УДК 517.51

©2012 р. В.М. Косован, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО (M,N)-ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ ТА НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ХРЕСТАХ

В статті знайдено загальний вигляд (m,n)-поліноміальних функцій, заданих на добутках $X \times Y$, де X і Y – підмножини довільного поля K, а також доведено, що коли кожна нарізно поліноміальна функція $f : X \times Y \to K$ є поліноміальною за сукупністю змінних, то для скінченного або незліченного поля K це ж справджується і для функцій $f : E \to K$, заданих на хресті $E = (X \times K) \bigcup (K \times Y)$ множини $X \times Y$, а для зліченного поля K – це вже не так.

In the given paper we find the general form of (m,n)-polynomial functions defined on products $X \times Y$, where X and Y are subsets of any field K. We also prove that if every separately polynomial function $f : X \times Y \to K$ is jointly polynomial, then for finite or uncountable field K this is still valid for functions $f : E \to K$ defined on the cross $E = (X \times K) \bigcup (K \times Y)$ of $X \times Y$, but for countable field K it is not true.

1. **Означення і позначення.** Для довільного поля K символом $K[x]$ ми позначатимемо сукупність усіх поліномів

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

від однієї змінної x з коефіцієнтами a_j з поля K, вони породжують функції $p : K \to K$, а через $K[x,y]$ – сукупність усіх поліномів

$$p(x,y) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{j,k} x^j y^k$$

від двох змінних x і y з коефіцієнтами $a_{j,k}$ з K, які породжують вже функції $p : K^2 \to K$.

Нехай $E \subseteq K^2$. Для елементів x і y з поля K розглянемо множини

$$E^x = \{v \in K : (x,v) \in E\}$$

і

$$E_y = \{u \in K : (u,y) \in E\},$$

які називають відповідно *вертикальним x-перерізом* та *горизонтальним y-перерізом* множини E. Для відображення $f : E \to K$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Функції $f : E^x \to K$ і $f_y : E_y \to K$ називаються відповідно *вертикальним x-розрізом* та *горизонтальним y-розрізом* відображення f.

Нехай $X = \{x \in K : E^x \neq \varnothing\}$ і $Y = \{y \in K : E_y \neq \varnothing\}$ – проекції множини E на обидві вісі, а m і n – довільні цілі невід'ємні числа. Відображення $f : E \to K$ ми називаємо *(m,n)-поліноміальним*, якщо для кожного $y \in Y$ існує такий поліном $p_y(x) = a_0(y) + a_1(y)x + ... + a_m(y)x^m$ з $K[x]$ степеня $\leq m$, що $f_y = p_y|_{E_y}$, і для кожного $x \in X$ існує такий поліном $p^x(y) = b_0(x) + b_1(x)y + ... + b_n(x)y^n$ з $K[y]$ степеня $\leq n$, що $f^x = p^x|_{E^x}$. Сукупність усіх (m,n)-поліноміальних функцій $f : E \to K$ позначимо через $S_{m,n}(E)$.

Нехай $A \subseteq K$. Функція $g : A \to K$ називається *m-поліноміальною*, якщо існує такий поліном $p(x)$ з $K[x]$ степеня $\leq m$, що $g = p|_A$. Сукупність таких функцій позначимо символом $P_n(A)$. Зрозуміло, що $f \in S_{m,n}(E)$ тоді і тільки тоді, коли $f^x \in P_n(E^x)$ для кожного $x \in X = pr_1(E)$ і $f_y \in P_m(E_y)$ для кожного $y \in Y = pr_2(E)$. Функція $g : A \to K$ називається *поліноміальною*, якщо вона є m-поліноміальною для деякого m. Сукупність усіх поліноміальних функцій $g : A \to K$ ми позначатимемо $P(A)$. Ясно, що $P(A) = \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m(A)$.

Для множини $E \subseteq K^2$ функція $f : E \to K$ називається називається N-*поліноміальною*, якщо існує такий поліном $p(x,y)$ з $K[x,y]$ степеня $\leq N$, що $p|_E = f$.

