УДК 517.95

©2012 р. М.І. Сєров, М.М. Сєрова, І.В. Рассоха

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

З точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено вигляд нелінійних систем реакції-конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея. Для одержаних систем досліджено можливості розширення алгебри Галілея операторами масштабних та проективних перетворень.

The appearance of a Galilean algebra and it's extensions, in respect to which the system of nonlinear reaction-convection-diffusion equations can be invariant, is investigated. The kind of nonlinearities, with which this system is invariant in respect to that algebra is determined to within continuous equivalence transformations.

При описі різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді систем диференціальних рівнянь. Більшість таких систем, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому вони утворюють певні класи систем диференціальних рівнянь. Актуальною є задача відбору з деякого класу систем тих, які найбільш точно описують процеси, що досліджуються. Оскільки більшість основних фізичних процесів задовольняють принцип відносності Галілея чи Пуанкаре–Енштейна, то і рівняння, які їх описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень, наявність широкої симетрії рівняння може служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим актуальною є задача: по заданій групі перетворень побудувати математичну модель (систему рівнянь), що володіє зазначеною симетрією.

В даній роботі нами розв'язано таку задачу для системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U), \qquad (1)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $H\ (U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix}$,

$F(U) = \begin{pmatrix} f^{11}(U) & f^{12}(U) \\ f^{21}(U) & f^{22}(U) \end{pmatrix}$,

$G(U) = \begin{pmatrix} g^{11}(U) & g^{12}(U) \\ g^{21}(U) & g^{22}(U) \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції, $U_0 = \frac{\partial U}{\partial x_0}$, $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, x_0 — часова, x_1 — просторова змінні.

В класі систем (1) містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури та густини у термоядерній плазмі, інші фізичні та біохімічні процеси. Але симетрійні властивості цієї системи залишаються не дослідженими в повній мірі. Повну групову класифікацію нелінійних систем класу (1) досі не проведено.

Дослідженню симетрійних властивостей такого класу систем приділяло увагу багато авторів. При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ та $G = 0$ одержали вагомі результати В.І. Фущич та Р.М. Черніга [9]-[11], А.Г. Нікітін [22]-[25], А.Г. Нікітін та Р. Вілтшир [26], [27], Р.М. Черніга та Дж. Кінг [13]–[16]. При $F = E, H = 0$ симетрійні властивості системи (1) вивчались в роботах [1], [6], [17] а при довільних матрицях F і H та $G = 0$ галілеївська інваріантність системи (1) досліджена в роботі [5].

Добре відомо, що лінійна система рівнянь дифузії

$$U_0 = \Lambda U_{11}, \qquad (2)$$

де Λ–стала матриця, інваріантна відносно алгебри Галілея з базисними генераторами

$$\begin{array}{l} AG(1,1) =< \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1, Q_1, >, \end{array} \quad (3)$$

та її розширень операторами масштабних

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3 \quad (4)$$

та проективних перетворень

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \frac{x_1^2}{2}Q_1 + x_0Q_3, \quad (5)$$

де $Q_c = \eta^{cb}(u)\partial_{u^b}$, $\eta^{ab}(u)$ – деякі задані функції, які залежать від вигляду матриці Λ.

Комутаційні співвідношення між операторами (3)–(5) мають вигляд

$$\begin{array}{lll} [\partial_0, \partial_1] = 0, & [\partial_0, G] = \partial_1, & [\partial_0, Q_1] = 0, \\ [\partial_1, G] = Q_1, & [\partial_1, Q_1] = 0, & [G, Q_1] = 0. \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{l} [\partial_0, D] = 2\partial_0, [\partial_1, D] = \partial_1, \\ [G, D] = -G, [Q_1, D] = 0. \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{l} [\partial_0, \Pi] = D, [\partial_1, \Pi] = G, \\ [G, \Pi] = 0, [Q_1, \Pi] = 0, [D, \Pi] = 2\Pi. \end{array} \quad (8)$$

