УДК 123.456

©2012 р. О.О. Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА НЕФІКСОВАНИХ ЧАСОВИХ ІНТЕРВАЛАХ

Було доведено існування оптимального керування системами диференціальних рівнянь на півосі без розв'язку рівняння динамічного програмування Беллмана, використовуючи прямі методи розв'язання екстремальних задач.

It has been proven the existence of optimal control for systems of differential equations on semiaxis without solving the Bellman equation of dynamic programming using direct methods for solving extremal problems.

1. Вступ. В даній роботі розглядається наступна задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^{\tau} g(t)L(t,x(t),u(t))dt \to \inf, \tag{2}$$

де $t \in [0,\infty)$, $x \in D$-деяка обмежена область в $\mathbb{R}^d$, τ - момент виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D. Більш точна постановка задачі буде дана в основній частині роботи.

В статті доводиться теорема існування оптимального керування для задачі (1), (2). Раніше подібна задача розглядалася, наприклад, в роботах [1], [2], [3] де є широка бібліографія. Для їх вивчення, як правило, застосовувався метод динамічного програмування або принцип максимума Понтрягіна. Використання методу динамічного програмування пов'язане з необхідністю розв'язання відповідного рівняння Беллмана, що є нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних першого порядку і представляє складну задачу. Умови принципу максимуму Понтрягіна дозволяють звести знаходження оптимального керування до розв'язання певної двоточкової крайової задачі. Принцип максимуму дозволяє знаходити оптимальне керування для багатьох важливих прикладних задач. Однак, часто розв'язання двоточкової крайової задачі може виявитись досить складною справою. Тому важливо отримати умови існування оптимального керування в термінах коефіцієнтів вихідної системи і функції $g(t)L(t,x,u)$, що входить в критерій якості.

Інколи теореми існування можна доводити використовуючи методи диференціальних рівнянь. Але в загальному випадку існування оптимального керування, яке мінімізує заданий критерій якості необхідно доводити прямими методами розв'язання екстремальних задач.

Інший підхід до питань існування оптимальних керувань з застосуванням методу усереднення можна знайти, наприклад, в роботах [6], [7], [8].

Є вже відомі теореми існування оптимального керування, що були отримані з використанням прямих методів для деяких типів задач, з умовами в термінах коефіцієнтів вихідної системи.

Так в роботах [1], [2] доводиться існування оптимального керування для задач Майєра та Больца на фіксованому проміжку часу без додаткових обмежень на керування.

В роботі [1] отримана теорема існування оптимального керування для системи

$$\dot{x} = u(t)$$

на заданій обмеженій області Q

$$J(u)=\int_{t_0}^{\tau} L(s,x(s),\dot{x}(s))ds+\psi(\tau,x(\tau))\to\inf,$$

де t_0- початковий момент часу, τ- момент виходу розв'язку системи $x(t)$ із області Q при $t\in[0,T]$, де T-скінченне.

Ми в даній статті узагальнили вказані задачі до задачі (1),(2) і доводимо існування оптимального керування використовуючи прямі методи розв'язання екстремальних задач.

Робота складається із вступу, постановки задач, основного результату та прикладів застосування.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування (1),(2), де $x_0\in D$ - фіксований вектор, $t\in[0,\infty), x\in D$ - фазовий вектор, D - обмежена область із $\mathbb{R}^d$, τ - момент виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D, $u\in U\subset\mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина і $0\in U$, вектор-функція $f_1(t,x):[0,\infty)\times D\to\mathbb{R}^d$ і матриця $f_2(t,x):[0,\infty)\times D\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$- неперервні за сукупністю змінних функції, для яких виконується умова Ліпшиця, тобто існує така константа $H>0$, що для будь-яких $x_1,x_2\in D$, $t\geq 0$ та $u\in U$ виконуються нерівності:

$$|\ f_1(t,x_1)-f_1(t,x_2)\ |\leq H\ |\ x_1-x_2\ |,$$

$$||\ f_2(t,x_1)-f_2(t,x_2)\ ||\leq H\ |\ x_1-x_2\ |\ . \quad (3)$$

Функції $L(t,x,u)$ та $L_u(t,x,u)$ є неперервними для будь-яких $t\in[0,\infty), x\in D$ та $u\in U$, причому $L_u(t,x,u)$ обмежена, і задовольняють наступні умови:

1) існує $K>0$, що

$$|\ L(t,x_1,u_1)-L(t,x_2,u_2)\ |\leq K\ |\ x_1-x_2\ |, \quad (4)$$

2) $L(t,x,u)$ опукла по u при будь-яких фіксованих t і x.

