УДК 629.7:533.6.001

©2012 р. **В.В. Гоцуленко**

Інститут технічної теплофізики НАН України

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАНЬ В ОДНІЙ ДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ З ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ФАЗОВОЇ КООРДИНАТИ

Визначено умови існування граничних циклів (автоколивань) і встановлений характер їх стійкості в одній динамічній системі зі змінним запізненням, що є узагальненням рівняння Льєнара і рівнянь осциляторів Ван-дер-Поля і Релея.

The conditions for the existence of limit cycles (oscillations) and character set their stability in a dynamical system with variable delay, which is a generalization of the Lienard, van - der - Pol and Rayleigh equations.

1. Вступ. Багато фізичніх процесів при їх математичному моделюванні приводять до диференціальних рівнянь із запізненням аргументу. Зокрема, це має місце при феноменологічному розгляді процесів горіння, коли необхідно враховувати час згорання палива [1,2]. Проте відзначимо, що в багатьох випадках запізнення згорання не є постійною величиною, а істотно залежить від ряду фізичних параметрів, наприклад, від внутрішньокамерного тиску в камері згорання рідинного ракетного двигуна або камері горіння регенеративного повітронагрівача доменної печі [2]. Це приводить до розгляду, у відповідних математичних моделях, диференціальних рівнянь із запізненнями аргументів, які є заданими нелінійними функціями від невідомих фазових координат.

Зазначимо, що дослідження коливальних процесів у квазілінійних динамічних системах з постійним запізненням проводиться, як правило, за допомогою асимптотичних методів, які є узагальненням на випадок систем з запізненням відомих асимптотичних методів теорії нелінійних коливань: методу малого параметра Пуанкаре – Ляпунова, методу усереднення Крилова – Боголюбова – Митропольського та їх модифікацій [3,4]. Зокрема, метод усереднення був узагальнений для рівнянь із запізненням і диференціально - функціональних рівнянь [4].

Однак у розглянутій нижче задачі застосування даних методів є досить проблематичним. У цьому випадку для знаходження періодичних розв'язків, що визначають режим автоколивань, застосовується теорема про біфуркацію народження граничного циклу із положення рівноваги, що є центром в точці біфуркації.

2. Постановка задачі. Математична модель процесу вібраційного горіння, з урахуванням часу запізнення згорання палива, зводиться до наступної динамічної системи [1,2]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\left(H\left(x\right) - y\right), \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta\left(x(t-\Delta) - \xi\left|\frac{y-H_0}{\eta-H_0}\right|^a\right),$$

де $H\left(x\right) = \eta - \gamma\Psi\left(x-\xi\right)$; $\Psi\left(x\right) = x\left(x-b_1\right)\left(x-b_2\right)$; $\alpha,\ \beta > 0$; $b_1 \cdot b_2 < 0$; H_0, η, γ, a, $\xi = \mathrm{const}$. Асимптотичний аналіз автоколивань в системі (1) при відсутності запізнення $\Delta = 0$ розглядався в [5], а стабілізація нестійкого положення рівноваги системи (1) параметричними коливаннями – вивчалася в [6].

У даній роботі розглядається асимптотичний аналіз періодичних розв'язків системи (1) при одночасному наближенні параметрів γ і a до нуля для випадку, коли

$$\gamma = \sum_{k\geq 0}\gamma_k\varepsilon^{k+1},\ a = \sum_{k\geq 0}a_k\varepsilon^{k+1};\ \gamma_0,\ a_0 > 0,$$

і запізнення Δ є змінним, що задається відомою функцією від фазової координати, тобто $\Delta = f(y(t))$. Вивчення автоколивань в розглянутій задачі за допомогою числових методів проводилося в роботах [2,7].