Сукупність таких функцій ми позначаємо символом $P_N(E)$. Функцію $f : E \to K$ називають *поліноміальною*, або, точніше, *сукупно поліноміальною* чи *поліноміальною за сукупністю змінних*, якщо вона є N-поліноміальною для деякого N. Множину таких функцій ми позначаємо символом $P(E)$. Як і для однієї змінної, тут $P(E) = \bigcup_{N=0}^{\infty} P_N(E)$. Функція $f : E \to K$ називається *нарізно поліноміальною*, якщо $f^x \in P(E^x)$ для кожного $x \in X = pr_1(E)$ і $f_y \in P(E_y)$ для кожного $y \in Y = pr_2(E)$. Сукупність таких функцій ми позначатимемо через $S(E)$.

Символом $|M|$ позначимо потужність множини M.

2. Проблеми і здобутки. В цій праці ми продовжуємо наші дослідження [1 – 3] таких проблем:

Проблема 1. Вказати необхідні і достатні умови на множину E в K^2, для того щоб $S(E) = P(E)$.

Проблема 2. Для даних цілих невід'ємних чисел m і n вказати необхідні і достатні умови на множину $E \subseteq K^2$, щоб $S_{m,n}(E) \subseteq P_{m+n}(E)$.

Проблема 3. Для даних цілих невід'ємних чисел m і n вказати необхідні і достатні умови на множину E, щоб $S_{m,n}(E) \subseteq P(E)$.

У тому випадку, коли $E = X \times Y$, проблема 1 була розв'язана в [1]: для того, щоб $P(X \times Y) = S(X \times Y)$, необхідно і досить, щоб хоча б одна з множин X чи Y була скінченною або незліченною.

Для довільних підмножин E в [2] знайдено лише достатні умови для виконання рівності $P(E) = S(E)$ і в загальному випадку проблема 1 залишається відкритою.

В [3] проблема 2 розв'язана цілком для $m = n = 0$ і частково для $m = 0, n = 1$ (вказані лише достатні умови). Там також наведено приклад множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$, для якої $S_{0,0}(E) \subseteq P(E)$, але $S_{0,0}(E) \nsubseteq P_0(E)$. Він показує, що проблеми 2 і 3 різні.

В даній статті ми, застосовуючи звичну техніку, що використовує визначники Вандермонда (див. [1]), доводимо, що коли $E = X \times Y$, $|X| > m$ або $|Y| > n$ і $f \in S_{m,n}(E)$, то

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{i,k} x^j y^k$$

на множині E, звідки випливає, що $S_{m,n}(X \times Y) \subseteq P_{m+n}(X \times Y)$, якщо $|X| > m$ або $|Y| > n$.

Далі, з допомогою інтерполяційного многочлена Лаґранжа для довільних різних точок $x_1, ..., x_n$ і різних точок $y_1, ..., y_m$ з поля K і многочленів $p_1(x), ..., p_m(x)$ з $K[x]$, та многочленів $q_1(y), ..., q_n(y)$ з $K[y]$, таких, що $p_j(x_k) = q_k(y_j)$ при $j = 1, ..., m$ і $k = 1, ..., n$, ми вказуємо явну формулу для многочлена $f(x, y)$ з $K[x, y]$, такого, що $f(x_k, y) = q_k(y)$ на K при $k = 1, 2, ..., n$ і $f(x, y_j) = p_j(x)$ на K при $j = 1, ..., m$.

Нагадаємо, що *хрестом* множини E в K^2 називається множина

$$xp(E) = (X \times K) \cup (K \times Y),$$

де $X = pr_1(E)$, а $Y = pr_2(E)$. Попередній результат показує, що коли $A = \{x_1, ..., x_n\}$, $B = \{y_1, ..., y_m\}$, $C = A \times B$ і $E = xp(C)$, то $S(E) = P(E)$.

Ми доводимо тут, що рівність $S(E) = P(E)$ має місце і для нескінченних множин A і B, для яких $S(C) = P(C)$, а також, що для скінченного або незліченного поля K з рівності $S(C) = P(C)$ завжди випливає рівність $S(E) = P(E)$. Для зліченного поля K це вже не так.

3. Загальний вигляд (m, n)-поліноміальних відображень на добутках.

