УДК 517.956.4

©2012 р. Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Наведено результати дослідження фундаментального розв'язку, коректної розв'язності задачі Коші та інтегрального зображення розв'язків для параболічних рівнянь другого порядку, в яких коефіцієнти при перших похідних за просторовими змінними лінійно за цими змінними зростають на нескінченності, а інші коефіцієнти є сталими.

We study second order parabolic equations, which have coefficients of first derivatives with respect to spatial variables are growing at infinity as linear functions and other coefficients are constants. Results of investigation for the fundamental solution, correct solvability of the Cauchy problem and integral representations for such equations are presented.

У теорії випадкових процесів і статистичній радіотехніці [1–3] виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти є сталими. Такі рівняння є рівномірно параболічними за І.Г. Петровським рівняннями зі змінними необмежено зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. У цій статті розглядаються деякі з указаних рівнянь. Для них знаходиться явна формула для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), за допомогою якої отримується повна інформація про ФРЗК. Ця інформація використовується для встановлення точних результатів про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші, початкові дані в якій є елементами просторів C^a, L_p^a $(p \in [1, \infty])$ та M^a експоненціально зростаючих на нескінченності відповідно неперервних функцій, вимірних функцій та узагальнених борельових мір.

Зауважимо, що подібні результати наведено в [4] для деяких частинних випадків розглянутих тут рівнянь і в [5–7] для рівнянь, що містять оператор Бесселя за додатковою просторовою змінною.

1. Позначення та означення. Розглядатимемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x) :=$$
$$:= \left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_{x_j} - a_0\right)u(t,x) -$$
$$-b\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,x)) = 0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \quad (1)$$

і спряжене до нього рівняння

$$(L^*v)(\tau,\xi) :=$$
$$:= \left(-\partial_\tau - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} + \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_{\xi_j} - a_0\right)v(\tau,\xi) +$$
$$+b\sum_{j=1}^{n}\xi_j\,\partial_{\xi_j}v(\tau,\xi) = 0,\ \tau<0,\ x\in\mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де n – задане натуральне число, a_{jl}, a_j, a_0 і b – задані дійсні числа, $a_{jl} = a_{lj}$, $\{j,l\} \subset \{1,\ldots,n\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta>0\ \ \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^n:\ \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\sigma_j\sigma_l \ge \delta|\sigma|^2. \quad (3)$$

Позначимо через A матрицю $(a_{jl})_{j,l=1}^n$. Умову (3) можна переписати у вигляді

$$\exists\,\delta>0\ \ \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^n:\ (A\sigma,\sigma) \ge \delta|\sigma|^2. \quad (4)$$

де $(\cdot,\cdot)$– скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$.

Умова (4) гарантує існування оберненої матриці $A^{-1} := (a^{jl})_{j,l=1}^n$ та сталої $\delta_0 > 0$ такої, що

$$\forall\, \sigma \in \mathbb{R}^n : \quad (A^{-1}\sigma, \sigma) \ge \delta_0 |\sigma|^2. \tag{5}$$

Означення 1. ФРЗК для рівняння (1) називається функція $G(t-\tau, x, \xi)$, $t > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, яка є розв'язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі

$$LG(t-\tau, x, \xi) = 0, \;\; t > \tau,$$

$$G(t-\tau, x, \xi)\mid_{t=\tau+} = \delta_\xi(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

де τ – довільне число з $\mathbb{R}$ і ξ – будь-яка точка з $\mathbb{R}^n$, а δ_ξ – дельта-функція Дірака, що зосереджена в точці ξ.

Зауваження 1. Рівняння (2), спряжене до параболічного рівняння (1), є обернено параболічним, тобто перетворюється в параболічне, якщо замість $-\tau$ запровадити нову незалежну змінну τ'.

Означення ФРЗК для спряженого рівняння (2) виглядає так.