Функція $g(t)\in L_1([0,\infty))$ та $g(t)\in L_q([0,\infty))$, де $q=p/(p-1), p>1$.

Керування $u(t)$ вважається допустимим, якщо :

a1) $u(t)\in U$, при $t\in[0,\infty)$.

a2) існує така стала $C>0$, що не залежить від $u(t)$ і задоволяє умову a1)

$\int\limits_0^\infty |\ u(t)\ |^p\ dt\leq C.$

Множину допустимих керувань, що задовольняють умови a1), a2), будемо називати допустимою для задачі (1), (2) і позначатимемо її через V.

2. Основний результат. Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай в системі (1) з критерієм якості (2), для функцій $f_1(t,x), f_2(t,x), g(t)$ та $L(t,x,u)$ виконуються умови попереднього пункту. Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань V, тобто існує допустиме керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

Доведення. Оскільки критерій якості невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$ і тому існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n\geq 1\}$ таких, що $J(u_n)\to m$, при $n\to\infty$ монотонно. Отже,

$J(u_n)=\int\limits_0^{\tau_n} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))dt\to m,$

при $n\to\infty$,

де $x_n(t)$ -розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t), \tau_n$- моменти виходу розв'язку $x_n(t)$ на границю області D.

Умова a2) гарантує слабку компактність послідовності $u_n(t)$, тобто послідовність $u_n(t)$ слабко збігається до границі $u^*(t)\in L_p([0,\infty))$. Тоді за лемою Мазура [4, ст.173] знайдеться опукла комбінація

$b_k(t)=\sum_{i=1}^{n(k)}\alpha_i(k)u_i(t)$ елементів

$u_i(t)\in U(\alpha_i\geq 0,\sum_{i=1}^{n(k)}\alpha_i=1)$, що в L_p маємо $b_k\to u^*, k\to\infty$. Отже, існує майже всюди збіжна на $[0,\infty)$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l}(t)\to u^*(t), l\to\infty$ для майже всіх t. Оскільки U опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)}\alpha_i u_i(t)\in U$ і $u^*(t)\in U$ майже для всіх t.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n\geq 1\}$.

$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t[f_1(t,x_n(t))dt + f_2(t,x_n(t))u_n(t)]ds,\ t\in[0,\tau_n]$. За функіями $x_n(t)$ побудуємо функції $y_n(t)$, які визначаються на півосі $[0,\infty)$ наступним чином

$$y_n(t)=\begin{cases} x_n(t), \text{ при } t\in[0,\tau_n),\\ x_n(\tau_n), \text{ при } t\geq 0.\end{cases} \quad (5)$$

Виберемо довільний момент часу $T\in[0,\infty)$ і зафіксуємо його.

Будемо вважати, що

$$\tau_n'=\begin{cases} inf\{t\in[0,T], \text{ якщо } x_n(t)\in\partial D\},\\ T, \text{ якщо } x_n(t)\in D\setminus\partial D, t\geq 0.\end{cases}$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$, при $t\in[0,T]$.

З нерівності Гельдера для будь-яких $s_1,s_2\in[0,\tau_n']$ і $s_1<s_2$ маємо
$\mid y_n(s_1)-y_n(s_2)\mid=\mid x_n(s_1)-x_n(s_2)\mid=$
$=\mid\int\limits_{s_1}^{s_2}[f_1(t,x_n(t))dt+f_2(t,x_n)(t)u_n(t)]dt\leq$
$\leq M(s_2-s_1)+M\mid\int\limits_{s_1}^{s_2}u_n(t)dt\mid\leq M(s_2-s_1)+$
$+M(s_2-s_1)^{1/q}\mid\mid u_n\mid\mid_p$,

де $1/p+1/q=1$, а
$M=max\{\sup_{x\in D,t\in[0,T]}\mid f_1(t,x)\mid,$
$\sup_{x\in D,t\in[0,T]}\mid\mid f_2(t,x)\mid\mid\}$.

Якщо $s_1<\tau_n'<s_2<T$, тоді маємо
$\mid y_n(s_1)-y_n(s_2)\mid=\mid x_n(s_1)-x_n(\tau_n')\mid=$
$=\mid\int\limits_{s_1}^{\tau_n'}[f_1(t,x_n(t))+f_2(t,x_n(t))u_n(t)]dt\leq$
$\leq M(\tau_n'-s_1)+M\mid\int\limits_{s_1}^{\tau_n'}u_n(t)dt\mid\leq M(\tau_n'-s_1)+$
$+M(\tau_n'-s_1)^{1/q}\mid\mid u_n\mid\mid_p\leq$
$\leq M(s_2-s_1)+M(s_2-s_1)^{1/q}\mid\mid u_n\mid\mid_p$.

