УДК 517.982

©2012 р. І. В. Красікова

Запорізький національний університет

ПРО ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ ВУЗЬКИМИ ОПЕРАТОРАМИ ТА ОПЕРАТОРАМИ МОРЕ НА ПРОСТОРАХ L_p

Ми порівнюємо два класи лінійних неперервних операторів, заданих на просторах L_p – вузькі оператори та оператори Море. Обидва класи можна розглядати як узагальнення поняття компактного оператора на цих просторах. Добре відомо, що кожний компактний оператор є вузьким. Ми доводимо, що кожний оператор Море також є вузьким. Отже, природним є запитання: який зв'язок існує між цими класами? Ми показуємо, що у загальному випадку вони непорівнянні. Так, на просторі L_2 існує невузький оператор Море, а на просторах $L_p, 1 < p < \infty$ існує вузький оператор, який не є оператором Море.

We compare two classes of continuous linear operators on L_p-spaces – narrow operators and Maurey operators. Both classes can be considered as generalizations of the notion of a compact operator on the spaces L_p. It is well known that every compact operator is narrow. We prove that every Maurey operator is narrow. So, the following question naturally arises: what is the connection between these classes? We show that they are incomparable, in general. More precisely, there exists a non-narrow Maurey operator on L_2, and there is a narrow non-Maurey operator on L_p for $1 < p < \infty$.

Ми будемо розглядати дійсні банахові простори $L_p = L_p([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 \le p < \infty$ (тут $\mathcal{B}$ – борелівська σ-алгебра, а λ – міра Лебеґа)та два класи лінійних неперервних операторів на цих просторах – вузькі оператори та оператори Море. З'ясуємо, як пов'язані між собою ці класи.

Означення 1. Оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ називається *вузьким*, якщо для будь-яких $A \in \mathcal{B}$ та $\varepsilon > 0$ існує такий $x \in L_p$, що $x^2 = \mathbf{1}_A$, $\int_{[0,1]} x \, d\lambda = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon$. Тут $\mathbf{1}_A$ – характеристична функція множини $A \subseteq [0,1]$.

Основні результаті стосовно вузьких операторів можна знайти у [4]. Зокрема, відомо, що кожний компактний оператор на просторі L_p є вузьким. Розглянемо на цих просторах ще один клас операторів, які також узагальнюють поняття компактного оператора – клас операторів Море.

Позначимо через Z одиничну кулю простору L_∞ зі слабкою* топологією $\sigma(L_\infty, L_1)$. Для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ покладемо

$$Z(A) = \left\{ h \in Z : \ h^2 = \mathbf{1}_A, \ \int_{[0,1]} h \, d\lambda = 0 \right\}.$$

Іншими словами, $h \in Z(A)$ тоді та тільки тоді, коли $h = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C$ для деяких $B, C \in \mathcal{B}$ з умовою $A = B \sqcup C$ та $\lambda(B) = \lambda(C)$. Будемо розглядати $Z(A)$ з топологією, індукованою Z.

Для кожного $T \in \mathcal{L}(L_p)$ визначимо два відображення [2] $\tilde{M}_T, \tilde{m}_T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, поклавши для кожної множини $A \in \mathcal{B}$

$$\tilde{M}_T(A) = \limsup_{Z(A) \ni h \to 0} \int_{[0,1]} h \, Th \, d\lambda,$$

$$\tilde{m}_T(A) = \liminf_{Z(A) \ni h \to 0} \int_{[0,1]} h \, Th \, d\lambda.$$

та покладемо

$$M_T(A) =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \tilde{M}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right\},$$

$$m_T(A) =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right\}.$$

Останні два відображення є зліченно-адитивним мірами на $\mathcal{B}$, які називаються *верхньою* та *нижньою мірами Море*, відповідно. Кожна з цих мір має похідну Радона-Нікодима, тобто для кожного $A \in \mathcal{B}$ виконуються рівності

$$M_T(A) = \int_A F_T\, d\lambda, \quad m_T(A) = \int_A f_T\, d\lambda, \quad (1)$$

де функції $F_T, f_T \in L_\infty$ називаються *верхньою* та *нижньою похідною Море оператора* T.

Зауважимо, що для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ існує простий зв'язок між уведеними функціями:

$$f_{-T} = -F_T.$$

Означення 2. [1] Для оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ число $\|T\|_M = \max\{\|f_T\|_\infty, \|F_T\|_\infty\}$ назвемо *напівнормою Море оператора* T, а оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ з умовою $\|T\|_M = 0$ будемо називати *оператором Море*.

У [1] перевірено, що $\|\cdot\|_M$ є напівнормою на $\mathcal{L}(L_p)$, причому $\|T\|_M \le \|T\|$ для довільного $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Отже, множина $\mathcal{M}(L_p)$ всіх операторів Море на просторі L_p є (замкненим) лінійним підпростором простору $\mathcal{L}(L_p)$. Основний результат [1] стверджує, що якщо оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ не є ізоморфним вкладенням на жодному підпросторі $E \subseteq L_p$, ізоморфному L_p, то T – оператор Море.

Доведемо простий критерій того, що деякий лінійний неперервний оператор є оператором Море.

Твердження 1. Оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ є оператором Море тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{Z(A)\ni h\to 0} \int_{[0,1]} h\,Th\, d\lambda = 0 \qquad (2)$$

для довільного $A \in \mathcal{B}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$ є оператором Море, тоді $\|f_T\|_\infty = \|F_T\|_\infty = 0$, тобто з умов (1) випливає, що $m_T(A) = M_T(A) = 0$ для будь-якої множини $A \in \mathcal{B}$. Тому

$$\limsup_{Z(A)\ni h\to 0} \int_{[0,1]} h\,Th\, d\lambda =$$

$$= \liminf_{Z(A)\ni h\to 0} \int_{[0,1]} h\,Th\, d\lambda = 0,$$

тобто, існує границя

$$\lim_{Z(A)\ni h\to 0} \int_{[0,1]} h\,Th\, d\lambda,$$

яка також дорівнює нулю.