Алгебра $AG_2(1,1)$ операторів (3)–(5) є одновимірною проекцією багатовимірної алгебри $AG_2(1,n)$:

$$\begin{array}{l} \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \\ G_a = x_0\partial_a + x_aQ_1, Q_1, \end{array} \quad (9)$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + Q_3 \quad (10)$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \frac{\overrightarrow{x}^2}{2}Q_1 + x_0Q_3. \quad (11)$$

В свій час В.І. Фущич запропонував алгебру операторів (9) назвати алгеброю Галілея і позначати AG(1,n), алгебру (9), (10) — розширеною алгеброю Галілея $AG_1(1,n)$, алгебру (9), (10), (11) — узагальненою алгеброю Галілея $AG_2(1,n)$. Це пов'язано з тим, що оператори G_a породжують перетворення Галілея часової та просторових змінних

$$x_0^{'} = x_0, x_a^{'} = x_a + v_ax_0, v_a - const. \quad (12)$$

З алгебраїчної точки зору алгебру визначають не перетворення, які вона породжує, а комутаційні співвідношення між базисними генераторами даної алгебри.

Комутаційні співвідношення між операторами алгебри (3) мають вигляд (6).

Таким чином, алгеброю Галілея $AG(1,1)$ будемо називати одну з реалізацій чотиривимірної лінійної алгебри диференціальних операторів 1-го порядку $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$, для якої виконуються наступні комутаційні співвідношення:

$$\begin{array}{l} [X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_3] = X_4, [X_3, X_4] = 0, [X_2, X_4] = 0. \end{array} \quad (13)$$

Поставимо задачу: дослідити , при яких нелінійностях f^{ab}, g^{ab}, h^a система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень. При цьому алгеброю Галілея $AG(1,1)$ будемо називати одну з реалізацій чотиривимірної лінійної алгебри диференціальних операторів, для якої виконуються комутаційні співвідношення (13).

Основна група перетворень еквівалентності

Важливе значення при дослідженні симетрійних властивостей відіграють перетворення еквівалентності. Вони дозволяють поділити клас систем на нееквівалентні підкласи. Виділивши в кожному підкласі канонічний представник, достатньо дослідити тільки його симетрійні властивості, а потім поширити одержані результати на всі системи даного підкласу.

Дослідимо групу неперервних перетворень еквівалентності системи рівнянь (1), застосувавши метод, запропонований в роботах [3], [12].

Лема 1. *Групою неперервних перетворень еквівалентності системи (1) є група, координати інфінітезімального оператора*

$$\begin{array}{l} E = \xi^\mu(x_0, x_1, U)\partial_\mu + \eta^a(x_0, x_1, U)\partial_{u^a} + \\ +\zeta^{ab}(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{f^{ab}} + \\ +\sigma^{ab}(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{g^{ab}} + \\ +\chi^a(x_0, x_1, U, F, G, H)\partial_{h^a} \end{array} \quad (14)$$

якої задаються формулами

$$\xi^0 = æ_0x_0 + d_0, \xi^1 = æ_1x_1 + gx_0 + d_1, \quad (15)$$

$$\eta^a = \alpha_{ab}u^b + \beta_a, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\zeta^{ab} = (2æ_1 - æ_0)f^{ab} + \alpha_{ac}f^{cb} - \alpha_{cb}f^{ac},\\ &\sigma^{ab} = (æ_1 - æ_0)g^{ab} + \alpha_{ac}g^{cb} -\\ &-\alpha_{cb}g^{ac} + \delta_{ab}g,\\ &\chi^a = -æ_0 h^a + \alpha_{ab}h^b, \end{aligned} \tag{17}$$

де $æ_\mu, d_\mu, g, \alpha_{ab}, \beta_a$ *— групові параметри,* $\mu =$
$= 0; 1, a, b, c = 1; 2.$

Зауважимо, що всі подальші міркування проведено з точністю до перетворень еквівалентності

$$\begin{aligned} &x_0^{'} = a_0x_0 + b_0, x_1^{'} = a_1x_1 + cx_0 + b_1,\\ &u^{a'} = \gamma_{ab}u^b + \delta_a, \end{aligned} \tag{18}$$

де $a_\mu, b_\mu, c, \gamma_{ab}, \delta_a$ — довільні сталі, $\mu\epsilon\{0,1\}$, $a, b\epsilon\{1,2\}$, які випливають з формул (15), (16).