3. Умови існування автоколивальних розв'язків при змінному запізненні. Надалі будемо припускати, що запізнення Δ можна представити у вигляді наступного розкладу

$$\Delta = f(y,\varepsilon) = f_0(y)\,\varepsilon + f_1(y)\,\varepsilon^2 + \ldots \qquad (2)$$

де $f_k(y)\,(k \geq 0)$ – довільні, достатньо гладкі функції. Скориставшись при $\Delta \to 0$ розкладом Тейлора

$$x(t-\Delta) = x(t) - \Delta\frac{dx(t)}{dt} + O\left(\Delta^2\right),$$

одержимо систему рівнянь (1), яку перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\left(H(x) - y\right), \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta\Bigg(x(t) - \alpha\Delta\left(H(x) - y\right) - \\ -\xi\left|\frac{y-H_0}{\eta-H_0}\right|^a + O\left(\Delta^2\right)\Bigg).$$

Далі, виконавши в системі (2) заміну змінних

$$X = \sqrt{\beta}\,(x-\xi)\,,\ Y = \sqrt{\alpha}\,(y-\eta)\,,\ \tau = \omega_0 t, \qquad (4)$$

з точністю до величин $O\left(\varepsilon^2\right)$ запишемо її наступним чином

$$\frac{dX}{d\tau} = -Y + \varepsilon F_1(X,Y)\,, \qquad (5)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = X + \varepsilon F_2(X,Y)\,,$$

де

$$F_1(X,Y) = -\gamma_0\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right), \qquad (6)$$

$$F_2(X,Y) = \\ \omega_0 f_0\left(\eta + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}}\right)\left[Y + \sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)\right] - \\ -a_0\sqrt{\beta}\xi\ln\left|1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}\,(\eta - H_0)}\right|.$$

При $\varepsilon = 0$ система (4) є консервативною. Відомо, що певними збуреннями консервативну систему можна перетворити в автоколивальну, причому граничний цикл якої буде близьким до однієї із замкнених фазових траєкторій вихідної незбуреної консервативної системи. Відносно цього має місце наступний результат [8].

Теорема 1. *Розглядається система при* $\varepsilon \to +0$

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon f_1(x,y)\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \varepsilon f_2(x,y)\,.$$

Покладемо

$$\ell_A = \{(x,y) : x = A\cos(t), y = \sin(t), \\ 0 \leq t < 2\pi\}\,.$$

Нехай також

$$F(A) = \oint\limits_{\ell_A} f_1(x,y)dy - f_2(x,y)\,dx.$$

Тоді якщо функція $F(A)$ має простий додатній корень A^*, то при малих $\varepsilon > 0$ динамічна система, що розглядається має граничний цикл $\Gamma_\varepsilon \simeq \ell_{A^*}$, орбітально асимптотично стійкий при $\left.\frac{dF}{dA}\right|_{A=A^*} < 0$ і нестійкий, якщо $\left.\frac{dF}{dA}\right|_{A=A^*} > 0$.

Наведена теорема визначає жорстку біфуркацію народження граничного циклу з положення рівноваги. При цьому вона не є ні суперкритичною, ні субкритичною біфуркацією Андронова – Хопфа. Для розглянутої динамічної системи положення рівноваги в точці біфуркації є центром і його перша ляпуновська величина дорівнює нулю. В умовах же теореми Андронова – Хопфа положення рівноваги в точці біфуркації повино бути слабким фокусом з відмінною від нуля першою ляпуновською величиною [9].

В нашому випадку:

$$F(A) = \oint\limits_{\ell_A} F_1(X,Y)dY - F_2(X,Y)\,dX. \qquad (7)$$

З урахуванням рівностей (5) маємо

$$\oint\limits_{\ell_A} F_1\left(X,Y\right)dY =$$

$$-\pi\gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-3/2}A^2\left(\frac{3}{4}A^2+\beta b_1 b_2\right),$$

$$\oint\limits_{\ell_A} F_2\left(X,Y\right)dX =$$

$$\omega_0\oint\limits_{\ell_A} f_0\left(\eta+\frac{Y}{\sqrt{\alpha}}\right)\left[Y+\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)\right]dX$$

$$+a_0\sqrt{\beta}\xi A\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|1+\frac{A\sin\tau}{\sqrt{\alpha}\left(\eta-H_0\right)}\right|\sin\tau d\tau.$$

