УДК 519.7

©2012 р. О.І. Кійковська, Я.М. Чабанюк

Національний університет "Львівська політехніка"

ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В СХЕМІ АСИМПТОТИЧНО МАЛОЇ ДИФУЗІЇ

Встановлено достатні умови збіжності (до точки рівноваги усередненої системи) процедури стохастичної апроксимації в схемі асимптотично малої дифузії в термінах властивостей функції Ляпунова, використовуючи малий параметр серій та розв'язок проблеми сингулярного збурення для рівномірно ергодичного марковського процесу.

It has been established sufficient conditions for the convergence of a stochastic approximation procedure in asymptotic small diffusion schema, using conditions of Lyapunov function, small parameter series and singular perturbation problem solution for uniformly ergodic Markov process.

Вступ. Вперше процедура стохастичної апроксимації розглянута у роботі [1], а її неперервний аналог досліджується у [2] та [3]. В роботі [4] розглянуто випадок залежності функції регресії від зовнішнього середовища, що описується марковськими переключеннями.

Асимптотичні задачі завжди займали важливе місце у ймовірнісних дослідженнях, зокрема асимптотичні дослідження в теорії випадкових процесів включають результати і типу закону великих чисел і типу центральної граничної теореми, а також теорем про великі відхилення [5].

Дослідженню асимптотичних властивостей великих відхилень випадкових величин присвячені роботи І.Н.Санова [6],Н.В. Смирнова, Г. Крамера та ін.

Дослідженню випадкової еволюції з асимптотично малою дифузією присвячені роботи [5], [7], [8]. Зокрема в [7] вдалося класифікувати розв'язок проблеми сингулярного збурення для схеми асимптотично малої дифузії з відповідним нормуванням часу по малому параметру ε.

В п.1 даної роботи розглядається неперервна процедура стохастичної апроксимації, а також марковське середовище збурень такої процедури. У наступному пункті формулюється основна теорема про збіжність поставленої процедури. В п.3 розглянуто асимптотичні властивості генератора двокомпонентного марковського процесу та розв'язано проблему сингулярного збурення для такого генератора. Доведення теореми приведено в п.4.

1. Постановка задачі. Нехай $C(u,x), u \in R^d$, — функція регресії. Перша компонента функції регегрсії u – випадкова еволюція, а друга x описує вплив зовнішніх факторів, котрі визначаються рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t), t \geq 0$, у фазовому вимірному просторі станів $(X, \mathbf{X})$ [9].

Генератор марковського процесу визначається співвідношенням:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad (1)$$

в банаховому просторі $\mathbf{B}(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x), x \in X$, з нормою

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|,$$

де $P(x, B), x \in X, B \in \mathbf{X}$, — стохастичне ядро [9], $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x — час перебування марковського процесу в стані x, тобто $q(x)$ — "інтенсивність"часу перебування в стані x.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \mathbf{X}$, марковського процесу $x(t), t \geq 0$, визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \ q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $\rho(B), B \in \mathbf{X}$, — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x_n =$

$x(\tau_n), n \geq 0$, і τ_n — моменти стрибків марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Для генератора $\mathbf{Q}$ марковського поцесу $x(t), t \geq 0$, потенціал R_0 має представлення

$$\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$, — проектор на нуль-простір оператора $\mathbf{Q}$: $N_Q = \{\varphi \in \mathbf{B}(X) : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ [10].

Неперервна процедура стохастичної апроксимації в ергодичному марковському середовищі в схемі асимптотично малої дифузії [10] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^3))dt+$$
$$+\varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^3))dt+$$
$$\varepsilon^{1/2}\sigma(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^3))dw(t)], u^\varepsilon(0) = u_0, \quad (2)$$

де $C_0(u; x)$ — сингулярне збурення функції регресії, w — вінерівський процес, а ε — малий параметр серій.

