

## ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ПОДВІЙНИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Установлено коректність задачі Коші для сингулярних параболічних систем з операторами Бесселя-Колмогорова.

Correctness of the Cauchy problem for the singular parabolic systems with Bessel-Kolmogorov operators was established.

Задачі для параболічних рівнянь з виродженнями досить глибоко вивчені в роботах [4,5] та ін. У монографії С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.Н. Кочубея [4] розглянуто рівняння з виродженнями за двома групами просторових змінних. Для таких рівнянь побудовано фундаментальні розв'язки, встановлено коректну розв'язність задачі Коші та описано властивості розв'язків. Аналогічні результати для рівнянь типу Колмогорова з довільною кількістю груп виродження та для систем рівнянь зі сталими та залежними від  $t$  коефіцієнтами отримано в роботах Г.П. Малицької [5,6]. У статті [7] ці результати перенесені на випадок рівнянь другого порядку, які містять оператор Бесселя, причому у рівнянні виродження містяться лише по  $n - 1$  просторовій змінній.

У даній роботі розглянуто систему  $B$ -параболічних рівнянь довільного порядку з подвійним степеневим виродженням. Під подвійним степеневим виродженням слід розуміти наступне: система рівнянь містить виродження по всіх просторових змінних (необмежені коефіцієнти при перших похідних) та коефіцієнти в групі "молодших" мають особливість в деякій точці  $x_0$ . Для таких систем на основі вже отриманих оцінок фундаментальної матриці розв'язків з [3] побудовано фундаментальну матрицю розв'язків досліджуваної системи, отримано її оцінки, встановлено зображення розв'язку та доведено теорему про коректність.

**1. Постановка задачі та допоміжне твердження.** У шарі  $\Pi^+ = (0; T) \times E_n^+$ ,

$E_n^+ = E_{n-1} \times (0; \infty)$  розглядається задача Коші для системи  $B$ -параболічних рівнянь

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u - \sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} - \sum_{|r|+2s<2b} a_{rs}(t, x) D_{x'}^r B_{x_n}^s u = f, \quad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} = 0. \quad (2)$$

У системі рівнянь (1) коефіцієнти  $A_{kj}$  при  $|k| + 2j = 2b$  стали, а коефіцієнти  $a_{ms}(t, x)$  при  $|r| + 2s < 2b$  мають особливість в деякій точці  $x'_0 \in E_{n-1}$ . Порядок їх прямування до нескінченності при  $x' \rightarrow x'_0$  будемо характеризувати за допомогою функції

$$Q_\gamma(x' - x'_0) = \begin{cases} |x' - x'_0|^{-\gamma}, & \gamma > 0, & |x' - x'_0| < 1, \\ \ln \frac{1}{|x' - x'_0|}, & \gamma = 0, & |x' - x'_0| < 1, \\ 1, & \gamma \in E_1^+, & |x' - x'_0| \geq 1, \\ 0, & \gamma < 0, & x' \in E_{n-1}. \end{cases}$$

$$D_{x'}^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu + 1}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$\nu \geq -\frac{1}{2}, \quad |k| = \sum_{i=1}^{n-1} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{n-1} m_i, \quad x = (x', x_n), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad x'_0 = (x_{01}, \dots, x_{0,n-1}).$$

Позначимо через

$$P_{2b}(x, D) \equiv \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j + \sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$P_m(t, x, D) \equiv \sum_{|r|+2s=m} a_{rs}(t, x) D_x^r B_{x_n}^s,$$

$m = \overline{0, 2b-1}$ . Нехай  $G_{2b}(t - \tau, x'; x_n, \xi_n)$  – фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.)  $B$ -параболічної системи з необмеженими коефіцієнтами

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = P_{2b}(x, D)u(t, x).$$

Для похідних ф.м.р.  $G_{2b}$  при довільному  $T > 0$  і будь-яких  $k, l, j$  справджується оцінка [3]

$$\begin{aligned} & |D_{x'}^k D_{x_n}^l B_{x_n}^j G(t - \tau, x'; x_n, \xi_n)| \leq \\ & \leq C_{kjl} (\alpha(t - \tau))^{-\frac{n_\nu + |k| + 2j + l}{2b}} e^{-n_\nu(t - \tau)} \times \\ & \times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c \left| \frac{x}{(\alpha(t - \tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

де  $\alpha(t - \tau) = \frac{1 - e^{-2b(t - \tau)}}{2b}$ ,  $C_{kjl}$ ,  $c$  – додатні сталі, залежні від  $b, n_\nu, T$  та сталої параболічності,  $n_\nu = n + 2\nu + 1$ ,  $q = \frac{2b}{2b-1}$ ,  $T_{x_n}^{\xi_n}$  – оператор узагальненого зсуву, що відповідає оператору Бесселя  $B_{x_n}$ .