Достатність. Якщо існує границя

$$\lim_{Z(A)\ni h\to 0} \int_{[0,1]} h\,Th\, d\lambda = 0,$$

то зрозуміло, що верхня та нижня границі також будуть дорівнювати нулю, тобто для будь-якої множини $A \in \mathcal{B}$ виконується рівність $\widetilde{m}_T(A) = \widetilde{M}_T(A) = 0$, а значить і $m_T(A) = M_T(A) = 0$, тобто $f_T = F_T = 0$ і оператор T є оператором Море. $\square$

За допомогою твердження 1 можна дати означення оператора Море, який діє на просторі L_p при $1 \le p \le \infty$, а не лише при $1 \le p < \infty$.

Означення 3. Оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ з $1 \le p \le \infty$ назвемо *оператором Море*, якщо рівність (2) виконується для довільної множини $A \in \mathcal{B}$.

Зв'язок між операторами Море та компактними операторами встановлює наступне твердження.

Твердження 2. Кожний компактний оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при $1 \le p < \infty$ є оператором Море.

Доведення. Нехай A – довільна борелівська множина на $[0,1]$ та послідовність функцій $(x_n)_{n=1}^\infty$ з $Z(A)$ збігається до нуля в слабкій* топології. Якщо оператор T є компактним, то послідовність $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ збігається до нуля в просторі L_p. Тоді при $p > 1$ отримуємо

$$\left|\int_{[0,1]} x_n\, Tx_n\, d\lambda\right| \le \|x_n\|_q \|Tx_n\|_p \le \|Tx_n\|_p,$$

а при $p = 1$

$$\left|\int_{[0,1]} x_n\, Tx_n\, d\lambda\right| \le \int_{[0,1]} |x_n\, Tx_n|\, d\lambda \le$$

$$\leq \int_{[0,1]} |Tx_n|\, d\lambda = \|Tx_n\|_1.$$

Тобто, у будь-якому випадку, при довільному виборі послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ маємо

$$\left|\int_{[0,1]} x_n\, Tx_n\, d\lambda\right| \to 0$$

при $n \to \infty$, що означає, що

$$\lim_{Z(A)\ni x\to 0} \int_{[0,1]} x\, Tx\, d\lambda = 0,$$

отже, оператор T є оператором Море, згідно з твердженням 1. □

У загальному випадку класи операторів Море та вузьких операторів не порівнянні. Точніше, має місце такий результат.

Приклад 1. Існує оператор Море, що діє у просторі L_2, який є ізометрією на весь простір, а отже, не є вузьким оператором.

Доведення. Нехай $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільний ортонормований базис у просторі L_2. Визначимо оператор $J \in \mathcal{L}(L_2)$ таким чином:

$$Jx = \sum_{k=1}^{\infty}\Big((x, e_{2k-1})e_{2k} - (x, e_{2k})e_{2k-1}\Big)$$

для довільного $x \in L_2$. Оператор J є ізометричним вкладенням, оскільки

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big((x, e_{2k-1})^2 + (x, e_{2k})^2\Big) = \|Jx\|^2.$$

Зауважимо, що $Je_{2k-1} = e_{2k}$ і $Je_{2k} = -e_{2k-1}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, а тому весь базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ лежить в образі ізометричного вкладення J. Таким чином, J – ізометрія на L_2. Доведемо тепер, що $\displaystyle\int_{[0,1]} x\, Jx\, d\lambda = 0$ для довільного $x \in L_2$, з чого безпосередньо випливатиме, що J – оператор Море. Дійсно, для довільного $x \in L_2$ маємо:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\Big((x, e_{2k-1})e_{2k-1} + (x, e_{2k})e_{2k}\Big),$$

$$(x, Jx) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-(x, e_{2k-1})\cdot(x, e_{2k}) + (x, e_{2k})\cdot(x, e_{2k-1})\Big) =$$

$$= 0. \qquad \square$$

Нам невідомий приклад не вузького оператора Море на просторах L_p при $p \neq 2$.

Приклад 2. Для довільного $p \in (1, +\infty)$ існує вузький оператор $T \in \mathcal{L}(L_p)$, який не є оператором Море.

Доведення. Згідно з [3, p. 59], тотожний оператор Id у просторі L_p є сумою двох вузьких операторів $Id = T_1 + T_2$. З іншого боку, оскільки множина операторів Море на просторі L_p є підпростором простору $\mathcal{L}(L_p)$ [1], а з твердження 1 випливає, що Id не є оператором Море, то, принаймні, один з операторів T_1, T_2 також не є оператором Море. □

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красікова І.В.* Про одне узагальнення поняття компактного оператора на просторах L_p / І. В. Красікова, М.М.Попов // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 38-42.

2. *Maurey B.* Sous-espaces compléméntes de L^p d'apres P. Enflo/ B. Maurey // Semin. Maurey - Schwartz. – 1975. – 1974-75, Exp. No III. – P. 1–14.

3. *Plichko A. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces/ A. M. Plichko, M. M. Popov // Diss. Math. (Rozpr. mat.) – 1990. – 306. – P. 1–85.

4. *Popov M.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices / M.Popov, B.Randrianantoanina // De Gruyter Studies in Mathematics 45, Berlin, De Gruyter, 2012.