Означення 2. ФРЗК для рівняння (2) називається функція $G^*(\tau - t, \xi, x)$, $\tau < t$, $\{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n$, яка є розв'язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі

$$L^*G^*(\tau - t, \xi, x) = 0, \;\; \tau < t,$$

$$G^*(\tau - t, \xi, x)\mid_{\tau=t-} = \delta_x(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для довільних $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}^n$.

Зауваження 2. Оскільки коефіцієнти рівнянь (1) і (2) не залежать від часових змінних t і τ відповідно, то ФРЗК для цих рівнянь залежать, як це видно з означень 1 і 2, від різниць основної часової змінної і відповідної їй параметричної змінної. Тому для знаходження ФРЗК G досить брати $\tau = 0$, а для G^* – відповідно $t = 0$.

Далі використовуватимемо пряме та обернене перетворення Фур'є у такому вигляді:

$$F_{x\to\sigma}[f] := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x,\sigma)\} f(x)\, dx,$$
$$\sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$F^{-1}_{\sigma\to x}[f] := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\} f(\sigma)\, d\sigma,$$
$$x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

2. Знаходження ФРЗК. Розглянемо задачу Коші

$$(Lu)(t,x) = 0, \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$u(t,x)\mid_{t=0+} = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

в якій φ є досить "хорошою" функцією, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma) := F_{x\to\sigma}[\varphi]. \tag{10}$$

Шукаючи розв'язок задачі (8), (9) у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)], \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

і використовуючи властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції v задачу Коші

$$\partial_t v(t,\sigma) + b\sum_{j=1}^n \sigma_j \partial_{\sigma_j} v(t,\sigma) =$$
$$= \Big(-\sum_{j,l=1}^n a_{jl}\sigma_j\sigma_l + i\sum_{j=1}^n a_j\sigma_j + a_0\Big) v(t,\sigma),$$
$$t > 0, \;\; \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

$$v(t,\sigma)\mid_{t=0} = \psi(\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Задачу (12), (13) розв'яжемо методом характеристик, згідно з яким відповідна йому система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{b\sigma_1} = \ldots = \frac{d\sigma_n}{b\sigma_n} =$$
$$= \frac{dv}{(-\sum\limits_{j,l=1}^n a_{jl}\sigma_j\sigma_l + i\sum\limits_{j=1}^n a_j\sigma_j + a_0)v}. \tag{14}$$

Знайдемо $n+1$ незалежних перших інтегралів цієї системи. З рівнянь $\dfrac{d\sigma_j}{b\sigma_j} = dt$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, маємо

$$\sigma_j = C_j e^{bt}, \;\; j \in \{1, ..., n\}, \tag{15}$$

а з рівняння

$$\frac{dv}{(-\sum\limits_{j,l=1}^{n} a_{jl}\sigma_j\sigma_l + i\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\sigma_j + a_0)v} = dt$$

одержуємо

$$v = C_0 \exp\Big\{-\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\int\limits_0^t \sigma_j(\tau)\sigma_l(\tau)\,d\tau +$$

$$+i\sum_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^t \sigma_j(\tau)\,d\tau + a_0 t\Big\}. \qquad (16)$$

З (15) і (16) випливає, що незалежними першими інтегралами системи (14) є

$$v\,\exp\Big\{\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\int\limits_0^t \sigma_j(\tau)\sigma_l(\tau)\,d\tau -$$

$$-i\sum_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^t \sigma_j(\tau)\,d\tau - a_0 t\Big\} = C_0. \qquad (17)$$

$$\sigma_j\, e^{-bt} = C_j,\;\; j\in\{1,...,n\}. \qquad (18)$$

Нехай $\bar\sigma$ і $\bar v$ – значення при $t=0$ відповідно σ і v. Тоді з (15) і (16) маємо