Також безпосередньою перевіркою встановлюється, що $\forall r\in\mathbb{R}$

$$I\left(r\right)=\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|1+r\sin\tau\right|\sin\tau d\tau =$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2\pi}{r}\left[1-\sqrt{1-r^2}\right]\right\}=$$

$$\begin{cases}\frac{2\pi}{r}\left[1-\sqrt{1-r^2}\right]; \text{ при } |r|\le 1\\ \frac{2\pi}{r}; \text{ при } |r|>1.\end{cases}$$

Тому співвідношення (7) остаточно запишеться в наступному вигляді

$$F\left(A\right)=-\pi\gamma_0\alpha^{1/2}\beta^{-3/2}A^2\left(\frac{3}{4}A^2+\beta b_1 b_2\right)- \tag{8}$$

$$\omega_0\oint\limits_{\ell_A} f_0\left(\eta+\frac{Y}{\sqrt{\alpha}}\right)\left[Y+\sqrt{\alpha}\Psi\left(\frac{X}{\sqrt{\beta}}\right)\right]dX$$

$$-a_0\sqrt{\beta}\xi A\cdot I\left(\frac{A}{\sqrt{\alpha}\left(\eta-H_0\right)}\right).$$

Таким чином, умова існування граничного циклу та характер його стійкості в системі (1) зі змінним запізненням, яке визначається співвідношенням (1), визначається теоремою 1, в якій функція $F(A)$ має вигляд (8). Надалі кокретизуючі структуру функції $f_0(y)$ нескладно виписати конкретні співвідношення, які визначають саме існування орбітально асимптотично стійкого або нестійкого граничного циклу та відповідного йому періодичного автоколивального розв'язку.

Також зазначимо, що за повною аналогією можна розглянути загальний випадок, коли запізнення Δ визначається довільною гладкою функцією, яка залежить від двох фазових координат $\Delta = f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$.

4. Приклад: рівняння Ван-дер-Поля зі змінним запізненням, що залежить від фазової координати. Покладаючи в системі (1) $\xi=\eta=0$, $\alpha=\beta=1$, $b_1 = -b_2=\sqrt{3}$, $\gamma_0=1/3$, та виключаючи фазову координату $y(t)$, одержуємо рівняння Ван - дер - Поля з запізненням

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon\left(1-x^2\left(t\right)\right)\frac{dx}{dt}+x\left(t-\Delta\right)=0. \tag{9}$$

Добре відомо, що при $\Delta=0$ у рівнянні (9) зі збільшенням ε при проходженні значення $\varepsilon=0$, виникає жорстка біфуркація народження стійкого граничного циклу [8] з амплітудою рівною 2.

Далі буде показано, що введення нескінченно малого змінного запізнення може привести до зміни характеру стійкості даного граничного циклу.

Покладемо в рівнянні (9)

$$\Delta=k\varepsilon\left(\frac{dx}{dt}\right)^m,\ k\ge 0,$$

$$m=2r,\ r>1\ r\in\mathbb{N},\ \varepsilon\to+0,$$

З отриманих вище співвідношень одержується, що в цьому випадку

$$F\left(A\right)=-\pi A^2\left(\frac{A^2}{4}-1\right)+kJ_{m+2}A^{m+2}, \tag{10}$$

де $J_p=2\sqrt{\pi}\frac{(-1)^p+1}{p}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$, $\Gamma(x)$ – гамма функція.