Основна алгебра інваріантності. Система визначальних рівнянь.

Означення 1. *Основною алгеброю інваріантності системи (1) назвемо алгебру, відносно якої дана система інваріантна при довільних нелінійностях F, G, H.*

Теорема 1 *Основною алгеброю інваріантності системи (1) є алгебра*

$$A_0 =< \partial_0, \partial_1 > . \tag{19}$$

Доведення теореми проводимо на основі алгоритму Лі (див., наприклад, [4]). При цьому одержимо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора та функцій f^{ab}, g^{ab}, h^a:

$$\begin{aligned} &\eta^c f^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)f^{ab} + \eta^c_{u^b}f^{ac} - \eta^a_{u^c}f^{cb} = 0,\\ &\eta^c g^{ab}_{u^c} + (\xi^0_0 - \xi^1_1)g^{ab} + \eta^c_{u^b}g^{ac} - \eta^a_{u^c}g^{cb} +\\ &+\eta^c_1(f^{ab}_{u^c} + f^{ac}_{u^b}) + 2\eta^c_{1u^b}f^{ac} - \xi^1_{11}f^{ab} + \delta_{ab}\xi^1_0 = 0,\\ &\eta^c h^a_{u^c} + \xi^0_0 h^a - \eta^a_{u^c}h^c + \eta^b_{11}f^{ab} + \eta^b_1 g^{ab} - \eta^a_0 = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \xi^0_1 = 0, \tag{21}$$

$$f^{db}\eta^a_{u^c u^d} + f^{dc}\eta^a_{u^b u^d} = 0. \tag{22}$$

Якщо систему (20)–(22) розщепити по довільних функціях f^{ab} та їх похідних, то одержимо, що

$$\xi^0 = d_0, \xi^1 = d_1, \eta = 0. \tag{23}$$

Інфінітезимальниий оператор з координатами (23) породжує алгебру (19).

Зображення алгебри Галілея. Інваріантність системи (1) відносно алгебри Галілея.

Знайдемо зображення алгебри Галілея (13), відносно якої може бути інваріантна система (1).

Система (22) є лінійною однорідною алгебраїчною системою рівнянь відносно $\eta^a_{u^b u^c}$. Головний визначник даної системи має вигляд

$$\Delta = (f^{11} + f^{22})(f^{11}f^{22} - f^{12}f^{21}). \tag{24}$$

Оскільки матриця F складається з коефіцієнтів дифузії, то визначник (24) відмінний від нуля. Це означає, що система (22) має лише тривіальний розв'язок

$$\eta^a_{u^b u^c} = 0. \tag{25}$$

Таким чином, враховуючи рівняння (21), (25), приходимо до висновку, що найбільш загальний вигляд операторів інваріантності системи (1) наступний

$$\begin{aligned} &X_i = A^i(x_0)\partial_0 + B^i(x_0, x_1)\partial_1 +\\ &+[\alpha^{iab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{ia}(x_0, x_1)]\partial_{u^a} \end{aligned} \tag{26}$$

де $A^i, B^i, \alpha^{iab}, \beta^{ia}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів, $i = \overline{1,4}$, $a, b = \overline{1,2}$.

Так як система (1) інваріантна відносно алгебри A_0, то в якості двох операторів алгебри $AG(1,1)$ візьмемо оператори ∂_0, ∂_1.

Оскільки $[\partial_0, \partial_1] = 0$, то з умов (13) випливають наступні можливості:

а) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_2)$, б) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_4)$,

в) $(\partial_0, \partial_1) = (X_3, X_4)$, г) $(\partial_0, \partial_1) = (X_2, X_4)$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

а) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_2)$. В ролі операторів X_3, X_4 візьмемо довільні оператори вигляду (26).

$$\begin{aligned} &X_3 = A^3(x_0)\partial_0 + B^3(x_0, x_1)\partial_1 +\\ &+[\alpha^{3ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{3a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a},\\ &X_4 = A^4(x_0)\partial_0 + B^4(x_0, x_1)\partial_1 +\\ &+[\alpha^{4ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{4a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \end{aligned} \tag{27}$$

де $A^3, A^4, B^3, B^4, \alpha^{3ab}, \alpha^{4ab}, \beta^{3a}\beta^{4a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів, які підлягають визначенню за формулами (13).