$$\bar\sigma_j = C_j,\;\; j\in\{1,...,n\},\;\; \bar v = C_0,$$

але згідно з (13) $\bar v = \psi$, тому

$$C_0 = \psi(\bar\sigma) = \psi(\bar C),$$

де $\bar C := (C_1,...,C_n)$. На підставі (17) і (18) одержуємо

$$v(t,\sigma) = \exp\Big\{-\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\int\limits_0^t C_jC_l e^{2b\tau}\,d\tau +$$

$$+i\sum_{j=1}^{n} a_j\int\limits_0^t C_j e^{b\tau}\,d\tau + a_0 t\Big\}\psi(\bar C) =$$

$$= \exp\Big\{-\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}C_jC_l\frac{1}{2b}(e^{2bt}-1) +$$

$$+i\sum_{j=1}^{n} a_jC_j\frac{1}{b}(e^{bt}-1) + a_0t\Big\}\psi(\bar C) =$$

$$= \exp\Big\{-\sum_{j,l=1}^{n}\frac{a_{jl}}{2b}(1-e^{-2bt})\sigma_j\sigma_l +$$

$$+i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b}(1-e^{-bt})\sigma_j + a_0t\Big\}\times$$

$$\times\psi(e^{-bt}\sigma_1,\dots e^{-bt}\sigma_n),\quad t>0,\; \sigma\in\mathbb{R}^n.$$

Тоді за допомогою (11) і (7) маємо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma) -$$

$$-\sum_{j,l=1}^{n}\frac{a_{jl}}{2b}(1-e^{-2bt})\sigma_j\sigma_l +$$

$$+i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b}(1-e^{-bt})\sigma_j + a_0t\Big\}\psi(e^{-bt}\sigma_1,\dots e^{-bt}\sigma_n)\,d\sigma,$$

$$t>0,\;\; x\in\mathbb{R}^n.$$

Зробимо заміну змінних інтегрування за формулами

$$e^{-bt}\sigma_j = \eta_j,\quad j\in\{1,\dots,n\},$$

і врахувавши, що $d\sigma = e^{nbt}d\eta$, де $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)$, одержимо рівність

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}e^{(a_0+nb)t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n} e^{bt}x_j\eta_j -$$

$$-\sum_{j,l=1}^{n}\frac{a_{jl}}{2b}(e^{2bt}-1)\eta_j\eta_l + i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b}(e^{bt}-1)\eta_j\Big\}\times$$

$$\times\psi(\eta)\,d\eta,\quad t>0,\;\; \eta\in\mathbb{R}^n.$$

Скориставшись формулами (6), (10) та змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\;\; t>0,\;\; x\in\mathbb{R}^n,$$

в якій

$$G(t,x,\xi) := (2\pi)^{-n}e^{(a_0+nb)t}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathrm{R}^n}\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n}(e^{bt}x_j-\xi_j)\eta_j -$$

$$-\sum_{j,l=1}^{n}\frac{a_{jl}}{2b}(e^{2bt}-1)\eta_j\eta_l+i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b}(e^{bt}-1)\eta_j\Big\}\,d\eta,$$

$$t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (19)$$

Перепишемо формулу (19) у вигляді

$$G(t,x,\xi):=(2\pi)^{-n}e^{(a_0+nb)t}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(e^{bt}x+\vec{a}p(t)-\xi,\eta)-(q(t)A\eta,\eta)\}\times$$

$$\times d\eta,\quad t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (20)$$

де $\vec{a}:=(a_1,\ldots,a_n)$,

$$p(t):=\begin{cases}\frac{1}{b}(e^{bt}-1),\ b\neq 0,\\ t,\ b=0,\end{cases}$$

$$q(t):=\begin{cases}\frac{1}{2b}(e^{2bt}-1),\ b\neq 0,\\ t,\ b=0.\end{cases} \qquad (21)$$