Якщо $\tau_n'<s_1<s_2<T$, тоді
$\mid y_n(s_1)-y_n(s_2)\mid=\mid x_n(\tau_n')-x_n(\tau_n')\mid=0$

Тоді сімя функцій $\{y_n(t),n\geq 1\}, t\in[0,T]$ - рівномірно обмежена та рівностепенево неперервна. І за теоремою Асколлі на кожному обмеженому відрізку часу $[0,T]$ можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність (яку також будемо позначати через $\{y_n(t),n\geq 1\}$) таку, що $y_n(t)\rightrightarrows y^*(t)$, при $n\to\infty$ на $[0,T]$. В силу довільності T функція $y^*(t)$ визначена на всьому $t\geq 0$.

Позначимо через τ^* моменти виходу $y^*(t)$ на границю ∂D, тобто

$$\tau^*=\begin{cases}\inf\{t\geq 0: y^*(t)\in\partial D\},\\ \infty, \text{ якщо } y^*(t)\in D\setminus\partial D, t\geq 0.\end{cases}$$

і

$$\tau_n=\begin{cases}\inf\{t\geq 0: y_n(t)\in\partial D\},\\ \infty, \text{ якщо } y_n(t)\in D\setminus\partial D, t\geq 0.\end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^*\leq\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tau_n$.

Припустимо, що це не так. Тоді

$$\tau^*>\lim_{n\to\infty}\inf\tau_n=\tau.$$

Розглянемо два випадки:
1) Нехай $\tau^*<\infty$. Виберемо довільне $T_1\in[0,\infty)$ таке, що $T_1\geq\tau^*$. На проміжку $[0,T_1], y_n(t)\rightrightarrows y^*(t), n\to\infty$.
За теоремою про характеризацію нижньої границі для будь-якого $\delta>0$ множина $\{n\in\mathbb{N}\mid\tau_n<\tau+\delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau+\delta<\tau^*$. Тоді існує така підпослідовність $\{\tau_{n_k},n_k\geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n,n\geq 1\}$, що $\tau_{n_k}<\tau+\delta$.

Виберемо момент часу t_0 такий, що $t_0\in(\tau+\delta,\tau^*)$; тоді $y_{n_k}(t_0)=x_{n_k}(\tau_{n_k})\in\partial D$.

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0,T]$ маємо, що для будь-якого $\epsilon>0$ існує таке $N\in\mathbb{N}$, що для будь-якого $n_k\geq N$ виконується нерівність

$$\mid y^*(t)-y_{n_k}(t)\mid<\epsilon.$$

Але якщо вибрати $0<\epsilon<\inf_{v\in\partial D}\mid y^*(t_0)-v\mid$, тоді для фіксованого $t_0\in(\tau+\delta,\tau^*)$
$\mid y^*(t_0)-y_{n_k}(t)\mid=\mid y^*(t_0)-x_{n_k}(\tau_{n_k})\mid>\epsilon$.

Ми отримали протиріччя.
2) Нехай $\tau^*=\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tau_n<\infty$, тоді якщо обрати довільне $T_2\in[0,\infty)$ таке, що $T_2>\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tau_n$. Повторюючи роздуми попереднього випадку отримаємо протиріччя з рівномірною збіжністю $y_n(t)\rightrightarrows y^*(t)$ при $n\to\infty$ на $[0,T_2]$. Якщо $\tau^*=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tau_n=\infty$. Отже,

$$\tau^*\leq\lim_{n\to\infty}\inf\tau_n.$$

Покладемо $x^*(t)=y^*(t)$, при $t\in[0,\tau^*]$.