З комутаційних умов $[X_1, X_4] = 0$ та $[X_2, X_4] = 0$ одержуємо, що

$$A^4 = c_1, B^4 = c_2, \alpha^{4ab} = \alpha^1_{ab}, \beta^{4a} = \beta^1_a, \tag{28}$$

де $c_1, c_2, \alpha^1_{ab}, \beta^1_a$ — довільні сталі. Так як лінійна комбінація операторів алгебри є також оператором з даної алгебри, то, не втрачаючи довільності, можна вважати, що $c_1 = c_2 = 0$.

Отже,

$$X_4 = Q_1 = (\alpha^1_{ab}u^b + \beta^1_a)\partial_{u^a}. \tag{29}$$

З комутаційних співвідношень $[X_1, X_3] = X_2$ і $[X_2, X_3] = X_4$ маємо

$$\begin{array}{l} A^3 = c_3, B^3 = x_0 + c_4, \\ \alpha^{3ab} = \alpha^1_{ab}x_1 + \alpha^2_{ab}, \beta^{3a} = \beta^1_a x_1 + \beta^2_a, \end{array} \tag{30}$$

де $c_3, c_4, \alpha^2_{ab}, \beta^2_a$ — довільні сталі. Аналогічно, як і у випадку оператора X_4, не втрачаючи загальності, можна вважати $c_3 = c_4 = 0$. Отже,

$$X_3 = x_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, \tag{31}$$

де

$$Q_2 = (\alpha^2_{ab}u^b + \beta^2_a)\partial_{u^a}. \tag{32}$$

Із умови $[X_3, X_4] = 0$ маємо

$$[Q_1, Q_2] = 0. \tag{33}$$

В результаті одержуємо, що алгебра $AG(1,1)$ має реалізацію

$$\begin{array}{l} AG(1,1) =< \partial_0, \partial_1, \\ G = x\partial_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, Q_1 >, \end{array} \tag{34}$$

де оператори Q_1 і Q_2 задаються формулами (29), (32) та зодовольняють умову (33).

Розглянемо випадок б) $(\partial_0, \partial_1) = (X_1, X_4)$.

Аналогічно, як і у випадку а), в якості X_2, X_3 візьмемо наступні оператори

$$\begin{array}{l} X_2 = A^2(x_0)\partial_0 + B^2(x_0, x_1)\partial_1 + \\ +[\alpha^{2ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{2a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \\ X_3 = C^3(x_0)\partial_0 + D^3(x_0, x_1)\partial_1 + \\ +[\gamma^{3ab}(x_0, x_1)u^b + \sigma^{3a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \end{array} \tag{35}$$

де $A^2, B^2, C^3, D^3, \alpha^{2ab}, \beta^{2a}, \gamma^{3ab}, \sigma^{3a}$ — довільні функції відповідних аргументів, які підлягають уточненню за формулами (13). З умов $[X_1, X_2] = 0$ та $[X_2, X_4] = 0$ аналогічно, як і у випадку а), одержуємо

$$A^2 = B^2 = 0, \alpha^{2ab} = \alpha^1_{ab}, \beta^{2a} = \beta^1_a, \tag{36}$$

де α^1_{ab}, β^1_a - довільні сталі. Отже,

$$X_2 = Q_1 = (\alpha^1_{ab}u^b + \beta^1_a)\partial_{u^a}. \tag{37}$$

З комутаційних співвідношень $[X_1, X_3] = X_2, [X_4, X_3] = 0$ знаходимо

$$C^3 = D^3 = 0, \gamma^{3ab} = x_0\alpha^1_{ab} + \gamma^2_{ab}, \beta^{3a} = x_0\beta^1_a + \beta^2_a, \tag{38}$$

де γ^2_{ab}, β^2_a — довільні сталі. Отже,

$$X_3 = x_0Q_1 + Q_2, \tag{39}$$

де

$$Q_2 = (\gamma^2_{ab}u^b + \beta^2_a)\partial_{u^a}. \tag{40}$$

З комутаційних співвідношень $[X_2, X_3] = X_4$ одержуємо

$$[Q_1, Q_2] = \partial_1,$$

що є неможливим.