Інтеграл із (20) можна обчислити за допомогою такої формули з [8, с. 172]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(y,\eta)-(B\eta,\eta)\}\,d\eta=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det B}}\times$$

$$\times\exp\{-\frac{1}{4}(y,B^{-1}y)\},\quad y\in\mathbb{R}^n, \qquad (22)$$

де матриця B така, що відповідно квадратична форма $(B\eta,\eta)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, є дійсною та додатно визначеною. Скористаємось формулою (22) для випадку, коли $y=e^{bt}x+\vec{a}p(t)-\xi$, $B=q(t)A$, тоді $B^{-1}=\frac{1}{q(t)}A^{-1}$, $\det B=(q(t))^n\det A$ і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(e^{bt}x+\vec{a}p(t)-\xi,\eta)-(q(t)A\eta,\eta)\}\,d\eta=$$

$$=(\pi)^{n/2}(q(t))^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{4q(t)}\times$$

$$\times\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{bt}x_j+a_jp(t)-\xi_j)(e^{bt}x_l+a_lp(t)-\xi_l)\Big\}. \qquad (23)$$

З рівностей (20) і (23) випливає формула

$$G(t,x,\xi)=(4\pi q(t))^{-n/2}(\det A)^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\Big\{(a_0+nb)t-\frac{1}{4q(t)}\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{bt}x_j+$$

$$+a_jp(t)-\xi_j)(e^{bt}x_l+a_lp(t)-\xi_l)\Big\},$$

$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (24)$$

Використовуючи формули (20) і (24), неважко переконатися у правильності таких тверджень:

1) функція $G(t-\tau,x,\xi)$, $0\le\tau<t$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, як функція t і x є розв'язком рівняння (1), а як функція τ і ξ – розв'язком спряженого рівняння (2);

2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x,\xi)\,d\xi=e^{(a_0+nb)t},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (25)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x,\xi)\,dx=e^{a_0t},\ t>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n; \qquad (26)$$

3) для будь-яких мультиіндексів $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta G(t,x,\xi)|\le C_{\alpha\beta}(q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2}\times$$

$$\times e^{\lambda^b_{|\alpha|}}E_c^b(t,x,\xi),\quad t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (27)$$

в яких $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі,

$$\lambda^b_{|\alpha|}:=(a_0+(n+|\alpha|)b)t+\frac{\delta_0}{4}|\vec{a}|^2\,r(t)),$$

$$r(t):=\frac{p^2(t)}{q(t)}=\begin{cases}\frac{2(e^{bt}-1)}{b(e^{bt}+1)},\ b\neq 0,\\ t,\ b=0,\end{cases}$$

$$E_c^b(t,x,\xi):=\exp\{-c\frac{|e^{bt}x-\xi|^2}{q(t)}\}, \qquad (28)$$

де функції p і q означені в (21), δ_0 – стала з нерівності (5).

Зупинимося тільки на обгрунтуванні твердження 3). На підставі нерівності (5) маємо

$$\sum_{j,l=1}^{n}a^{jl}(e^{bt}x_j+a_jp(t)-\xi_j)(e^{bt}x_l+a_lp(t)-\xi_l)\ge$$

$$\ge\delta_0|e^{bt}x+\vec{a}p(t)-\xi|^2,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n. \qquad (29)$$

Далі використаємо відому нерівність

$$|y+z|^2 \geq \frac{1}{2}|y|^2 - |z|^2, \quad \{y,z\} \subset \mathbb{R}^n,$$

взявши в ній $y = e^{bt}x - \xi$ і $z = \vec{a}p(t)$, та одержимо

$$\sum_{j,l=1}^{n} a^{jl}(e^{bt}x_j + a_j p(t) - \xi_j)(e^{bt}x_l + a_l p(t) - \xi_l) \geq$$

$$\geq \frac{\delta_0}{2}|e^{bt}x - \xi|^2 - \delta_0|\vec{a}|^2(p(t))^2,$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{30}$$