Теорема 1. Нехай $E = X \times Y \subseteq K^2$, m і n – довільні цілі невід'ємні числа, $|X| > m$ або $|Y| > n$ і $f \in S_{m,n}(E)$. Тоді існують такі елементи $a_{j,k}$ з поля K, що

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k} x^j y^k$$

на множині E.

Доведення. Припустимо, наприклад, що $|Y| > n$. Тоді з множини Y можна вибрати $n+1$ різних елементів $y_0, y_1, ..., y_n$. Оскільки для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to K$

належить до $P_n(Y)$, то існують такі функції $b_k : X \to K$ при $k = 0, 1, ..., n$, що

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x) y^k$$

на множині E. Підставляючи сюди $y = y_j$, ми отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{n} b_k(x) y_j^k = f(x, y_j) = f_{y_j}(x)$$

на X для кожного $j = 0, 1, ..., n$.

Розглянемо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & \dots & y_0^n \\ 1 & y_1 & \dots & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^n \end{vmatrix}$$

і

$$\Delta_k(x) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_0 & \dots & y_0^{k-1} & f_{y_0}(x) & y_0^{k+1} & \dots & y_0^n \\ 1 & y_1 & \dots & y_1^{k-1} & f_{y_1}(x) & y_1^{k+1} & \dots & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^{k-1} & f_{y_n}(x) & y_n^{k+1} & \dots & y_n^n \end{vmatrix},$$

де $x \in X$, а $k = 0, 1, ..., n$. Визначник Δ – це відомий *визначник Вандермонда* ([4, *c*.50], [5, *c*.114]), для якого

$$\Delta = \prod_{0 \le i < j \le n} (y_j - y_i),$$

зокрема, $\Delta \neq 0$, бо точки $y_0, ..., y_n$ різні. Тому за правилом Крамера

$$b_k(x) = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta}$$

для кожного $k = 0, 1, ..., n$ і довільного $x \in X$. Розкладаючи визначник $\Delta_k(x)$ по елементах k-го стовпчика, отримаємо, що

$$\Delta_k(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{k,j} f_{y_j}(x),$$

де $\alpha_{k,j}$ – алгебраїчне доповнення елемента $f_{y_j}(x)$, яке не залежить від x, а тільки від вибраних точок $y_0, ..., y_n$. Оскільки за умовою $f_{y_j} \in P_m(X)$ для кожного $j = 0, ..., n$, то і $\Delta_k \in P_m(X)$, а значить, і $b_k \in P_m(X)$ для кожного $k = 0, ..., n$. Тому існують такі елементи $a_{j,k}$ з K, що

$$b_k(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{j,k} x^j$$

на X. В такому разі

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x) y^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{j,k} x^j y^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k} x^j y^k$$

на множині $E = X \times Y$.

Позначимо символом $P_{m,n}(E)$ множини всіх функцій $f : E \to K$, які є звуженнями на E поліномів $p(x, y)$ з $K[x, y]$ такого виду:

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k} x^j y^k.$$

З теореми 1 негайно випливає

Теорема 2. Нехай $E = X \times Y \subseteq K^2$ і $|X| > n$ або $|Y| > m$. Тоді

$$S_{m,n}(E) = P_{m,n}(E) \subseteq P_{m+n}(E).$$

Використовуючи техніку доведення теореми 4 з [2], можна встановити і такий результат.

Теорема 3. Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і G – область в $\mathbb{K}^2$ Тоді $S_{m,n}(G) = P_{m,n}(G)$ для довільних цілих невід'ємних m і n.

4. Випадок двоелементного поля та інші приклади. Розглянемо поле $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ з двох елементів, дії в якому задаються правилами

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 0 + 1 = 1;$$

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \text{ і } 1 \cdot 1 = 1.$$

Зауважимо, що кожне відображення $g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ належить до $P_1(\mathbb{Z}_2)$. Справді, тотожне відображення $g_1 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ задається формулою $g_1(x) = x$, а відображення $g_2 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, для якого $g_2(0) = 1$ і $g_2(1) = 0$, формулою $g_2(x) = x + 1$, є ще два сталих відображення $g_3(x) = 0$ і $g_4(x) = 1$.