**Зауваження.** Якщо в системі рівнянь (1) коефіцієнти  $A_{kj}$  при  $|k| + 2j = 2b$  залежать від  $(t, x)$ , то для гелдерових коефіцієнтів ф.м.р.  $G_{2b}(t, \tau, x, \xi)$  можна побудувати методом Е. Леві, а для коефіцієнтів з простору Діні – методом Е. Хопфа [2].

Ставиться задача: маючи ф.м.р.  $G_{2b}$ , побудувати ф.м.р. системи (1) та отримати зображення розв'язку задачі Коші (1), (2).

Перш ніж перейти до побудови ф.м.р. доведемо допоміжне твердження.

**Лема.** Для об'ємного інтеграла

$$\begin{aligned} I_{km}(t, \tau, x, \xi) &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} (\alpha(t - \beta))^{-\frac{n_\nu + k}{2b}} \times \\ & \times T_{x_n}^{y_n} \left\{ e^{-c\rho(t, \beta, x, y')} \right\} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{n_\nu + m}{2b}} \times \\ & \times T_{y_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(\beta, \tau, y, \xi')} \right\} |y' - x'_0|^{-\gamma} y_n^{\nu_0} dy, \end{aligned}$$

при  $0 < k < 2b$ ,  $0 < m + \gamma < 2b$ ,  $0 < \gamma < n - 1$  справджується нерівність

$$I_{km}(t, \tau, x, \xi) \leq C(\varepsilon) (\alpha(t - \tau))^{-\frac{n_\nu + m}{2b}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left( Q_{k+\gamma-2b}(x' - x'_0) + (\alpha(t - \tau))^{-\frac{k+\gamma-2b}{2b}} \right) \times \\ & \times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1\rho(t, \tau, x, \xi')} \right\}, \end{aligned}$$

$$\rho(t, \tau, x, \xi') = \left| \frac{x - \xi'}{(\alpha(t - \tau))^{1/2b}} \right|^q, \quad \nu_0 = 2\nu + 1, \quad c_1 = c - \varepsilon.$$

*Доведення.* Розпишемо інтеграл по  $E_n^+$  на добуток інтегралів по  $E_{n-1}$  та  $E_1^+$ . Потім відщипимо від показника степеня експоненти  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon < c$ , та скористаємось нерівністю

$$\begin{aligned} (c - \varepsilon)\rho(t, \beta, x, y') + (c - \varepsilon)\rho(\beta, \tau, y, \xi') &\geq \\ &\geq (c - \varepsilon)\rho(t, \tau, x, \xi'). \end{aligned}$$

Будемо мати

$$\begin{aligned} I_{km}(t, \tau, x, \xi) &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_{n-1}} (\alpha(t - \beta))^{-\frac{n_\nu + k}{2b}} \times \\ & \times e^{-\varepsilon\rho(t, \beta, x', y')} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{n_\nu + m}{2b}} e^{-\varepsilon\rho(\beta, \tau, y', \xi')} \times \\ & \times |y' - x'_0|^{-\gamma} dy' \int_0^{+\infty} T_{x_n}^{y_n} \left\{ e^{-\varepsilon \left| \frac{x_n}{(\alpha(t - \beta))^{1/2b}} \right|} \right\} \times \\ & \times T_{y_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-\varepsilon \left| \frac{y_n}{(\alpha(\beta - \tau))^{1/2b}} \right|} \right\} y_n^{\nu_0} dy_n \times \\ & \times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1\rho(t, \tau, x, \xi')} \right\}, \quad c_1 = c - \varepsilon. \end{aligned}$$