Необхідною та достатньою умовою існування у функції (10) додатніх нулів є виконання наступної нерівності

$$k<\frac{\pi}{m2^{m-1}J_{m+2}}\left(1-\frac{2}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1}. \tag{11}$$

Причому при виконанні даної умови у функції (10) існують два додатних корені A_1^* і A_2^*, які мають наступні властивості:

$$A_1^*(k) < A_2^*(k)\,; \qquad (12)$$

$$\lim_{k\to+0} A_1^*(k) = 2, \ \lim_{k\to+0} A_2^*(k) = +\infty; \qquad (13)$$

$$\left.\frac{dF}{dA}\right|_{A=A_1^*(k)} > 0, \ \left.\frac{dF}{dA}\right|_{A=A_2^*(k)} < 0. \qquad (14)$$

Таким чином, граничний цикл, який визначається меншим коренем A_1^* є нестійким. Зовні нього знаходиться стійкий граничний цикл, що визначається більшим коренем A_2^*.

Дійсно, позначаючи $\varphi(A) = \pi\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)$, $\psi(A,k) = kJ_{m+2}A^m$ та $f(A,k) = \psi(A,k) - \varphi(A)$, очевидно, що існування додатніх коренів у функції $F(A)$ еквівалентно їх існуванню у функції $f(A,k)$.

Безпосередньо перевіряється, що єдиний розв'язк системи рівнянь

$$\varphi(A) = \psi(A,k)\,, \frac{d\varphi(A)}{dA} = \frac{\partial\psi(A,k)}{\partial A}$$

визначається наступними співвідношеннями

$$k = k^* = \frac{\pi}{m2^{m-1}J_{m+2}}\left(1 - \frac{2}{m},\right)^{\frac{m}{2}-1},$$

$$A = A^* = 2\left(1 - \frac{2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Припускаючи, що нерівність (11) виконана, та враховуючи, що $f(0,k) = \pi > 0$, $f(A^*,k) = (k-k^*)\,J_{m+2}(A^*)^m < 0$, та $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A,k) = +\infty$, з теореми Больцано – Коші випливає існування у функції $f(A,k)$ кореня $A_1 = A_1(k)$ на інтервалі $(0;A^*)$ і кореня $A_2 = A_2(k)$ на інтервалі $(A^*;+\infty)$.

Необхідність умови (11) одержується з використанням нерівності $f(A,k_1) \geq f(A,k_2)$ при $k_1 > k_2 \geq 0$ та того факту, що функція $f(A,k^*)$ має лише один додатній корень і невідємна при $A > 0$.

Застосовуючи до (10) теорему про неявну функцію, та враховуючи, що $A^* > 1$, одержуються властивості (13). Нерівності (14) перевіряються безпосередньо.

5. Висновки. У даній роботі розглянута динамічна система, що є узагальненням рівняння Льєнара, а також рівнянь осциляторів Ван-дер-Поля та Релея при введенні в неї змінного запізнення. Знайдено умови існування граничних циклів (автоколивань) у розглянутій динамічній системі та установлений характер їхньої стійкості для випадку, коли запізнення є відомою функцією від фазової координати, яка аналітично залежить від малого параметра. Показано, що введення навіть нескінченно малого змінного запізнення може змінити характер стійкості граничного циклу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gotsulenko V.V.* Control of the self – oscillation of amplitude of vibration combustion in a liquid-propellant rocket engine by solving the system of equations that describe this regime of combustion //Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2010. – Vol. 83, No 3. – P. 525 – 531.

2. *Гоцуленко В. В, Гоцуленко В.М.* Автоколивання в моделі РРД з дискретними параметрами при змінній величині феноменологічного запізнення згорання // Математичне моделювання. – 2009. – № 1 (20). – С. 44 – 47.

3. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – К.: Вища школа, 1979. – 248 с.

4. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.

5. *Гоцуленко В.В.* Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении жидкостей или газов в пневмо или гидросистеме // Труды ИПММ НАНУ. – 2007. – Т. 14. – С. 56 – 62.

6. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Стабилизация неустойчивого положения равновесия при теплоподводе параметрическими колебаниями // Труды ИПММ НАНУ. – 2010. – Т. 21. – С. 19 – 31.

7. *Гоцуленко В. В.* О структуре предельных циклов одной динамической системы с запаздывающим аргументом // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ, 2008. – С. 53 – 58.

8. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2000. – 149 с.

9. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.