Тому кожне відображення $f : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}$ є нарізно лінійним, тобто належить до класу $S_{1,1}(\mathbb{Z}_2)$. За теоремою 2 $S_{1,1}(\mathbb{Z}_2) = P_{1,1}(\mathbb{Z}_2)$. Таким чином, $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2^2} = P_{1,1}(\mathbb{Z}_2)$.

Множина $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2^2}$ всіх відображень $f : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ складається з $2^4 = 16$ елементів. Це поліноміальні функції $0, x, y, x+y, xy, xy+x, xy+y, xy+x+y, 1, x+1, y+1, x+y+1, xy+1, xy+x+1, xy+y+1, xy+x+y+1$.

Зауважимо, що для загальних множин E в K^2 не те, що включення $S_{m,n}(E) \subseteq P_{m,n}(E)$, а навіть включення $S_{m,n}(E) \subseteq P(E)$ може не виконуватися.

Наприклад, якщо взяти $K = \mathbb{R}, E = [0, +\infty)^2 \cup (-\infty, 0]^2$ і покласти $f(x, y) = xy$, якщо $x, y \geq 0$, і $f(x, y) = -xy$, якщо $x, y \leq 0$, то ми отримаємо функцію $f \in S_{1,1}(E)$, для якої $f \notin P(E)$.Можна навести ще цікавіший приклад.

Теорема 4. Існує така множина $E \subseteq \mathbb{R}$, для якої $S_{0,0}(E) \nsubseteq P(E)$ і $pr_1(E) = \mathbb{R}$.

Доведення. Числову пряму $\mathbb{R}$ можна подати у вигляді об'єднання диз'юнктної послідовності всюди щільних в $\mathbb{R}$ множин $A_0, A_1, ..., A_n, ...$. Покладемо $E_n = A_n \times \{n\}$ при $n = 0, 1, ...$ і $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Визначимо функцію $f : E \to \mathbb{R}$, покладаючи

$$f(x, 2k) = 0 \text{ на } A_{2k} \text{ і } f(x, 2k+1) = 1 \text{ на } A_{2k+1}$$

Для кожного $y \in Y = pr_2(E) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ функція f_y стала і дорівнює 0 чи 1, коли y відповідно парне чи непарне число. Для кожного $x \in X = pr_1(E) = \mathbb{R}$ функція $f^x : E^x \to \mathbb{R}$ теж стала, бо множина E^x одноточкова. Таким чином, $f : E \to \mathbb{R}$ – це нарізно стала функція, тобто $f \in S_{0,0}(E)$.

З другого боку, неважко переконатися, що $f \notin P(E)$. Справді, припустимо, що існує такий многочлен $p(x, y)$ з $\mathbb{R}[x, y]$, що $p|_E = f$. Для кожного $y \in Y = \mathbb{N}_0$ функція $p_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна і $p_y(x) = 0$ чи 1 на всюди щільній в $\mathbb{R}$ множині A_y. Тому $p_y(x) = 0$ на $\mathbb{R}$ для парних y і $p_y(x) = 1$ на $\mathbb{R}$ для непарних y. Звідси випливає, що для полінома $g(y) = p^0(y) = p(0, y)$ границі $\lim_{y\to+\infty} g(y)$ не існує, адже $g(2k) = 0$ і $g(2k + 1) = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Але для кожного полінома $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ границя $\lim_{y\to+\infty} g(y)$ існує і дорівнює c, якщо $g(y) = c$ на $\mathbb{R}$, і $+\infty$, якщо степінь g більша або рівна 1. Ця суперечність доводить, що $f \notin P(E)$.

5. Нарізно поліноміальні функції на хрестах добутків. Ми почнемо з однієї явної побудови, яку здійснимо з допомогою інтерполяційних многочленів Лаґранжа.