Запишемо  $I_{km}$  у вигляді суми інтегралів

$$\begin{aligned} I_{km} &= T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1\rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ & \times \left[ \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{|y' - x'_0| < (\alpha(\beta - \tau))^{1/2b}} (\dots) dy' \int_0^{+\infty} (\dots) dy_n + \right. \\ & + \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{|y' - x'_0| \geq (\alpha(\beta - \tau))^{1/2b}} (\dots) dy' \int_0^{+\infty} (\dots) dy_n + \\ & + \int_{t_1}^t d\beta \int_{|y' - x'_0| < 1} (\dots) dy' \int_0^{+\infty} (\dots) dy_n + \\ & \left. + \int_{t_1}^t d\beta \int_{|y' - x'_0| \geq 1} (\dots) dy' \int_0^{+\infty} (\dots) dy_n \right] = \end{aligned}$$

$$= T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1 \rho}\} [I_1 + I_2 + I_3 + I_4], t_1 = \frac{t + \tau}{2}.$$

Оцінимо кожен з інтегралів  $I_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

У інтегралі  $I_1$  врахуємо, що  $t - \beta > \frac{t - \tau}{2}$  і  $\alpha(t - \beta) > \frac{1}{2}\alpha(t - \tau)$ , тому  $(\alpha(t - \beta))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} < C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}$ . Далі перейдемо в інтегралі по  $E_{n-1}$  до сферичних координат, а в інтегралі по  $y_n$  розпишемо оператор узагальненого зсуву та виконаємо заміну змінних

$$\begin{cases} v_1 = (y_n - \xi_n \cos \varphi)(\alpha(\beta - \tau))^{-1/2b}, \\ v_2 = \xi_n \sin \varphi(\alpha(\beta - \tau))^{-1/2b}. \end{cases}$$

У результаті дістанемо

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ &\times \int_{\tau}^{t_1} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{n-1+m}{2b}} d\beta \int_0^{(\alpha(\beta - \tau))^{1/2b}} r^{n-2-\gamma} dr \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon(\sqrt{v_1^2 + v_2^2})^q} v_2^{2\nu} dv_1 dv_2 \leq \\ &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ &\times \int_{\tau}^{t_1} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{m+\gamma}{2b}} d\beta. \end{aligned}$$

Якщо  $m + \gamma < 2b$ , то останній інтеграл збіжний і для  $I_1$  маємо оцінку

$$I_1 \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k+m+\gamma-2b}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1 \rho}\}.$$

У інтегралі  $I_2$  врахуємо, що  $|y' - x'_0| \geq (\alpha(\beta - \tau))^{1/2b}$ , а інтеграл по  $y_n$  оцінюється аналогічно, як і в першому випадку. Матимемо

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ &\times \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{E_{n-1}} e^{-\varepsilon \rho(\beta, \tau, y', \xi')} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{n-1+m+\gamma}{2b}} dy' \leq \\ &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1 \rho}\} \times \\ &\times \int_{\tau}^{t_1} (\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{m+\gamma}{2b}} d\beta \leq \end{aligned}$$

$$\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k+m+\gamma-2b}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1 \rho}\}.$$

Якщо  $k + \gamma < 2b$ , то інтеграли  $I_3$  та  $I_4$  оцінюються аналогічно, як і  $I_1$  та  $I_2$ . Припустимо, що  $k + \gamma \geq 2b$ .

У інтегралі  $I_3$   $\beta - \tau \geq \frac{t - \tau}{2}$ , тому

$$(\alpha(\beta - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} \geq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}},$$

а інтеграл по  $y_n$  оцінюється так, як і раніше. Тоді, враховуючи, що для функції  $\alpha(t - \beta)$  правильна нерівність  $C_1(t - \beta) \leq \alpha(t - \beta) \leq C_2(t - \beta)$ , матимемо

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ &\times \int_{t_1}^t d\beta \int_{|y' - x'_0| < 1} e^{-\varepsilon \rho(t, \beta, x', y')} (\alpha(t - \beta))^{-\frac{n-1+k}{2b}} \times \\ &\times |y' - x'_0|^{-\gamma} dy' \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} \times \\ &\times T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1 \rho}\} \int_{t_1}^t d\beta \int_{|y' - x'_0| < 1} e^{-\varepsilon \left| \frac{x' - y'}{(t - \beta)^{1/2b}} \right|^q} \times \\ &\times (t - \beta)^{-\frac{n-1+k}{2b}} |y' - x'_0|^{-\gamma} dy'. \end{aligned}$$