Функції $C(u; x) = \{C_k(u; x), k = 1..d\}$, $C_0(u; x) = \{C_{k0}(u; x), k = 1..d\}, \sigma(u; x)$, задовольняють умовам існування глобального розв'язку еволюційного рівняння

$$du_x(t) = C(u_x(t); x)dt + \varepsilon^{-1}C_0(u_x(t); x)dt+$$
$$+\varepsilon^{1/2}\sigma(u_x(t); x)dw(t),$$

де $u_x(t)$ — еволюція при фіксованому значенні марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Усереднена функція регресії визначається наступним співвідношенням:

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x).$$

2. Збіжність процедури стохастичної апроксимації.

Теорема

Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^5(R^d)$, для усередненої динамічної системи

$$du(t) = C(u(t))dt, \quad (3)$$

що забезпечує умову експоненційної стійкості цієї системи:

C1: $C(u)V'(u) < -cV(u), c > 0$,

та задовольняє додатковим умовам:

C2: $|B(u)V''(u)| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0$,

C3: $|C_0(u; x)\mathbf{R}_0[C_0(u; x)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0$,

C4: $|C_0(u; x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)]'| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0$,

C5: $|C(u; x)\mathbf{R}_0[C_0(u; x)V'(u)]'| \leq c_4(1 + V(u)), c_4 > 0$,

C6: $|\sigma^2(u; x)\mathbf{R}_0[C_0(u; x)V'(u)]''| \leq c_5(1 + V(u)), c_5 > 0$,

C7: $|C(u; x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)]'| \leq c_6(1 + V(u)), c_6 > 0$,

C8: $|\sigma^2(u; x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)]''| \leq c_7(1 + V(u)), c_7 > 0$,

де

$$\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u) = a(t)\tilde{C}(u; x)V'(t)+$$
$$+(1/2)\varepsilon a^2(t)\tilde{B}(u; x)V''(u),$$

$\tilde{C}(u; x) = C(u; x) - C(u)$,
$\tilde{B}(u; x) = B(u; x) - B(u)$,
$B(u, x) = \sigma^2(u; x)$,
$B(u) = \int_X \pi(dx)\sigma^2(u; x)$,

Крім того функції $C(u; \cdot)$, $C_0(u; \cdot)$, $\sigma(u; \cdot) \in C^2(R^d)$ та рівномірно обмежені по $x \in X$, а $C_0(u; x)$ задовольняє умові балансу

$$\Pi C_0(u; x) = \int_X \pi(dx)C_0(u; x) = 0 \quad (4)$$

Нормуюча функція $a(t) > 0$ задовольняє умови:

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u_0 \in R^d$, розв'язок рівняння (2) при достатньо малих $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0— достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^*, що однозначно визначається рівнянням $C(u^*) = 0$:

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = u^*\} = 1.$$

Зауваження 1. Добутки типу $\tilde{B}(u, x)V''(u)$ мають представлення [10, с.10]

$$\tilde{B}(u,x)V''(u)=\sum_{i,j=1}^{d}\tilde{b}_{i,j}(u,x)\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}V(u).$$

Зауваження 2. У випадку, коли функції $C_0(u;x), C(u;x)$ – лінійні по u, а $V(u)$ – квадратична форма, виконуються умови $C2-C8$ теореми.

Зауваження 3. Без зменшення загальності в твердженні теореми $u^*=0$.

3. Властивості генератора.

Лема 1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу*

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon=x(t/\varepsilon^3), t\geq 0, \tag{5}$$

в банаховому просторі $\boldsymbol{B}(R^d,X)$ дійснозначних функцій $\varphi(u;x)\in C^{2,0}(R^d,X)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x)=\varepsilon^{-3}\boldsymbol{Q}\varphi(u;x)+\boldsymbol{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x), \tag{6}$$

де $\boldsymbol{V}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x)=$

$$=\varepsilon^{-1}\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u;x)+\boldsymbol{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u;x), \tag{7}$$

$\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u;x)=a(t)C_0(u;x)\varphi'(u;x)$,
$\boldsymbol{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = a(t)C(u,x)\varphi'(u;x)+$
$+(1/2)\varepsilon a^2(t)\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)$.