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), при $t\in[0,\tau^*]$, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Для будь-якого $t \in [0, \tau^*], y_n(y) = x_n(t)$ для досить великих n і, оскільки для будь-якого $t \in [0, T]$, $y_n(t) \to y^*(t)$, при $n \to \infty$ рівномірно, то $x_n(t) \to x^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки $x_n(t)$ – розв'язки системи (1), то маємо

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x_n(s))dt +$$
$$+ f_2(s, x_n(s))u_n(s)]ds = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x_n(s)) +$$
$$+ f_2(s, x_n(s))u^*(s)]ds + \int_0^t [f_2(s, x_n(s)) -$$
$$- f_2(s, x^*(s))](u_n(s) - u^*(s))ds +$$
$$+ \int_0^t f_2(s, x^*(s))[u_n(s) - u^*(s)]ds \leq$$
$$\leq x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(s)) + f_2(t, x_n(s))u^*(s)]ds +$$
$$+ (\int_0^t [f_2(t, x_n(s)) - f_2(t, x^*(s))]^q ds)^{1/q} *$$
$$* (\int_0^t (u_n(s) - u^*(s))^p ds)^{1/p} +$$
$$+ \int_0^t f_2(t, x^*(s))(u_n(s) - u^*(s))ds \leq x_0 +$$
$$+ \int_0^t [f_1(t, x_n(s)) + f_2(t, x_n(s))u^*(s)]ds +$$
$$+ (\int_0^t [K \mid x_n(s) - x^*(s) \mid]^q ds)^{1/q} (|| u_n(s) ||_p + ||$$
$$u^*(s) ||_p) + \int_0^t f_2(t, x^*(s))(u_n(s) - u^*(s))ds,$$
при $t \in [0, \tau^*]$

Останні два інтеграли прямують до нуля при $n \to \infty$. Це випливає із рівномірної збіжності послідовності розвязків $x_n(t)$ до $x^*(t)$ та слабкої збіжності послідовності керувань $u_n(t)$ до $u^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $t \in [0, T]$. Тому маємо

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x^*(s))dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]ds$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$

Отже, $x^*(t)$ - розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки момент часу T вибраний довільним чином, то маємо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$, при $t \geq 0$.

Неважко показати, використовуючи діагональний метод, що існує підпослідовність послідовності $\{x_n(t), n \geq 1\}$, що збігається поточково до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$. Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Розглянемо 2 випадки:

1)Нехай $x^*(\tau^*) \in \partial D$.

Оскільки $L(t, x, \cdot)$- опукла, то виконується нерівність

$$g(t)L(t, x^*(t), v(t)) \geq$$
$$\geq (g(t)L(t, x^*(t), u^*(t)) +$$
$$+ (v(t) - u^*(t))g(t)L_v(t, x^*(t), u^*(t)),$$
$$\forall v \in U, t \in [0, \tau^*]$$

Покладемо $v = u_n(t)$, тоді маємо оцінку

$$\int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u_n(t))dt \geq$$
$$\geq \int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u^*(t))dt +$$
$$+ \int_0^{\tau^*} (u_(t) - u^*(t))g(t)L_u(t, x^*(t), u^*(t))dt. \quad (6)$$

Другий інтеграл в нерівності (6) прямує до 0 при $n \to \infty$. Це випливає із слабкої збіжності послідовності $u_n(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\lim_{n_k \to \infty} \inf \int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u_n(t))dt \geq$$
$$\geq \int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u^*(t))dt.$$

Розглянемо також таку величину

$$| \int_0^{\tau^*} g(t)[L(t, x_n(t), u_n(t)) -$$
$$- L(t, x^*(t), u_n(t))]dt \mid .$$

Із поточкової збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t \geq 0$, умови (4) та теореми Лебега про мажоровану збіжність маємо, що дана величина прямує до 0, при $n \to \infty$.

$$\int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x_n(t), u_n(t))dt \pm$$
$$\pm \int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u_{n_k}(t))dt \pm$$
$$\pm \int_0^{\tau^*} g(t)L(t, x^*(t), u^*(t))dt =$$
$$= \int_0^{\tau^*} g(t)[L(t, x_n(t), u_n(t)) -$$

$- L(t,x^*(t),u_n(t))]dt +$

$\int\limits_0^{\tau^*} g(t)[L(t,x^*(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]dt +$

$+ \int\limits_0^{\tau^*} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))dt$

Перший інтеграл в правій частині нерівності прямує до 0 при $n \to \infty$, а другий інтеграл ≥ 0, отже маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \int\limits_0^{\tau^*} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))dt \geq$

$$\geq \int\limits_0^{\tau^*} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))dt.$$

Або
$$J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n(t)).$$

Оскільки
$$\inf_{u\in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n) = m,$$

то
$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

2) Нехай тепер $\tau^* = \infty$ і $x^*(t) \in D \setminus \partial D, t \geq 0$.

Спочатку покажемо, що функція $g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))$ інтегровна на $[0,\infty)$.

