УДК 517.925

©2012 р. С.А.Іліка, О.В.Матвій, Л.А. Піддубна

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АПРОКСИМАЦІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Розглянуто систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, що не містить сингулярної складової. Побудовано та обгрунтовано схему апроксимації такої системи послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

We considered a system of linear differential-functional equations of neutral type, which does not contain a singular part. An approximation scheme of such a system is constructed and grounded by a sequence of the systems of ordinary differential equations.

Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше були запропоновані в роботі [1]. Для нелінійних ДРР запізнюючого типу такі задачі вивчались в [2-4], а для ДРР нейтрального типу в [5]. Схема апроксимації лінійних диференціально-функціональних рівнянь (ДФР) розглянута в [6]. Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації [6] для лінійних ДФР нейтрального типу.

1. Постановка задачі. Означення та допоміжні твердження.

Нехай R^n – дійсний n-вимірний лінійний векторний простір з деякою векторною нормою $|\cdot|$. Для $r \geq 0$ позначимо $C = C([-r,0], R^n)$ – простір неперервних функцій, що відображають $[-r,0]$ в R^n, з рівномірною нормою $|\varphi| = \sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} |\varphi|$. Припустимо, що g, f неперервні функції, які відображають $[r,\infty) \times C \to R^n$ та визначений функціонально різницевий оператор $D(\cdot) : [r,\infty) \times C \to R^n$,

$$D(t)\varphi = \varphi(0) - g(t,\varphi). \tag{1}$$

Диференціально-функціональним рівнянням нейтрального типу називатимемо рівняння

$$\frac{d}{dt} D(t)x_t = f(t, x_t), \tag{2}$$

де $x_t \in C$ визначається рівністю $x_t(\theta) = x(t+\theta), -r \leq \theta \leq 0$.

Означення 1 [7]. Для будь-яких $\varphi \in C, \sigma \in [r,\infty), A \geq 0$, функція $x(t,\varphi)$ визначена на $[\sigma - r, \sigma + A]$ називається розв'язком рівняння (2) на $[\sigma, \sigma + A]$ з початковим значенням φ в точці $t = \sigma$, якщо $x-$ неперервна на $[\sigma - r, \sigma + A]; x_\sigma = \varphi; D(t)x_t-$ неперервно диференційовна на $[\sigma, \sigma + A]$ і задовільняє рівність (2) на $[\sigma, \sigma + A]$.

Диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу є математичними моделями важливих прикладних задач в теорії автоматичного керування, в електродинаміці, біології, медицині та в багатьох інших прикладних задачах.

Основи теорії цих рівнянь, зокрема теореми існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків від початкових даних досліджені в роботах [7-10].

У даній роботі досліджуватимемо початкову задачу для лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t,x_t)] = P(t,x_t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \tag{4}$$

де $G(t,x_t), P(t,x_t)$ – лінійні обмежені функціонали, що не містять сингулярної складової вигляду

$$G(t,x_t) = \sum_{i=1}^{p} G_i(t)x(t-\tau_i) + \int_{-\tau}^{0} H(t,\theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$$P(t,x_t)=\sum_{i=0}^{p}P_i(t)x(t-\tau_i)+\int_{-\tau}^{0}Q(t,\theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$G_i(t), P_i(t), i=\overline{0,p}$ – $n\times n$ – неперервні матричні функції при $t\in[0,T], H(t,\theta), Q(t,\theta)$ – матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0,T]\times[-\tau,0]$, $0<\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=\tau$.

Позначимо $K_G=\max\limits_{k=\overline{1,p}}\max\limits_{t}||G_k(t)||$, $K_P=\max\limits_{k=\overline{0,p}}\max\limits_{t}||P_k(t)||$, $K_H=\max\limits_{t,\theta}||H(t,\theta)||$, $K_Q=\max\limits_{t,\theta}||Q(t,\theta)||$, $\omega_Q(\frac{\tau}{m})=n\max\limits_{i,j}\omega(q_{ij},\frac{\tau}{m})$,

$\omega_H(\frac{\tau}{m})=n\max\limits_{i,j}\omega(h_{ij},\frac{\tau}{m})$, де $\omega(q_{ij},\frac{\tau}{m})$, $\omega(h_{ij},\frac{\tau}{m})$ - модуль неперервності функцій $q_{ij}(t,\theta)$, $h_{ij}(t,\theta)$, $i,j=\overline{1,n}$, $t\in[0,T]$.