Доведення. Генератор марковського процесу (4) на тест-функціях $\varphi(u;x)$, визначається наступним співвідношенням [11]

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x)=$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\tfrac{1}{\Delta}[E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)|u^\varepsilon(t)=u,x_t^\varepsilon=x]$$

$$-\varphi(u;x)]. \tag{8}$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)|u^\varepsilon(t)=u,x_t^\varepsilon=x]=$$

$$=E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon).$$

Для цього приведемо інтегральне представлення рівняння (2)

$$u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(0)+\int_0^t a(s)C(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_0^t a(s)C_0(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+$$

$$+\varepsilon^{1/2}\int_0^t a(s)\sigma(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)dw(s).$$

Нехай $\mu_\Delta:=\int_t^{t+\Delta}a(s)\sigma(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)dw(s)$, тоді приріст Δu можна представити у вигляді

$$\Delta u=\int_t^{t+\Delta}a(s)C(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}a(s)C_0(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+\varepsilon^{1/2}\mu_\Delta.$$

Одержимо наступний вигляд умовного математичного сподівання [10]

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)=$$

$$=E[\varphi(u+\Delta u;x)]I(\theta_x>\varepsilon^{-3}\Delta)+$$

$$+E[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)]I(\theta_x\leq\varepsilon^{-3}\Delta)+o(\Delta).$$

Оскільки індикатор часу перебування в стані x визначається наступним чином

$$I(\theta_x>\varepsilon^{-3}\Delta)=e^{-\varepsilon^{-3}q(x)\Delta}=1-\varepsilon^{-3}q(x)\Delta+o(\Delta),$$

а

$$I(\theta_x\leq\varepsilon^{-3}\Delta)=1-e^{-\varepsilon^{-3}q(x)\Delta}=\varepsilon^{-3}q(x)\Delta+o(\Delta),$$

то для умовного математичного сподівання маємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)=E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+$$

$$+\varepsilon^{-3}q(x)\big\{E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)]-$$

$$-E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]\big\}\Delta+o(\Delta). \tag{9}$$

Для другого доданку (6), використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$\varepsilon^{-3}q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\Delta=$$

$$=\varepsilon^{-3}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\Delta+$$

$$+\varepsilon^{-3}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta}^\varepsilon)\Delta u]\Delta+o(\Delta). \tag{10}$$

Враховуючи вигляд приросту еволюції

$$\Delta u = a(t)C(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\Delta +$$

$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\Delta + \varepsilon^{1/2}\mu_\Delta + o(\Delta),$$

другий доданок у (7) рівний $o(\Delta)$.

Отже,

$$\varepsilon^{-3}q(x)E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\Delta =$$

$$= \varepsilon^{-3}q(x)E_{u,x}[\varphi(u; x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\Delta + o(\Delta).$$

Врахувавши формулу Тейлора, формулу генератора марковського процесу (1), та рівняння (6) отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) =$$

$$= E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u; x)] + \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta +$$
$$+\varepsilon^{-3}q(x)\{-E_{u,x}\varphi'(u;x)\Delta u + o(\Delta u)]\Delta +$$
$$+o(\Delta).$$

Оскільки

$$\varepsilon^{-3}q(x)\{-E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u + o(\Delta u)]\}\Delta =$$

$= o(\Delta)$, то з останнього маємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta +$$

$$+E_{u,x}[\varphi(u + a(t)C(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon)\Delta +$$

$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\Delta + \varepsilon^{1/2}\mu_\Delta + o(\Delta); x)] +$$

$$+o(\Delta).$$

Нехай $z =$

$= u + a(t)C(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\Delta + \varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\Delta.$

Додавши та віднявши у математичному сподіванні вираз $\varphi(z,x)$, отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta + E_{u,x}[\varphi(z+\mu_\Delta + o(\Delta); x) -$$

$$-\varphi(z;x) + \varphi(z;x)] + o(\Delta).$$

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u; x_{t+\Delta}^\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta + E_{u,x}\varphi'(z;x)\varepsilon^{1/2}E\mu_\Delta +$$

$$+(1/2)E_{u,x}\varphi''(z;x)\varepsilon E\mu_\Delta^2 +$$

$$+E_{u,x}\varphi(z;x) + o(\mu_\Delta^2) + o(\Delta).$$

Оскільки $E\mu_\Delta = 0$, а

$$E\mu_\Delta^2 = \int_t^{t+\Delta} \sigma^2(u(s); x(s))ds = \sigma^2(u(t); x(t))\Delta,$$