Теорема 5. Нехай $x_1, ..., x_n$ – різні точки з K, $y_1, ..., y_m$ – різні точки з K, $p_1(x), ..., p_m(x)$ – поліноми з $K[x]$, $q_1(y), ..., q_n(y)$ – поліноми з $K[y]$, причому $p_j(x_k) = q_k(y_j)$ при $j = 1, ..., m$ і $k = 1, ..., n$. Нехай, далі:

$$g_k(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (x - x_i), \phi_k(x) = \frac{g_k(x)}{g_k(x_k)},$$

$$h_j(y) = \prod_{i=1, i\neq j}^{m} (y - y_i), \psi_j(y) = \frac{h_j(y)}{h_j(y_j)},$$

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^{n} q_k(y)\phi_k(x)$$

і

$$\widetilde{p_j}(x) = p_j(x) - g(x, y_j).$$

Тоді формулою

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{p_j}(x)\psi_j(y) + g(x, y)$$

задається такий поліном з $K[x, y]$, що $f(x_k, y) = q_k(y)$ при $k = 1, ..., n$ і $f(x, y_j) = p_j(x)$ при $j = 1, ..., m$ для довільних x і y з поля K.

Доведення. Оскільки $q_k(y) \in K[y]$ і $\phi_k(x) \in K[x]$, то $g(x, y) \in K[x, y]$. Так само, $\widetilde{p_j}(x) \in K[x]$ і $f(x, y) \in K[x, y]$. Далі, оскільки $\phi_i(x_k) = 1$ при $i = k$ та $\phi_i(x_k) = 0$ при $i \neq k$, то

$$g(x_k, y_j) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y_j)\phi_i(x_k) = q_k(y_j).$$

Тому

$$\widetilde{p_j}(x_k) = p_j(x_k) - g(x_k, y_j) = p_j(x_k) - q_k(y_j) = 0$$

для довільних $k = 1, ..., n$ і $j = 1, ..., m$. Отже,

$$f(x_k, y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{p_j}(x_k)\psi(y) + g(x_k, y) =$$

$$= g(x_k, y) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y)\phi_i(x_k) = q_k(y).$$

для кожного $k = 1, ..., n$. З другого боку

$$f(x, y_j) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p_j}(x)\psi_i(y_j) + g(x, y_j) =$$

$$= \widetilde{p_j}(x) + g(x, y_j) = p_j(x)$$

для кожного $j = 1, ..., m$, адже $\psi_i(y_j) = 1$ при $i = j$ та $\psi_i(y_j) = 0$ при $i \neq j$.

З отриманого результату легко виводиться такий наслідок.

Теорема 6. Нехай A і B – скінченні підмножини поля K, $C = A \times B$ і $E = xp(C)$. Тоді $S(E) = P(E)$.

Доведення. Припустимо, що $A = \{x_1, ..., x_n\}$ і $B = \{y_1, ..., y_m\}$, де $x_k \neq x_j$ і $y_k \neq y_j$ при $k \neq j$. Нехай $f \in S(E)$. Тоді функції $p_j(x) = f(x, y_j) = f_{y_j}(x)$ – це поліноми на $K = E_y$, а $q_k(y) = f(x_k, y) = f^{x_k}(y)$ – це поліноми на $K = E^{x_k}$. Для цих поліномів будемо мати

$$p_j(x_k) = f(x_k, y_j) = q_k(y_j)$$

для довільних j і k. Тому за теоремою 5 існує такий поліном $g(x, y)$ з $K[x, y]$, що

$$g(x_k, y) = q_k(y) = f(x_k, y)$$

і

$$g(x, y_j) = p_j(x) = f(x, y_j)$$

при $j = 1, ..., m$ $k = 1, ..., n$ і для довільних x і y з K. Ясно, що $g|_E = f$, отже, $f \in P(E)$. Таким чином, $S(E) \subseteq P(E)$. Оскільки обернене включення виконується завжди, то $S(E) = P(E)$.

Цей результат можна розвинути.

Теорема 7. Нехай підмножини A і B поля K нескінченні, $C = A \times B$, $E = xp(C)$ і $S(C) = P(C)$. Тоді і $S(E) = P(E)$.