Припустимо, що для системи (3) справджується нерівність

$$pK_G+\tau K_H<1. \tag{5}$$

2. Обгрунтування схеми апроксимації. Нехай $m,p\in N$. Поставимо у відповідність рівнянню (3) систему звичайних диференціальних рівнянь де використано заміну інтегралів за формулою лівих прямокутників з кроком $h=\frac{\tau}{m}$.

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}[z_0(t)-\sum_{i=1}^{p}G_i(t)z_{l_i}(t)-\\&-\tfrac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1}H(t,-\tfrac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)]=\\&=\sum_{i=0}^{p}P_i(t)z_{l_i}(t)+\tfrac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1}Q(t,-\tfrac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{dz_j(t)}{dt}=\tfrac{m}{\tau}(z_{j-1}(t)-z_j(t)),j=\overline{1,m},\\&t\in[0,T],l_i=[\tfrac{m\tau_i}{\tau}].\end{aligned} \tag{6}$$

$$z_j(0)=\varphi(-\frac{\tau j}{m}),j=\overline{0,m}. \tag{7}$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (6) апроксимує систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (3), якщо справджуються співвідношення

$||x(t-\frac{\tau j}{m})-z_j(t)||\to 0, j=\overline{0,m}, t\in[0,T]$ при $m\to\infty$.

Дослідимо питання про близькість розв'язків початкової задачі (3)-(4) та розв'язків задачі Коші (6)-(7).

Розглянемо зображення $z_j(t)=z_j^{(1)}(t)+z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ - розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned}&\tfrac{\tau}{m}z'^{(1)}_1(t)+z_1^{(1)}(t)=x(t),t\in[0,T],\\&\tfrac{\tau}{m}z'^{(1)}_j(t)+z_j^{(1)}(t)=z_{j-1}^{(1)}(t),j=\overline{2,m},\\&z_j^{(1)}(0)=x(-\tfrac{j\tau}{m}),j=\overline{1,m};\end{aligned} \tag{8}$$

$$\tfrac{\tau}{m}z'^{(2)}_1(t)+z_1^{(2)}(t)=z_0(t)-x(t),t\in[0,T],$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\tau}{m}z'^{(2)}_j(t)+z_j^{(2)}(t)=z_{j-1}^{(2)}(t),j=\overline{2,m},\\&z_j^{(2)}(0)=0,j=\overline{1,m}.\end{aligned} \tag{9}$$

Оцінимо різниці $z_j(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})$, $j=\overline{1,m}$ враховуючи структуру систем (8)-(9) та нерівність $||z_j(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})||\le||z_j^{(2)}(t)||+$ $+||z_j^{(1)}(t)-x(t-\frac{j\tau}{m})||$.

Враховуючи позначення $z_j(t)=(z_{j1}(t),...,z_{jn}(t))$, $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$, представимо $z_{ji}(t)$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\begin{aligned}&\tfrac{\tau}{m}\tfrac{dz_{j1}^{(1)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(1)}(t)=x_i(t),i=\overline{1,n},\\&\tfrac{\tau}{m}\tfrac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(1)}(t)=z_{j-1,i}^{(1)}(t),j=\overline{2,m},\end{aligned} \tag{10}$$

$$z_{ji}^{(1)}(0)=x_i(-\frac{j\tau}{m}),j=\overline{1,m},i=\overline{1,n}; \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\tau}{m}\tfrac{dz_{j1}^{(2)}(t)}{dt}+z_{j1}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),\\&\tfrac{\tau}{m}\tfrac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt}+z_{ji}^{(2)}(t)=z_{j-1,i}^{(2)}(t),j=\overline{2,m},\end{aligned} \tag{12}$$

$$z_{ji}^{(2)}(0)=0,j=\overline{1,m},i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Нехай

$$\begin{aligned}&N_j(t)=\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(s-\tfrac{\tau j}{m})-z_{ji}(s)|,\\&j=\overline{0,m},t\in[0,T].\end{aligned} \tag{14}$$