[5], то отримуємо

$$E_{u,x}\varphi(u+\Delta u); x_{t+\Delta}^\varepsilon) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta +$$

$$+(1/2)\varepsilon E_{u,x}\varphi''(z;x)a^2(t)\sigma^2(u(t);x)\Delta +$$
$$+E_{u,x}\varphi(z;x) + o(\Delta).$$

Отже з (8) маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\big\{E_{u,x}[a(t)C(u^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon)\varphi'(u;x)\Delta +$$
$$+\varepsilon^{-1}a(t)C_0(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon)\varphi'(u;x)\Delta + o(\Delta)] +$$
$$+(1/2)\varepsilon a^2(t)E\sigma^2(u(t);x)\varphi''(z;x)\Delta +$$
$$+\varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u;x)\Delta\big\}.$$

Враховуючи формулу Тейлора та те, що $z \to u$ при $\Delta \to 0$ отримаємо (5), що і доводить лему 1.

Лема 2. *Граничний генератор* $\mathbf{L}_t(x)^\varepsilon$ *на збуреній тест-функції*

$$\varphi^\varepsilon(u;x) = \varphi(u) + \varepsilon^2\varphi_1(u;x) + \varepsilon^3\varphi_2(u;x),$$

$$\varphi(u) \in C^4(R^d)$$

визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення [10]

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x) = \mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(u;x)\varphi(u), \tag{11}$$

де

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u) = a(t)\boldsymbol{C}\varphi(u) + (1/2)\varepsilon a^2(t)\boldsymbol{B}(u)\varphi(u),$$

$$\boldsymbol{C}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u),$$
$$\boldsymbol{B}(u)\varphi(u) = B(u)\varphi''(u),$$
$$B(u) = \int_X \pi(dx)\sigma^2(u,x),$$

$$\theta_t^\varepsilon(u;x)\varphi(u) = \boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u) +$$

$$+\varepsilon[\boldsymbol{Q}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon(x)\varphi(u) + \boldsymbol{Q}_2^\varepsilon(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(u) +$$

$$+\varepsilon\boldsymbol{Q}_2^\varepsilon(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon(x)\varphi(u)], \tag{12}$$

$\tilde{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon(x)\varphi(u) = [\boldsymbol{Q}_2^\varepsilon(x) - \boldsymbol{L}_t^\varepsilon]\varphi(u).$

Доведення. Генератор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)$ на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u;x) = \varphi(u) + \varepsilon^2\varphi_1(u;x) + \varepsilon^3\varphi_2(u;x)$$

визначається наступним чином

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u;x) = \varepsilon^{-3}\mathbf{Q}\varphi(u)+$$
$$+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x) + \mathbf{Q}_1(x)\varphi(u)] + \mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+$$
$$+\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u) + \varepsilon\mathbf{Q}_1(x)\varphi_1(u;x)+$$
$$+\varepsilon^2[\mathbf{Q}_1(x)\varphi_2(u;x) + \mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi_1(u;x)+$$
$$+\varepsilon\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi_2(u;x)].$$

З того, що $\varphi(u) \in N_Q$, слідує $\mathbf{Q}\varphi(u) = 0$. З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення $\mathbf{Q}\varphi_1(u;x) + \mathbf{Q}_1(x)\varphi(u) = 0$, та умови балансу (3) отримуємо представлення

$$\varphi_1(u;x) = \mathbf{R}_0\mathbf{Q}_1(x)\varphi(u).$$

Згідно з розв'язком проблеми сингулярного збурення [10, с.141] маємо

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u;x) + \mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u) = \mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u),$$

де граничний генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u)$ обчислюється за співвідношенням [10, с.143]

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u) = \int_X \pi(dx)\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\varphi(u).$$

Отже в позначеннях леми 2 маємо

$$\varphi_2(u;x) = \mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)\varphi(u).$$

Беручи до уваги вигляд збурень φ_1 та φ_2 одержуємо вигляд граничного генератора та залишкового члена в (8). Лема 2 доведена.