Аналогічно доводиться, що випадки в) і г) також неможливі.

Зауважимо, що реалізація алгебри (13) вигляду (34) одержана і в роботі [28], де з точністю до довільних локальних перетворень встановлені нееквівалентні реалізації алгебр розмірності до 4-х включно.

У роботі [1] встановлено, що існує 6 різних зображень оператора Q_1 вигляду (29), нееквівалентних відносно перетворень (18). А в роботі [6] показано, що з врахуванням (33) і з точністю до перетворень еквівалентності (18) можливі наступні нееквівалентні набори операторів Q_1, Q_2:

$$Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = k_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}, \tag{41}$$

$$\begin{array}{l} Q_1 = k_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, \\ Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \end{array} \tag{42}$$

$$\begin{array}{l} Q_1 = k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \\ Q_2 = k_2\partial_{u^2}, \end{array} \tag{43}$$

$$\begin{array}{l} Q_1 = k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, \\ Q_2 = k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}, \end{array} \tag{44}$$

$$Q_1 = k_1 I + m_1 u^2 \partial_{u^1},\quad Q_2 = k_2 I + m_2 u^2 \partial_{u^1}, \tag{45}$$

$$Q_1 = k_1 I + k_2 J,\quad Q_2 = m_1 I + m_2 J, \tag{46}$$

де $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, J = u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2}$, k_1, k_2, m_1, m_2 — довільні сталі, такі, щоб не було перетину між випадками (41)-(46).

Таким чином, єдино можливою реалізацією алгебри $AG(1,1)$ для системи (1) є алгебра (34), де опреатори Q_1, Q_2 мають вигляд одного з шести вище наведених випадків.

Нами знайдено 13 нееквівалентних відносно перетворень (18) виглядів нелінійностей F, G, H, при яких система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея (34), які ми не наводимо в силу їх громіздкості.

Зображення розширеної алгебри Галілея. Інваріантність системи (1) відносно розширеної алгебри Галілея.

Розширимо алгебру Галілея (13) оператором масштабних перетворень X_5, для якого виконуються наступні комутаційні співвідношення

$$[X_1, X_5] = 2X_1, [X_2, X_5] = X_2,\quad [X_3, X_5] = -X_3, [X_4, X_5] = 0. \tag{47}$$

Встановимо зображення розширеної алгебри Галілея вигляду (47), відносно якої може бути інваріантна система (1).

Згідно (26) маємо загальний вигляд оператора масштабних перетворень

$$X_5 = A^5(x_0)\partial_0 + B^5(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{5ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{5a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{48}$$

де $A^5, B^5, \alpha^{5ab}, \beta^{5a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів, які підлягають визначенню за допомогою формул (47).

З комутаційних умов $[X_1, X_5] = 2X_1$ та $[X_2, X_5] = X_2$ одержуємо, що

$$A^5 = 2x_0, B^4 = x_1,\quad \alpha^{5ab} = \alpha^5_{ab}, \beta^{5a} = \beta^5_a, \tag{49}$$

де α^5_{ab}, β^5_a — довільні сталі.

Отже,

$$X_5 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \tag{50}$$

де $Q_3 = (\alpha^5_{ab}u^b + \beta^5_a)\partial_{u^a}$.

З комутаційних співвідношень $[X_3, X_5] = -X_3$ та $[X_4, X_5] = 0$ маємо

$$[Q_1, Q_3] = 0, [Q_2, Q_3] = -Q_2. \tag{51}$$

Оператор X_5 позначимо D.