Враховуючи вигляд систем (10) та (12) для різниці $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{\tau j}{m})-z_{ji}(t)|$ маємо нерівність

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\tfrac{j\tau}{m})-z_{ji}(t)|\le\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(t)|+\\&+\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\tfrac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|.\end{aligned} \tag{15}$$

Покажемо методом математичної індукції, що для першого доданку в правій частині (15) справедлива оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}^{(2)}(s)| \le N_0(t),\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T]. \tag{16}$$

Для розв'язку задачі Коші

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt}+z_{1i}^{(2)}(t)=z_{0i}(t)-x_i(t),$$

$$z_{1i}^{(2)}(0)=0,$$

маємо зображення

$$z_{1i}^{(2)}(t)=\frac{m}{\tau}\int_0^t (z_{0i}(\xi)-x_i(\xi))exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{1i}^{(2)}(t)| \le \frac{m}{\tau}\int_0^t (\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|z_{0i}(s)-x_i(s)|)\times$$

$$\times exp(\frac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi \le N_0(t).$$

Припустимо, що нерівність (16) справджується при $j=k:\ \sum\limits_{i=1}^{n}|z_{ki}^{(2)}(t)|\le N_0(t)$.

Покажемо, що дана нерівність буде справедлива при $j=k+1$. Маємо оцінку

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|z_{k+1,i}^{(2)}(t)| \le\\ &\le \tfrac{m}{\tau}\int_0^t (\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}|z_{ki}^{(2)}(s)|)\exp(\tfrac{m(\xi-t)}{\tau})d\xi \le\\ &\le N_0(t).\end{aligned}$$

Отже, нерівність (16) має місце.

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі диференціально-функціонального рівняння (3) [8, 11] маємо, що функції $x_i(t)\in C[-\tau,T]$, $i=\overline{1,n}$ – тому, застосовуючи теорему 1 [12], для різниці $|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)|$ дістаємо оцінку

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)| \le \gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}), \lim_{\delta\to 0}\gamma(\delta)=0. \tag{17}$$

Нерівність (17) справедлива для всіх $t\in[0,T]$, тому враховуючи (14), маємо

$$N_j(t)\le\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+N_0(t),\ \ j=\overline{1,m}. \tag{18}$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді такого твердження.

Лема 1. . *Нехай вхідна функція $x(t)$ в системі (8) є неперервною при $t\in[0,T]$, тоді для розв'язків задач Коші (8)-(9) справджується співвідношення (17), де $N_j(t)$ визначається рівністю (14).*

Для оцінки різниці $||x(t)-z_0(t)||$, представимо рівняння (3) та (6) в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{aligned}&[x(t)-\sum_{i=1}^{p}G_i(t)x(t-\tau_i)-\int_{-\tau}^{0}H(t,\theta)x(t+\theta)d\theta]\\ &-[x(0)-\sum_{i=1}^{p}G_i(0)x(-\tau_i)-\int_{-\tau}^{0}H(0,\theta)x(\theta)d\theta]=\\ &=\int_0^t\sum_{i=0}^{p}P_i(t)x(t-\tau_i)dt+\\ &+\int_0^t\sum_{i=0}^{m-1}\int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}}Q(t,\theta)x(t+\theta)d\theta dt;\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&[z_0(t)-\sum_{i=1}^{p}G_i(t)z_{l_i}(t)-\tfrac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1}H(t,-\tfrac{\tau(m-i)}{m})\times\\ &\times z_{m-i}(t)]-[z_0(0)-\sum_{i=1}^{p}G_i(0)z_{l_i}(0)-\\ &-\tfrac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1}H(0,-\tfrac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(0)]=\\ &=\int_0^t\sum_{i=0}^{p}P_i(t)z_{l_i}(t)dt+\\ &+\int_0^t\sum_{i=0}^{m-1}\int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}}Q(t,-\tfrac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)d\theta dt.\end{aligned} \tag{20}$$

Встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші (6)-(7). Нехай початкові умови для системи (6)-(7) задовольняють нерівності $\sum\limits_{i=1}^{n}|z_{ji}(0)|<\delta, j=\overline{0,m}$. Позначимо

$$M(t)=\max_{s\in[0,t]}[\delta,\sum_{i=1}^{n}|z_{0i}(s)|]. \tag{21}$$

Із векторного рівняння

$\frac{dz_1}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_0(t) - z_1(t))$ одержимо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0)exp(\frac{-mt}{\tau}) + \frac{m}{\tau}\int\limits_0^t z_{0i}(s)\times$$
$$\times exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{1i}(t)| \le M(t)(exp(\frac{-mt}{\tau})+$$

$$+\frac{m}{\tau}\int\limits_0^t exp(\frac{m(s-t)}{\tau})ds) = M(t).$$

Аналогічно, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}(t)| \le M(t), j = \overline{1,m}. \qquad (22)$$

Враховуючи рівність (20), маємо

$$||z_{0i}(t)|| \le ||\sum_{i=1}^{p} G_i(t)z_{l_i}(t)||+$$
$$+\frac{\tau}{m}||\sum_{i=0}^{m-1} H(t,-\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)|| + ||z_{0i}(0)|+$$
$$+||\sum_{i=1}^{p} G_i(0)z_{l_i}(0)|| + \frac{\tau}{m}||\sum_{i=0}^{m-1} H(0,-\frac{\tau(m-i)}{m})\times$$
$$\times z_{m-i}(0)|| + \int\limits_0^t ||\sum_{i=1}^{p} P_i(s)z_{l_i}(s)||ds+$$
$$+\int\limits_0^t ||\sum_{i=1}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} Q(s,-\frac{\tau(m-i)}{m})\times$$
$$\times z_{m-i}(s)d\theta||ds \le K_G\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}||z_{l_{i,l}}(t)||+$$
$$+\frac{\tau}{m}K_H\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n}||z_{m-i,l}(t)|| + ||z_{0i}(0)||+$$
$$+K_G\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}||z_{l_{i,l}}(0)||+$$
$$+\frac{\tau}{m}K_H\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n}||z_{m-i,l}(0)||+$$

$$+K_P\int\limits_0^t\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}||z_{l_{i,l}}(s)||ds+$$
$$+\frac{\tau}{m}K_H\int\limits_0^t\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n}||z_{m-i,l}(s)||ds \le$$
$$\le ||z_{0i}(0)|| + (pK_G + \tau K_H)M(t)+$$
$$+(pK_G + \tau K_H)M(0) + (pK_P + \tau K_Q)\int\limits_0^t M(s)ds.$$

Сумуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\sum_{l=1}^{n}||z_{0l}(t)|| \le \sum_{i=1}^{n}||z_{0i}(0)||+$$
$$+n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G + \tau K_H)M(0)+$$
$$+n(pK_P + \tau K_Q)\int\limits_0^t M(s)ds.$$

Отже,

$$M(t) \le \delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t)+$$
$$+n(pK_G + +\tau K_H)M(0) + n(pK_P+$$
$$+\tau K_Q)\int\limits_0^t M(s)ds. \qquad (23)$$

Використовуючи лему Гронуолла-Беллмана та позначення (21), маємо

$$M(t) \le (\delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G+$$
$$+\tau K_H)M(0))e^{n(pK_P+\tau K_Q)T} = K_Z. \qquad (24)$$

Із рівностей (19),(20), враховуючи властивості матриць $G_i(t), P_j(t)$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{0,p}$, $H(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$, та (24), дістаємо