Наслідок 1. Якщо функція Ляпунова $V(u)$ системи (2) задовольняє умови леми 2, то для збуреної функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u;x) = V(u) + \varepsilon^2V_1(u;x) + \varepsilon^3V_2(u;x),$$
$$V(u) \in C^4(R^d),$$

має місце представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u;x) = \boldsymbol{L}_t^\varepsilon V(u) + \varepsilon\theta_t^\varepsilon(u;x)V(u),$$

в позначеннях леми 2.

4. Доведення теореми. Перш за все вкажемо на існування граничного процесу $u(t)$ для випадкової еволюції $u^*(t)$, що слідує з Модельної теореми Королюка [10, Теорема 6.3, с.197], та властивостей мартингала

$$\mu_t^\varepsilon = V^\varepsilon(u^\varepsilon(t);x_t^\varepsilon) - \int_0^t \mathbf{L}_s^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds.$$

При цьому граничний процес $u(t)$ задається генератором $\mathbf{L}_t^\varepsilon$, тобто сама процедура $u(t)$ визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du(t) = a(t)[C(u(t))dt + \varepsilon^{1/2}\sigma(u(t))dw(t)],$$

де

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u).$$

По-перше зауважимо, що з вигляду генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V(u)$ та умов $C1$ та $C2$ теореми, маємо оцінку:

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V(u) \leq -a(t)cV(u)+$$
$$+(1/2)a^2(t)c_1(1 + V(u)). \tag{13}$$

Для встановлення оцінки залишкового члена $\theta_t^\varepsilon(u;x)V(u)$ обчислимо праву частину (9) на функціях Ляпунова $V(u)$.

З умови $C3$ теореми маємо

$$|\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{R}_0\mathbf{Q}_1(x)V(u)| \leq$$
$$\leq c_2a^2(t)(1 + V(u)). \tag{14}$$

Використавши умову $C4$ для оцінки другого доданку $\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)$ отримуємо:

$$|\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)| \leq$$
$$\leq c_3a^2(t)(1 + V(u)). \tag{15}$$

Для третього доданку з умов $C5$ і $C6$ теореми отримуємо:

$$|\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\mathbf{R}_0\mathbf{Q}_1(x)V(u)| \leq$$
$$\leq (c_4 + c_5)a^2(t)(1 + V(u)). \tag{16}$$

А для останнього доданку залишкового члена за умов $C7 - C8$ теореми маємо:

$$|\mathbf{Q}_2^\varepsilon(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}_t^\varepsilon(x)V(u)| \leq$$

$$\leq (c_6 + c_7)a^2(t)(1 + V(u)). \qquad (17)$$

Використовуючи (13) - (17) маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u;x) \leq -ca(t)V(u)+c^*a^2(t)(1+V(u)).$$

Тепер скористаємось теоремою Невельсона-Хасьмінського [12, Теорема 8.1, с.100], що і доводить твердження теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: в 3-х т.// М.: Наука.— 1971-1975. Т.1.— 664 с., Т.3.— 604 с.

2. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка.— 1987.— 328 с.

3. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— К.: Наук. думка.— 1978.— 220 с.

4. *Чабанюк Я.М.* Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова // Мат. Студ.— 2004.— Т.21, N1.— С. 81—86.

5. *Freidlin M.I., Wentzell A.D.* Random perturbations of dynamical systems // New York: Springer—Verlag.— 1998.—430 p.

6. *Санов И.И.* О вероятности больших отклонений случайных величин // Мат. сб.— 1957.— Т.42, N1.— С.14—44.

7. *Koroluyk V.S.* Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 179, No.2, November.— 2011.— P.273—289.

8. *Feng J., Kurtz T.G.* Large Deviations for Stochastic Processes. Amer. Math. Soc., Providence, RI.— 2006.— 404 p.

9. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем.— К.:Либідь.— 1993.— 136 с.

10. *Korolyuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space.— World Scientific, Singapore.— 2005.— 330 p.

11. *Kiykovska O.I., Chabanyuk Ya.M.* Convergence of stochastic process with Markov switchings // Matematychni Studii.— 2012.— 32 N2.— P.203—208.

12. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая апроксимация и рекуррентное оценивание.— М.: Наука.—1972.— 304 с.