Оцінка (27) для $\alpha = 0$ і $\beta = 0$ випливає безпосередньо з (24) і (30). Справді, маємо

$$|G(t,x,\xi)| \leq (4\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2}(q(t))^{-n/2}\times$$

$$\times \exp\left\{(a_0 + nb)t - \frac{\delta_0}{8q(t)}|e^{bt}x - \xi|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_0|\vec{a}|^2(p(t))^2}{4q(t)}\right\} = C_{00}(q(t))^{-n/2}\times$$

$$\times \exp\left\{(a_0 + nb)t + \frac{\delta_0}{4}|\vec{a}|^2 E^b_{\delta_0/8}(t,x,\xi)\right\} \leq$$

$$\leq C_{00}(q(t))^{-n/2}e^{\lambda^b_0}E^b_c(t,x,\xi),$$

$$t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $0 < c < \delta_0/8$.

Оцінки (27) у загальному випадку випливають із одержаних при диференціюванні (24) виразів, оцінок (29) і (30) та такого твердження:

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, C_r > 0 \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n :$$

$$|z|^r \exp\{-c^*|z|^2\} \leq C_r \exp\{-c|z|^2\},$$

де c – фіксована стала з проміжку $(0, c^*)$.

За допомогою тверджень 2) і 3) звичайним способом можна довести, що для будь-якої неперервної та обмеженої в $\mathbb{R}^n$ функції φ інтеграли

$$u(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$t > \tau, \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$v(\tau,\xi;t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x,\xi)\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\tau < t, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

задовольняють відповідно умови

$$\lim_{t\to\tau+} u(t,x;\tau) = \varphi(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

і

$$\lim_{t\to\tau-} v(\tau,\xi;t) = \varphi(\xi), \ \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{32}$$

На підставі твердження 1) та співвідношень (31) і (32) можна стверджувати, що функція $G(t-\tau,x,\xi)$, $t > \tau$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФРЗК для рівняння (1), а функція

$$G^*(\tau - t,\xi,x) := G(t-\tau,x,\xi),$$

$$\tau < t, \quad \{\xi,x\} \subset \mathbb{R}^n,$$

є ФРЗК для рівняння (2).

3. Властивості ФРЗК. Із результатів п.2 випливає, що формулою (24) визначається ФРЗК для рівняння (1), який володіє властивістю нормальності та оцінками (27). Наведемо інші властивості ФРЗК, які встановлюються добре відомими способами, що грунтуються на використанні відповідної формули Гріна–Остроградського (див., наприклад, [4, 5]).

Властивість 1. ФРЗК для рівняння (1) єдиний.

Властивість 2. Є правильною формула згортки

$$G(t-\tau,x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\gamma,x,y)G(\gamma-\tau,y,\xi)\,dy,$$

$$\tau < \gamma < t, \ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Щоб сформулювати властивість 3, рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$(Lu)(t,x) = \left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_{x_j} - \right.$$

$$\left. -b_0\right)u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

де $b_j(x) := a_j + bx_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $b_0 := a_0 + nb$.

У теорії дифузійних випадкових процесів рівняння (33) є рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова відповідного дифузійного процесу. Цей процес характеризується матрицею дифузії $A := (a_{jl})_{j,l=1}^n$, вектором переносу $b(x) := (b_1(x),\dots,b_n(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, і коефіцієнтом обриву (коефіцієнтом інтенсивності лінійних джерел) b_0. ФРЗК G для рівняння (33) трактується як густина перехідних ймовірностей дифузійного процесу.

У наступній властивості наводяться зображення елементів матриці дифузії A, координат вектора переносу $b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, і коефіцієнта обриву b_0 через густину перехідних імовірностей G.

