \forall t \in (0;\varepsilon)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n:\ |\partial_\xi^k J_l(t;\xi)| \leq c_k e^{-\delta\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}}$$

(згідно з критерієм збіжності в просторі $S_{1-\alpha_*}$).

Звідси та з формули (13), нерівності (11) й оцінки (5) випливає

$$|\partial_\xi^k I_W(t;\xi)| \leq c_k \int\limits_0^t \beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\|\xi+\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \times$$

$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|\zeta\|}{\beta^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} d\zeta d\beta \le$$

$$\le c_k e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \int\limits_0^t \beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\delta_1\|\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \times$$

$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|\zeta\|}{\beta^{\alpha_*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} d\zeta d\beta \le$$

$$\le c_k e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} \int\limits_0^t \beta^{\alpha_0-1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_3}{2}\|z\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}} dz =$$

$$= \tilde{c}_k t^{\alpha_0} e^{-\delta_0\|\xi\|^{\frac{1}{1-\alpha_*}}},\ \ 0 < t \ll 1,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}_+^n \tag{14}$$

(тут оціночні сталі $\tilde{c}_k$ і δ_0 не залежать від t і ξ, при цьому δ_0 не залежить ще й від k).

З огляду на оцінку (14) та на те, що $\alpha_0 > 0$, твердження а) і б) стають очевидними.

Лему доведено.

Наступне твердження характеризує коректну розв'язність задачі Коші (1), (8).

Теорема. *Задача Коші* (1), (8) *коректно розв'язна у класі початкових даних* $S'_{1-\alpha_*}$. *Її розв'язок диференційовний за* t, *нескінченно диференційовний за* x *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *і зображується формулою*

$$u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\xi)\rangle,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$
$$f \in S'_{1-\alpha_*}.$$

Доведення. З попередніх тверджень випливає, що для доведення необхідно встановити лише єдиність розв'язку задачі Коші (1), (8) та його неперервну залежність від початкової узагальненої функції $f \in S'_{1-\alpha_*}$. Для цього скористаємося загальною теоремою єдиності з §2 глави 2 книги [3].

Розглянемо задачу Коші для спряженого за Лагранжем рівняння:

$$\partial_\tau v(\tau;\xi) = -\{P_0^*(\tau,\partial_\xi) + P_1^*(\tau,\xi;\partial_\xi)\} v(\tau;\xi) \equiv$$
$$\equiv -P_{\tau,\xi}^* v(\tau;\xi), \quad (\tau;\xi) \in [t_0;t_1) \times \mathbb{R}^n,$$
$$v(\tau;\cdot) \xrightarrow[\tau\to t_1-0]{S_{1-\alpha_*}} \varphi(\cdot), \quad \varphi(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}, \tag{15}$$

де $0 \le t_0 < t_1 \le T$, а

$$P_0^*(\tau,\partial_\xi)\cdot := \sum_{|k|_* \le p} \overline{a_{0,k}(\tau)(-i)^{|k|_*}} \partial_\xi^k \cdot,$$

$$P_1^*(\tau,\xi;\partial_\xi)\cdot := \sum_{|k|_* \le p_1} \partial_\xi^k \Big(\overline{a_{1,k}(\tau;\xi)(-i)^{|k|_*}} \cdot\Big).$$

Оскільки у просторі $S_{1-\alpha_*}$ операція диференціювання визначена й неперервна, а коефіцієнти $a_{1,k}(\tau;\cdot)$ – мультиплікатори у цьому просторі [4], то $P_{\tau,\xi}^*\varphi(\xi) \in S_{1-\alpha_*}$ при довільних $\tau \in [t_0;T]$ і $\varphi(\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$.

Оператор $P_{\tau,\xi}$, спряжений за Лагранжем з $P_{\tau,\xi}^*$, діє у просторі $S'_{1-\alpha_*}$ і на гладких функціях φ визначається формулою

$$P_{\tau,\xi}\varphi(\xi) = \{P_0(\tau, i\partial_\xi) + P_1(\tau,\xi; i\partial_\xi)\}\varphi(\xi),$$
$$(\tau;\xi) \in \Pi_{[0;T]}.$$

Отже, задачу Коші (1), (8) можна подати у вигляді

$$\partial_t u(t;x) = P_{t,x} u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{16}$$
$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in S'_{1-\alpha_*}.$$

Згідно із зазначеною вище теоремою з [3] розв'язок задачі (16) єдиний і неперервно залежить від початкової функції f, якщо задача (15) розв'язна для довільних $t_1 \in (0;T]$ і $\varphi \in S_{1-\alpha_*}$.

Оскільки φ – обмежена гладка функція, то класичний розв'язок задачі (15) зображується формулою

$$v(\tau;\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau,\xi;t_1,x)\varphi(x)dx,$$

де Z^* – ФРЗК для спряженого рівняння. Зауважимо, що згідно з властивістю нормальності ФРЗК

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z}(t,x;\tau,\xi)$$

(тут $\overline{(\cdot)}$ означає комплексну спряженість). Отже, властивості функції Z^* такі, як у Z.

Як і у випадку Z доводимо, що $Z^*(\tau,\xi;t_1,\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$ при кожному $\tau < t_1$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$. Крім цього, розмірковуючи аналогічно як при доведенні леми 4 (див. властивості функції Ψ_t) переконуємося, що $v(\tau,\cdot) \in S_{1-\alpha_*}$ при $\tau < t_1$ і

$$v(\tau;\cdot) \xrightarrow[\tau\to t_1-0]{S_{1-\alpha_*}} \varphi(\cdot).$$

Таким чином, задача Коші (15) є розв'язною для довільних $t_1 \in (0;T]$ і $\varphi \in S_{1-\alpha_*}$.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Житомирский Я.И. Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравненй в частных производных с непрерывними коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – Т. 23. – С. 925-932.
2. Довжицька І.М., Літовченко В.А. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2010. – Випуск 528. – С. 43-50.
3. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
5. Литовченко В.А. Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, №4. – С. 809-821.