Змінюючи порядки інтегрування та проводячи заміну змінних  $|x' - y'|^{2b}(t - \beta) = z$  для  $I_3$  дістанемо

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\} \times \\ &\times \int_{|y' - x'_0| < 1} |x' - y'|^{-n+1-k+2b} |y' - x'_0|^{-\gamma} dy' \times \\ &\times \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{+\infty} e^{-\varepsilon z^{1/(2b-1)}} z^{\frac{n-1+k}{2b}-2} dz. \end{aligned}$$

Останній інтеграл збіжний, якщо  $n - 1 + k > 2b$ . Оскільки  $0 < \gamma < n - 1$ , то  $\gamma + k < n - 1 + k$ . З іншого боку припускали, що  $\gamma + k \geq 2b$ . Тоді  $2b \leq \gamma + k < n - 1 + k$ . Далі згідно з лемою 2 [8, с.26] остаточно для  $I_3$  отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} Q_{k+\gamma-2b}(x' - x'_0) \times \\ &\times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \rho(t, \tau, x, \xi')} \right\}. \end{aligned}$$

Залишилось оцінити  $I_4$ . У  $I_4$  врахуємо, що  $\beta - \tau \geq \frac{t-\tau}{2}$  і  $|y' - x'_0| \geq 1$ . Тоді знайдемо

$$I_4 \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1\rho}\} \times \\ \times \int_{t_1}^t (\alpha(t - \beta))^{-\frac{k}{2b}} d\beta \times \\ \times \int_{E_{n-1}} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,\tau,x',y')} (\alpha(t - \beta))^{-\frac{n-1}{2b}} dy' \leq \\ \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+m+k-2b}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\}$$

при  $k < 2b$ . З оцінок  $I_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , випливає твердження леми.

**2. Побудова ф.м.р. системи (1).** При побудові ф.м.р. скористаємось алгоритмом, описаним в [2]. Ф.м.р. системи (1) будемо знаходити за допомогою рекурентної формули. Відшукуємо  $Z_k(t, \tau, x, \xi)$  у вигляді

$$Z_k(t, \tau, x, \xi) = Z_{k+1}(t, \tau, x, \xi) + W_k(t, \tau, x, \xi), \quad (4)$$

де  $Z_{2b} \equiv G_{2b}$ , а функції  $W_k(t, \tau, x, \xi)$  потрібно підібрати так, щоб  $Z_k$  при  $t > \tau$  задовольняла систему рівнянь

$$\frac{\partial Z_k}{\partial t} = P_{2b}(x, D)Z_k + P_{2b-1}(t, x, D)Z_k + \dots + \\ + P_k(t, x, D)Z_k.$$

Далі функції  $W_k(t, \tau, x, \xi)$  знаходимо у вигляді потенціалу

$$W_k(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} Z_{k+1}(t, \beta, x, y) \times \\ \times \varphi_k(\beta, \tau, y, \xi) y_n^{\nu_0} dy, \quad (5)$$

де функції  $\varphi_k(t, \tau, x, \xi)$  вважатимемо неперервними при  $t > \tau$ ,  $x' \neq x'_0$ , для яких справедливі оцінки

$$|\varphi_k(t, \tau, x, \xi)| \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}} \times \\ \times Q_{\gamma_k}(x' - x'_0) e^{-n\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\}. \quad (6)$$

Оцінки (6) забезпечують при  $x' \neq x'_0$  існування похідних  $W_k$  до порядку  $2b$  включно.

Застосуємо до  $Z_k(t, \tau, x, \xi)$  оператор  $\frac{\partial}{\partial t} - P_{2b}(x, D) - \sum_{m=k}^{2b-1} P_m(t, x, D)$ , дістанемо для  $\varphi_k$  інтегральне рівняння

$$\varphi_k(t, \tau, x, \xi) = K_k(t, \tau, x, \xi) + \\ + \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} K_k(t, \beta, x, y) \varphi_k(\beta, \tau, y, \xi) y_n^{\nu_0} dy, \quad (7)$$