Властивість 3. Справджуються такі рівності

$$a_{jl} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)z_j z_l\,dz\right),$$

$$\{j,l\} \subset \{1,\dots,n\};$$

$$b_j(x) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)z_j\,dz\right) + bx_j,$$

$$j \in \{1,\dots,n\};$$

$$b_0 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,z)\,dz - 1\right)\right).$$

4. Коректна розв'язність задачі Коші. Застосуємо результати про ФРЗК до встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші для рівняння (1) у просторах швидкозростаючих при $|x| \to \infty$ функцій.

Сформульовані далі теореми та їх наслідки є результатами реалізації для рівняння (1) конструкції Ейдельмана–Івасишена, описаної і реалізованої для параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами [9]. Ця конструкція дає можливість отримувати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення визначених у відкритому шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$ розв'язків через їх граничні значення на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$. Згідно з цією конструкцією еволюція по часу t розв'язків характеризується їх належністю до сімейства банахових просторів, залежних від t.

У шарі $\Pi_{(0,T]}$ скінченної товщини $T > 0$ розглянемо задачу Коші для рівняння (1), тобто задачу

$$(Lu)(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{34}$$

$$u(t,x)\,|_{t=0+} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{35}$$

Якщо вважати, що функція φ з умови (35) задовольняє нерівність

$$|\varphi(x)| \le C\exp\{a|x|^2\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{36}$$

де $a \ge 0$, і за такою початковою функцією побудувати розв'язок задачі (34), (35) з допомогою формули

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{37}$$

то цей розв'язок, узагалі кажучи, володіє оцінкою

$$|u(t,x)| \le C\exp\{k(t,a)\,|x|^2\}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

Використовуючи формулу (37) та оцінки (27) і (36), отримаємо, що для знаходження функції k треба оцінити зверху функцію

$$f(\xi) := -c_0(q(t))^{-1}\,|e^{bt}x - \xi|^2 + a|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

при фіксованих $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, $a \ge 0$ і $c_0 \in (0,c)$, де стала c з оцінок (27) і $q(t)$ визначається формулою (21). Оскільки

$$f(\xi) \le -c_0(q(t))^{-1}\,(e^{bt}|x| - |\xi|)^2 + a|\xi|^2,$$

то досить знайти максимум функції

$$f_0(r) := -c_0(q(t))^{-1}\,(e^{bt}|x| - r)^2 + ar^2,$$

$r \ge 0$. Цей максимум, як легко переконатись, дорівнює

$$\frac{c_0 a e^{2bt}}{c_0 - aq(t)}|x|^2,$$

якщо $a \geq 0$ вибрати так, щоб $q(T) < \dfrac{c_0}{a}$. Отже, справджується оцінка

$$-c_0(q(t))^{-1}\,|e^{bt}x-\xi|^2+a|\xi|^2 \leq$$

$$\leq \frac{c_0ae^{2bt}}{c_0-aq(t)}|x|^2 = k(t,a)|x|^2 \leq$$

$$\leq \hat{k}(t,a)|x|^2, \quad t\in(0,T],\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad (38)$$

де функції k і $\hat{k}$ визначені формулами

$$k(t,a) := \frac{c_0ae^{2bt}}{c_0-aq(t)}, \quad \hat{k}(t,a) := \frac{c_0ae^{2|b|t}}{c_0-aq(t)},$$

$$t\in[0,T].$$

Зауважимо, що $k(0,a) = \hat{k}(0,a) = a$, $k(t,a) = \hat{k}(t,a)$, $t\in[0,T]$, якщо $b>0$, і $k(t,a)<\hat{k}(t,a)$, $t\in(0,T]$, при $b<0$; функція $\hat{k}$ монотонно зростає від значення $\hat{k}(0,a)$ до значення $\hat{k}(T,a)$; функція k має напівгрупову властивість

$$k(t-\tau,k(\tau,a)) = k(t,a), \quad 0\leq\tau\leq t\leq T. \quad (39)$$

Введемо вагові функції

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu\, k(t,a)|x|^2\},$$

$$\hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\{\nu\, \hat{k}(t,a)|x|^2\},$$

$$(t,x)\in\Pi[0,T], \quad \nu\in\mathbb{R}. \quad (40)$$

Поведінка при $|x|\to\infty$ функцій з означених нижче просторів описуватиметься функціями Ψ_ν і $\hat{\Psi}_\nu$ з $\nu\in\{-1,1\}$.