$$||x(t) - z_0(t)|| \le \sum_{i=1}^{p}||G_i(t)||\cdot||x(t-\tau_i)-$$
$$-z_{l_i}(t)|| + ||\int\limits_{-\tau}^{0} H(t,\theta)x(t+\theta)d\theta-$$
$$-\frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} H(t,-\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)|| + \sum_{i=1}^{p}||G_i(0)||\times$$
$$\times||x(-\tau_i) - z_{l_i}(0)|| + ||\int\limits_{-\tau}^{0} H(0,\theta)x(\theta)d\theta-$$
$$-\frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} H(0,-\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(0)||+$$
$$+\int\limits_0^t\sum_{i=0}^{p}||P_i(t)||\cdot||x(t-\tau_i) - z_{l_i}(t)||dt+$$
$$+\int\limits_0^t\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}}||Q(t,\theta)x(t+\theta)-$$
$$-Q(t,-\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)||d\theta dt \le pK_G(\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+$$
$$+N_0(t) + n\omega(\frac{\tau}{m})) + \tau[K_H(n\omega(\frac{\tau}{m}) + \gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})+$$
$$+N_0(t)) + K_Z\omega_H] + pK_Gn\omega(\frac{\tau}{m})+$$
$$+\tau[K_Hn\omega(\frac{\tau}{m}) + K_Z\omega_H] + T(p+1)K_P\times$$
$$\times[\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\frac{\tau}{m})] + (p+1)K_P\int\limits_0^t N_0(s)ds+$$
$$+T\tau[K_Q[n\omega(\frac{\tau}{m}) + \gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})] + K_Z\omega_Q]+$$
$$+\tau K_Q\int\limits_0^t N_0(s)ds. \qquad (25)$$

Одержана нерівність справедлива для всіх $t \in [0, T]$, тому враховуючи нерівність (5) маємо

$$N_0(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t N_0(s)ds,$$

де

$$\alpha = \frac{[\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\frac{\tau}{m})] \cdot [pK_G + \tau K_H + T\tau K_Q +}{[1 - pK_G - \tau K_H]}$$

$$\frac{+T(p+1)K_P] + \tau K_Z \omega_H + pK_G n\omega(\frac{\tau}{m}) +}{[1 - pK_G - \tau K_H]}$$

$$\frac{+\tau[K_H n\omega(\frac{\tau}{m}) + K_Z\omega_H] + T\tau K_Z \omega_Q}{[1 - pK_G - \tau K_H]},$$

$$\beta = \frac{[(p+1)K_P + \tau K_Q]}{[1 - pK_G - \tau K_H]}$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла-Беллмана, одержуємо

$$N_0(t) \leq \alpha(\frac{\tau}{m})e^{\beta}, t \in [0, T], \qquad (26)$$

Оскільки $\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})$, $\omega(\frac{\tau}{m})$, $\omega_H \to 0$ при $m \to \infty$, тоді

$$\lim_{m \to \infty} \alpha(\frac{\tau}{m}) = 0.$$

Із останнього співвідношення випливає, що розв'язки задачі Коші (6)-(7) апроксимують розв'язки початкової задачі (3) при $m \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай $G_i(t), P_i(t), i = \overline{0,p}$ – $n \times n$ – неперервні матричні функції при $t \in [0,T], H(t,\theta), Q(t,\theta)$ – матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0,T] \times [-\tau, 0]$, $0 < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = \tau$ і виконуеться умова (5). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (6),(7) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу розв'язок (3) при $m \to \infty$ і $t \in [0,T]$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 716–725.
2. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, №2.– С. 226 - 245.
3. Піддубна Л.А., Черевко І. М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – № 1. – С.42–50.
4. Матвій О.В.,Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 208–216.
5. Матвій О.В., Черевко І.М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, №3. — С. 329 - 335.
6. Матвій О.В., Черевко І.Про апроксимацію систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2006.– Вип. 314 – 315. Математика. – С. 125–128.
7. Cruz M.A., Hale J.K. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type // Journal Of Differential Equations. – 1970. – Vol. 7. – P. 334–355.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1984. – 421с.
9. Hale J.K., and Verduyn Lunel S.M., Introduction to Functional Differential Equations, Springer Verlag, New York, NY, 1993. – 447p.
10. Burns J.A., Herdman T.L., Steck H.W. Linear Functional Differential Equations as Semigroups on Product Spaces // SIAM J.Math. Analysis. – 1983, №14. – P. 98–116.
11. Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics. - Academic Press, 1993. - 398 p.
12. Черевко І.М., Матвій О.В., Стельмащук Л.В. Про апроксимацію системи різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2007. – Вип. 349. Математика. – С. 88–94.