де

$$K_k(t, \beta, x, y) \equiv P_k(t, x, D)Z_{k+1}(t, \tau, x, \xi).$$

Покажемо, що інтегральне рівняння (7) має розв'язок, який задовольняє оцінку (6). Для цього візьмемо спочатку  $k = 2b - 1$  та оцінимо  $K_{2b-1}$ , враховуючи особливість коефіцієнтів, які входять в оператор  $P_{2b-1}(t, x, D)$ , та оцінку (3) ф.м.р.  $G_{2b}$ . У результаті дістанемо

$$|K_{2b-1}(t, \tau, x, \xi)| \leq C(\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+2b-1}{2b}} \times \\ \times Q_{\gamma_{2b-1}}(x' - x'_0) e^{-n\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\}. \quad (8)$$

Усі наступні повторні ядра

$$K_{2b-1}^{(s)}(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} K_{2b-1}(t, \beta, x, y) \times \\ \times K_{2b-1}^{(s-1)}(\beta, \tau, y, \xi) y_n^{\nu_0} dy$$

з урахуванням леми та нерівності (8) мають однаковий порядок особливості і

$$|K_{2b-1}^{(\omega)}(t, \tau, x, \xi)| \leq C(\varepsilon_0)^{\omega-1} Q_{\gamma_{2b-1}}(x' - x'_0) \times \\ \times (\alpha(t - \tau))^{-\frac{n\nu+2b-1-\varepsilon_0(\omega-1)}{2b}} e^{-n\nu(t-\tau)} \times \\ \times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_\omega \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\}, \quad (9)$$

де  $c_\omega = c - \varepsilon_0(\omega - 1)$ ,  $\omega < \left[ \frac{n\nu+2b-1}{\varepsilon_0} \right] + 1$ . Повторні ядра з  $\omega \geq \left[ \frac{n\nu+2b-1}{\varepsilon_0} \right] + 1$  не мають

особливості при  $t = \tau$  і оцінюються аналогічно, як і в [1].

Розв'язок інтегрального рівняння (7) збігається з резольвентою ядра  $K_{2b-1}(t, \tau, x, \xi)$  і

$$\begin{aligned} \varphi_{p-1}(t, \tau, x, \xi) &= K_{2b-1}(t, \tau, x, \xi) + \\ &+ \sum_{\omega=1}^{\infty} \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} K_{2b-1}(t, \beta, x, y) \times \\ &\times K_{2b-1}^{(\omega-1)}(\beta, \tau, y, \xi) y_n^{\nu_0} dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Ряд з (10) рівномірно і абсолютно збіжний при  $t - \tau \geq r_0$ ,  $|x' - x'_0| \geq r_0 > 0$  і для його суми з оцінок (8) та (9) впливає оцінка (6).

Таким чином побудовано  $Z_{2b-1}(t, \tau, x, \xi)$ . Для  $Z_{2b-1}$ , враховуючи оцінки ф.м.р.  $G_{2b}$ , (6) та застосовуючи лему, легко встановлюється оцінка

$$\begin{aligned} |D_x^m B_{x_n}^j Z_{2b-1}(t, \tau, x, \xi)| &\leq (\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+|m|+2j}{2b}} \times \\ &\times e^{-n\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')} \right\}, \end{aligned}$$

$$m + 2j \leq 2b - 1, \quad \gamma_{mj} < 2b - (|m| + 2j).$$

Беручи далі  $p = 2b - 2, \dots, 1, 0$ , отримаємо  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{2b-2}$ . Очевидно, що  $Z \equiv Z_0$  є ф.м.р. системи (1). Покажемо, який вигляд матиме  $Z_0$ . Послідовно застосовуючи формули (4), будемо мати

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_1 * \varphi_0 = \\ &= Z_2 + Z_2 * \varphi_1 + (Z_2 + Z_2 * \varphi_1) * \varphi_0 = \\ &= Z_2 + Z_2 * (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_1 * \varphi_0) = \\ &= Z_3 + Z_3 * \varphi_2 + (Z_3 + Z_3 * \varphi_2) * (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_1 * \varphi_0) = \\ &= Z_3 + Z_3 * (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1 * \varphi_0 + \varphi_2 * \varphi_0 + \\ &+ \varphi_2 * \varphi_1 + \varphi_2 * \varphi_1 * \varphi_0) = \dots = G_{2b} + G_{2b} * \\ &* \left( \sum_{l=0}^{2b-1} \varphi_l + \dots + \varphi_{2b-1} * \dots * \varphi_0 \right) \equiv \\ &\equiv G_{2b} + G_{2b} * \varphi \equiv G_{2b} + W, \end{aligned}$$