Зауважимо, що на підставі (38), (39), (40) та означення (28) функції $E^b_{c_0}$ справджуються такі нерівності:

$$\hat{\Psi}_{-1}(t,x)\leq\Psi_{-1}(t,x)\leq\Psi_1(t,x)\leq\hat{\Psi}_1(t,x),$$

$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]}; \quad (41)$$

$$E^b_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\Psi_1(\tau,\xi)\leq\Psi_1(t,x)\leq\hat{\Psi}_1(t,x),$$
$$0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Використовуватимемо для функцій $u:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ при кожному $t\in[0,T]$ такі вагові норми:

$$||u(t,\cdot)||_0^{k(t,a)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(|u(t,x)|\Psi_{-1}(t,x)\Big),$$

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t,a)} := ||u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)} := ||u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$p\in[1,\infty].$$

Зауважимо, що з (41) випливає нерівність

$$||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)}\leq||u(t,\cdot)||_p^{k(t,a)},$$

$$t\in[0,T], \quad p\in[1,\infty].$$

Позначимо через $C^{k(t,a)}$ і C^a простори неперервних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, для яких є скінченними відповідно норми $||\varphi(\cdot)||_0^{k(t,a)}$ і $||\varphi(\cdot)||_0^a := ||\varphi(\cdot)||_0^{k(0,a)}$, та через $L_p^{k(t,a)}$, $L_p^{\hat{k}(t,a)}$ і L_p^a – простори вимірних за Лебегом функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ зі скінченними відповідно нормами $||\varphi(\cdot)||_p^{k(t,a)}$, $||\varphi(\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)}$ і $||\varphi(\cdot)||_0^a$. Говоритимемо, що функція $u:\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}$ належить до просторів $C^{k(\cdot,a)}$ і $L_p^{k(\cdot,a)}$, якщо відповідно $u(t,\cdot)\in C^{k(t,a)}$ і $u(t,\cdot)\in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t\in(0,T]$.

Нехай $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}R^n$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu:\mathfrak{B}\to\mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через M^a позначимо сукупність усіх борельових мір $\mu:\mathfrak{B}\to\mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Psi_{-1}(0,x)\,d\,\mu(x), \ \ A\in\mathfrak{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu\in M^a$

$$\|\mu\|_p^a := \int\limits_A \Psi_{-1}(0,x)\,d\,|\mu|(x)<\infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Використовуватимемо ще такі простори:

W_1 – простір усіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, для яких скінченною є норма

$$\|\eta\|_{W_1} := \|\eta(\cdot)\hat{\Psi}_1(T,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

W_0 – простір усіх неперервних функцій $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ таких, що

$$\hat{\Psi}_1(T,x)\,|\eta(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$$

ФРЗК для рівняння (34) породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$(P\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (42)$$

та інтеграл Пуассона узагальненої міри μ

$$(P_0\mu)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x,\xi)\,d\mu(x),$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (43)$$

Основними результатами є наступні теореми.

Теорема 1. *Якщо в задачі (34), (35) $\varphi \in \in C^a$, то формулою*

$$u(t,x) = (P\varphi)(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (44)$$

визначається єдиний розв'язок задачі Коші (34), (35), який належить до простору $C^{k(\cdot,a)}$ і для якого справджується оцінка

$$\|u(t,\cdot)\|_0^{k(t,a)} \le C\|\varphi(\cdot)\|_0^a, \quad t\in(0,T],$$

та для довільного компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ $u(t,x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi(x)$ рівномірно щодо $x\in K$.