Таким чином, розширена алгебра Галілея для системи (1) має вигляд

$$AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1 + Q_2, Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3 \rangle, \tag{52}$$

де оператори Q_1, Q_2, Q_3 задовольняють умови (33), (51). У роботі [6] показано, що з точністю до перетворень еквівалентності (18) існує десять нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2, Q_3, для яких виконуються умови (51).

Нами знайдено 8 нееквівалентних відносно перетворень (18) виглядів системи (1), при яких вона інваріантна відносно алгебри (52), але, як і у випадку інваріантності відносно алгебри Галілея, в силу громіздкості одержаних систем ми їх не наводимо.

Зображення узагальненої алгебри Галілея. Інваріантність системи (1) відносно узагальненої алгебри Галілея.

Розширимо алгебру Галілея (52) проективним оператором, для якого виконуються наступні комутаційні співвідношення

$$[X_1, X_6] = X_5, [X_2, X_6] = X_3, [X_3, X_6] = 0,\quad [X_4, X_6] = 0, [X_5, X_6] = 2X_6. \tag{53}$$

Одержану алгебру назвемо узагальненою алгеброю Галілея, а оператор X_6 — проективним оператором і позначимо його П.

Встановимо зображення узагальненої алгебри Галілея, відносно якої може бути інваріантна система (1).

Згідно (26) загальний вигляд проективного оператора є наступним

$$X_6 = A^6(x_0)\partial_0 + B^6(x_0, x_1)\partial_1 + [\alpha^{6ab}(x_0, x_1)u^b + \beta^{6a}(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{54}$$

де $A^6, B^6, \alpha^{6ab}, \beta^{6a}$ — довільні гладкі функції відповідних аргументів.

З комутаційних умов $[X_1, X_6] = X_5$ та $[X_2, X_6] = X_3$ одержуємо, що

$$X_6 = \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + \\ +x_1Q_2 + \tfrac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4, \tag{55}$$

де $Q_4 = \alpha^4_{ab}u^b + \beta^4_a$, причому α^4_{ab}, β^4_a — довільні сталі.

З інших комутаційних співвідношень (53) маємо

$$[Q_1, Q_4] = 0, [Q_2, Q_4] = 0, [Q_3, Q_4] = 2Q_4. \tag{56}$$

Таким чином, узагальнена алгебра Галілея для системи (1) має вигляд

$$AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, \\ Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + \\ +x_1Q_2 + \tfrac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4\rangle, \tag{57}$$

де оператори Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 задовольняють умови (33), (51), (56).

Знайдемо вигляд нелінійностей F, G, H, при яких система (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея. В роботі [6] показано, що з точністю до перетворень еквівалентності (18) існує шістнадцять нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, для яких виконуються комутаційні співвідношення (33), (51), (56).

Для кожної системи, інваріантної відносно розширеної алгебри Галілея, за виглядом операторів Галілея та ділатації встановимо зображення проективного оператора (див. [6]). Одержані результати можна подати у вигляді наступної теореми.

Теорема 2. *Система рівнянь (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (57) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності (18) має один з наступних виглядів:*

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +\begin{pmatrix} -u^2 & m_{12} \\ 0 & -u^2 \end{pmatrix} U_1 + \tfrac{1}{2}(u^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^2}$, $Q_3 = (\lambda_{11} + m_{12})\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$, $Q_4 = 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\frac{u^1}{u^2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +\begin{pmatrix} m_{11}u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & 0 \end{pmatrix} U_1 + (u^1)^2 \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + +\frac{1}{2}u^2\partial_{u^2}$, $Q_4 = 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +\begin{pmatrix} -u^1 & 0 \\ m_{21}u^2 & -(2\lambda_{22}+1)u^1 \end{pmatrix} U_1 + \\ +(u^1)^2u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{22} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{60}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}, Q_2 = \partial_{u^1}$, $Q_3 = -u^1\partial_{u^1} + +(\lambda_{22} + m_{21})u^2\partial_{u^2}$, $Q_4 = 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m_1} \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +\omega^2 \begin{pmatrix} -m_1m_{11} & m_{11}\frac{u^1}{u^2} \\ -m_1m_{12}\frac{u^2}{u^1} & m_{12} \end{pmatrix} U_1 + \\ +\omega^4 \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}, Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}(I + m_1u^2\partial_{u^2})$, $Q_4 = 0$, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^{m_1}}$, $m_1 \neq 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +\tfrac{u^2}{u^1} \begin{pmatrix} n_1u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