де  $\varphi$  – сума всіх можливих згорток  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2b-1}$ . Використовуючи нерівність (6) та лему при  $\gamma_{rs} < 2b - (|r| + 2s)$  можна отримати нерівність для  $\varphi$

$$|\varphi(t, \tau, x, \xi)| \leq C \sum_{p=0}^{2b-1} (\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+p}{2b}} \times$$

$$\times Q_{\gamma_p}(x - x_0) e^{-n\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c_1 \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\}, \quad (11)$$

$c_1 < c$ .

Враховуючи оцінку (11), лему та лему 1.1 [2, с.19], аналогічно, як і в [2], можна отримати оцінки для похідних  $W$  при  $|k| + 2j < 2b$

$$\begin{aligned} |D_x^k B_{x_n}^j W(t, \tau, x, \xi)| &\leq \\ &\leq C_{kj} \sum_{|r|+2s<2b} [Q_{|k|+2j+\gamma_{rs}-2b}(x' - x_0) + \\ &+ (\alpha(t-\tau))^{-\frac{|k|+2j+\gamma_{rs}-2b}{2b}}] e^{-n\nu(t-\tau)} \times \\ &\times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\} (\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+|r|+2s}{2b}}, \end{aligned}$$

а при  $|k| + 2j = 2b$

$$\begin{aligned} |D_x^k B_{x_n}^j W(t, \tau, x, \xi)| &\leq \\ &\leq C_{kj} \sum_{|r|+2s<2b} [Q_{\gamma_{rs}+\delta}(x' - x_0) + \\ &+ (\alpha(t-\tau))^{-\frac{\gamma_{rs}}{2b}}] e^{-n\nu(t-\tau)} \times \\ &\times T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c \left| \frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}} \right|^q} \right\} (\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+|r|+2s}{2b}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\delta > 0$ .

**Теорема (про коректність).** Нехай в шарі  $\Pi^+$  задано  $B$ -параболічну систему рівнянь (1), яка містить оператор Бесселя по  $x_n$  та виродження по всіх просторових змінних, задано умови (2). Нехай коефіцієнти  $A_{kj}$  при  $|k| + 2j = 2b$  стали, а коефіцієнти  $a_{rs}$  при  $|r| + 2s < 2b$  неперервні по  $t$  та мають особливість по  $x'$  в деякій точці  $x'_0 \in E_n^+$ , для яких виконується умова

$$|a_{rs}(t, x)| \leq C Q_{\gamma_{rs}}(x' - x'_0),$$

$$0 < \gamma_{rs} < \min_{|r|+2s<2b} \{2b - (|r| + 2s), n - 1\},$$

Тоді ф.м.р. системи рівнянь (1) визначається формулою

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G_{2b}(t, \tau, x, \xi) + W(t, \tau, x, \xi),$$

$$W(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} G_{2b}(t, \beta, x, y) \times \\ \times \varphi(\beta, \tau, y, \xi) y_n^{\nu_0} dy$$

і для похідних  $D_x^k B_{x_n}^j W$  справедливі оцінки (12).

Для неперервних при  $x' \neq x'_0$  правої частини  $f$  та початкової функції  $\varphi$ , яка є парною по  $x_n$ , розв'язок задачі Коші (1), (2) з сумовними особливостями в коефіцієнтах, початковій функції та правій частині при  $x' \neq x'_0$  однозначно визначається формулою

$$u(t, x) = \int_{E_n^+} Z(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) \xi_n^{\nu_0} d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} Z(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) \xi_n^{\nu_0} d\xi.$$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
2. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
3. М.І. Конаровська. Задача з імпульсною дією для систем з операторами Бесселя-Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2012, – Т. 64, №7. – С. 945-953.
4. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Koshubei A.N. Analytic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
5. Малицька Г.П. Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008, – Т. 60, №12. – С. 1650-1663.
6. Малицька Г.П. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого за довільною кількістю груп змінних параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004, – 47, №4. – С. 131-138.
7. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецького університету, – 2006. – Випуск 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5-11.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.