Теорема 2. *Є правильними такі твердження:*

1) *для довільної функції $\varphi \in L_p^a$ формула (44) визначає єдиний розв'язок рівняння (34), який належить до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$ і для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\,\|\varphi(\cdot)\|_p^a, \quad t\in(0,T],$$

при $p\in[1,\infty)$ – рівність

$$\lim_{t\to 0}\|u(t,x)-\varphi(x)\|_p^{\hat{k}(t,a)} = 0, \qquad (45)$$

а при $p=\infty$ – співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\,u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\,\varphi(x)dx \qquad (46)$$

для будь-якої функції $\eta\in W_1$;

2) *для будь-якої узагальненої міри $\mu \in M^a$ формулою*

$$u(t,x) = (P_0\mu)(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (47)$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (34), який належить до простору $L_1^{k(\cdot,a)}$ і для якого справджується оцінка

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^a, \quad t\in(0,T],$$

і співвідношення

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\,u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(x)\,d\mu(x) \qquad (48)$$

для довільної функції $\eta\in W_0$.

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 2.

Теорема 3. *Нехай u – розв'язок рівняння (34) в $\Pi_{(0,T]}$, для якого справджується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C, \quad t\in(0,T], \qquad (49_p)$$

з деякими сталими $C>0$ і $p\in[1,\infty]$. Тоді при $p\in(1,\infty]$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^a$, а при $p=1$ – єдина узагальнена міра $\mu\in M^a$ такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (44) і (47).

Наслідок 1. З теорем 2 і 3 випливають такі твердження:

1) *простори L_p^a і M^a є множинами початкових значень розв'яків рівняння (34) тоді й тільки тоді, коли ці розв'язки задовольняють умову (49_p) при $p\in(1,\infty]$ і при $p=1$ відповідно;*

2) *для зображення розв'яків рівняння (34) у вигляді (44) чи (47) з $\varphi\in L_p^a$ і $\mu\in M^a$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (49_p);*

3) *розв'язки рівняня (34), для яких виконується умова (49_p) задовольняють початкові умови при $t=0$ в сенсі (45), (46) і (48).*

Наслідок 2. Нехай U_p – клас усіх розв'язків рівняння (34), які належать до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$ і для яких виконується умова (49_p). З теорем 2 і 3 та наслідку 1 випливає, що *класи U_p, $p\in(1,\infty]$, і U_1 є множинами значень операторів P і P_0, визначених формулами (42) і (43) на відповідно просторах L_p^a M^a, причому ці оператори встановлюють відповідно гомеоморфізми $L_p^a \leftrightarrow U_p$ і $M^a\leftrightarrow U_1$.*

Доведення теорем 1 – 3 є досить громіздким. Вони базуються на детальному вивченні властивостей інтегралів Пуассона (42) і (43) та використовують методику, розроблену в [6, 7, 9].

5. Про деякі інші застосування ФРЗК. Як видно із п.2, ФРЗК для рівняння (1) визначений формулою (24) та його оцінки (27) справджуються для всіх $t > 0$. Це дозволяє подібно до [10, 11] досліджувати властивості розв'язків рівняння (1) на необмежених часових інтервалах, зокрема встановлювати коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші на часовому інтервалі $(0, \infty)$ і задачі без початкових умов на інтервалі $(-\infty, T]$, $T \in \mathbb{R}$, а також доводити теореми про стійкість нульового розв'язку задачі Коші та теореми типу Ліувілля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.

2. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.

3. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

4. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Задача Коші для рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 15–22.

5. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 2006. – Вип. 288. – С. 5–11.

6. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 2006. – Вип. 314–315. – С. 7–16.

7. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Інтегральне зображення розв'язків деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 2007. – Вип. 336–337. – С. 7–15.

8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

9. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – **152**. – 390 p.

10. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

11. *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М.* Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах // Наук. вісник Чернівецького ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – **1**, № 1–2. – Чернівці, 2011. – С. 47–56.