Доведення. Нехай $f \in S(E)$. Тоді, зрозуміло, що $f|_C \in S(C)$. Але $S(C) = P(C)$, отже, існує такий поліном $p(x, y)$ з $K[x, y]$, що $p|_C = f|_C$. Покажемо, що $p|_E = f$. Нехай $x \in A$. Оскільки $f \in S(E)$ і $E^x = K$, то $f^x : K \to K$ – це поліном. Для поліномів p^x і f^x маємо, що $p^x|_B = f^x|_B$. Оскільки множина B нескінченна, то обов'язково $p^x = f^x$. Це показує, що $p|_{A\times K} = f|_{A\times K}$. Так само доводимо, що $p|_{K\times B} = f|_{K\times B}$. Тому і $p|_E = f$. Таким чином, $f \in P(E)$, звідки і випливає рівність $S(E) = P(E)$.

Зауважимо, що для нескінченних множин A і B рівність $S(A \times B) = P(A \times B)$ рівносильна тому, що одна із них незліченна, що негайно випливає з теореми [1], сформульованої у п.2.

Теорема 8. Нехай поле K скінченне або незліченне, $C = A \times B \subseteq K^2$, $E = xp(C)$ і $S(C) = P(C)$. Тоді і $S(E) = P(E)$.

Доведення. У тому випадку, коли обидві множини або скінченні, або нескінченні, твердження теореми випливає з теорем 6 і 7 відповідно, які справджуються для довільного поля K. Припустимо, що одна з множин, наприклад A, скінченна, а інша множина B нескінченна. Візьмемо функцію $f \in S(E)$ і доведемо, що $f \in P(E)$. Звуження $f|_{K\times B}$ – це нарізно поліноміальна функція на добутку $K \times B$, адже $K \times B \subseteq E$, причому множник K скінченний або незліченний. За вищезгаданою теоремою з [1] будемо мати, що $S(K \times B) = P(K \times B)$, отже $f|_{K\times B} \in P(K \times B)$, а значить, існує такий поліном $p(x, y)$ з $K[x, y]$, що $p|_{K\times B} = f|_{K\times B}$. Розглянемо довільну точку $x \in A$. Оскільки $\{x\} \times K \subseteq A \times K \subseteq E$ і $f \in S(E)$, то $f^x : K \to K$ – це поліном. Але $f^x|_B = p^x|_B$, бо $\{x\} \times B \subseteq K \times B$, а множина B нескінченна. Тому $f^x = p^x$ за лемою 4 з [1]. Це показує, що і $p|_{A\times K} = f|_{A\times K}$. Оскільки $E = (K \times B) \bigcup (A \times K)$, то і $p|_E = f$, отже, $f \in P(E)$.

Теорема 8 стає неправильною для зліченного поля K. Справді, візьмемо в зліченному полі K якийсь елемент a і розглянемо множини $A = \{a\}$, $B = K$ і $C = A \times B = \{a\} \times K$. Якщо $f \in S(C)$, то $p = f^a : K \to K$ – це поліном з $K[y]$, він же буде і поліномом з $K[x, y]$ і для нього $p|_C = f$. Тому $f \in P(C)$, отже, $S(C) = P(C)$. Розглянемо множину $E = xp(C)$. Зрозуміло, що $E = K^2$, бо $K \times B = K^2$. Але як відомо [1, теорема 4] для зліченного поля K існує нарізно поліноміальна функція $g : K^2 \to K$, яка не є поліноміальною. Тому $S(E) \neq P(E)$.

Зауважимо, що основні результати даної статті були анонсовані у праці [6]. Подана там теорема 3 справедлива лише у випадку, коли поле K скінченне або незліченне.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. В.374. Математика. – 2008.– С. 66-74.

2. Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно і сукупно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. В.454. Математика.– 2009. – С. 50-53.

3. Косован В.М., Маслюченко В.К. Про нарізно сталі і стало-лінійні функції // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. ім. Ю. Федьковича. 1, №3. Серія: Математика. – 2011.– С.44-48.

4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

5. Чарін В.С. Лінійна алгебра. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.

6. Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно поліноміальні функції на добутках та їх хрестах //Матеріали Всеукраїнської наук. конф. "Диф. рівн. та їх заст. в прикл. матем.". 11-13 червня 2012, Чернівці. – Ч.: ЧНУ, 2012. – С. 93-94.