$\int\limits_0^{\infty} g(t) \mid L(t,x^*(t),u_n(t)) \mid dt \leq$

$\leq \int\limits_0^{\infty} g(t) \mid (L(t,x^*(t),u_n(t)) -$

$- L(t,x^*(t),u^*(t)) \mid dt +$

$+ \int\limits_0^{\infty} g(t) \mid L(t,x^*(t),u^*(t)) \mid dt \leq$

$\leq K \int\limits_0^{\infty} g(t) \mid u_n(t) - u^*(t) \mid dt +$

$+ \int\limits_0^{\infty} g(t) \mid L(t,x^*(t),u^*(t)) \mid dt \leq$

$\leq K(\int\limits_0^{\infty} g^q(t)dt)^{1/q}(\int\limits_0^{\infty} \mid u_n(t) - u^*(t) \mid^p dt)^{1/p} +$

$+ \int\limits_0^{\infty} g(t) \mid L(t,x^*(t),u^*(t)) \mid dt < \infty$

Отже, функція $L(t,x^*(t),u_n(t))$ - інтегровна на $[0,\infty)$.

Оскільки $L(t,x,\cdot)$- опукла, то виконується нерівність

$g(t)L(t,x^*(t),v(t))(t) \geq$
$\geq g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))(t) +$
$+ (v(t) - u^*(t))g(t)L_v(t,x^*(t),u^*(t))(t),$
$\forall v(t) \in V, t \in [0,\infty)$

Покладемо $v(t) = u_n(t)$, тоді

$\int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))dt \geq$

$\geq \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))dt +$

$+ \int\limits_0^{\infty} (u_n(t) - u^*(t))g(t)L_u(t,x^*(t),u^*(t))dt. \quad (7)$

А тому другий інтеграл в нерівності (7) прямує до 0 при $n \to \infty$, в силу слабкої збіжності $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))\chi_R(t)\,dt \geq$

$\geq \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\chi_R(t)\,dt.$

Оскільки $\lim\limits_{n_k\to\infty} \inf \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))dt \geq$

$\geq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))\chi_R(t)dt$ та $L(t,x,u) \geq 0, \chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \to 1$ при $R \to \infty$, то в силу теореми Лебега, маємо $\lim\limits_{n_k\to\infty} \inf \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))\,dt \geq$

$$\geq \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt. \quad (8)$$

Розглянемо також величину

$$\mid \int\limits_0^{\infty} g(t)[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))]dt \mid \quad (9)$$

Із поточкової збіжності $x_n(t)$ до $x^*(t)$, при $t \geq 0$, умови (4) та теореми Лебега про мажоровану збіжність маємо, що дана величина прямує до 0 при $n \to \infty$. $J(u_n) =$

$\int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))dt =$

$= \int\limits_0^{\infty} g(t)[L(t,x_n(t),u_n(t)) -$

$- L(t,x^*(t),u_n(t))]\,dt +$

$\int\limits_0^{\infty} g(t)[L(t,x^*(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]dt +$

$+ \int\limits_0^{\infty} g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt.$

Використовуючи (8) та (9) з останьої рівності отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \inf J(u_n(t)) \geq J(u^*).$$

Оскільки

$$\inf_{u\in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n) = m,$$

то

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ - оптимальне керування.

Теорема доведена.

Приклад. Нехай задача оптимального керування (1), (2) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = x\sin^2 tx + e^{-t}x^2u(t), \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{10}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\tau e^{-3t}(x^6 + 2u^6)\,dt \to \inf, \tag{11}$$

де $\mid x \mid < 2$, $t \in [0, \infty)$, $u \in U$, U- довільна опукла, обмежена, замкнена множина, що містить 0.

Неважко перевірити, що задача (10), (11) задовольняє всі умови теореми при $K = 4, L = 4$. Отже, задача (10), (11) має розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solution. // Springer.— 2005.— C.448.

2. *У. Флеминг, Р. Ришел.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. // М.: Мир. – 1978.

3. *Э.Б.Ли, Л.Маркус.*Основы теории оптимального управления. – М.: Наука. – 1972.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир. – 1967. – 624 с.

5. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление: Линейная теория и приложения. М.: Макс Пресс. – 2007.

6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах оптимального управления. // Плотников В. А. – Киев, Одесса: Лыбедь, 1992. – 188 с.

7. *Плотников В. А.* Дифференциальние уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. // Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.

8.*Станжицкий А. Н.*Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения. // А. Н. Станжицкий Т. В. Добродзий Дифференц. уравнения. – 2011. – Т.47. – N 2. – С. 264–277.