причому $Q_1 = I$, $Q_2 = 0$, $Q_4 = \frac{1}{n_1 - n_2}u^1\partial_{u^2}$, $Q_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) I - 2u^2\partial_{u^2}$, $n_1 \neq n_2$;

$$U_0 = \partial_1\left[-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1\right] + \\ +e^{-2\omega} \begin{pmatrix} m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2} & -(\frac{u^1}{u^2}+1)(m_{11} + m_{21}\frac{u^1}{u^2}) \\ m_{21} & -(\frac{u^1}{u^2}+1)m_{21} \end{pmatrix} U_1 + \\ +e^{-4\omega} \begin{pmatrix} n_1u^2 + n_2u^1 \\ n_2u^2 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

причому $Q_1 = I + u^2\partial_{u^1}$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = -\frac{1}{2}I$, $Q_4 = 0$, $\omega = \frac{u^1}{u^2} - \ln u^2$;

$$
\begin{aligned}
U_0 = \partial_1 &\left[-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} U_1\right] + \\
+e^{\frac{1}{k_2}\omega} &\begin{pmatrix} 2k_1\overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_1\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \\ 2k_2\overrightarrow{k}\overrightarrow{m} - \frac{2u^2}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} & 2k_2\overrightarrow{k}^{\perp}\overrightarrow{m} + \frac{2u^1}{\overrightarrow{u}^2}\overrightarrow{m}\overrightarrow{u} \end{pmatrix} U_1 + \\
+e^{\frac{2}{k_2}\omega} &\begin{pmatrix} \overrightarrow{n}\overrightarrow{u} \\ -\overrightarrow{n}\overrightarrow{u}^{\perp} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{64}
$$

причому $Q_1 = k_1 I - k_2 J$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = -\frac{1}{2}I$, $Q_4 = 0$, $\omega = k_2 \ln \overrightarrow{u}^2 + 2k_1 arctg\frac{u^2}{u^1}$, $\overrightarrow{u}^{\perp} = (-u^2, u^1)$, $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$, $|\overrightarrow{k}| = 1$, $k_2 \neq 0$.

У формулах (58)–(64) λ_{ab}, m_{ab}, m_a, k_a, n_a — довільні сталі, $a, b\epsilon\{1;2\}$.

Зауваження. Частинним випадком системи (59) є система рівнянь хемотаксису, яка описує формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії. Її симетрійні властивості вивчені в роботі [7].

Якщо у системі (64) перейти до функції комплексної змінної, то одержимо узагальнення рівняння Гінзбурга-Ландау

$$
\begin{aligned}
\psi_0 = &-\tfrac{k}{2}\psi_{11} + [\tfrac{m^*}{2}(2k_1 k\psi^*\psi_1 - \\
&-(|\overrightarrow{\psi}|^2)_1) + n^*|\overrightarrow{\psi}|^4 e^{2w}]e^{2w}\psi,
\end{aligned}
\tag{65}
$$

де $\psi = u^1 + iu^2$, $k, m, n\epsilon C$, , яке є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаоса і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічний кінетиці [2], [18] Симетрійні властивості рівняння Гінзбурга-Ландау без деривативного члена вивчались А.Г. Нікітіним в роботі [23].

При $k_1 = 0$ з рівняння (65) можна одержати узагальнення рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю

$$
i\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_{11} + [\alpha(|\psi|^2)_1 + \beta|\psi|^4]\psi, \tag{66}
$$

де $\alpha, \beta\epsilon C$.

Рівняння (66) належить до класу рівнянь

$$
\begin{aligned}
i\psi_0 = &-\tfrac{1}{2}\psi_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2|\psi|^2 + \lambda_3|\psi|^4 + \\
&+\lambda_4\partial_1|\psi|^2)\psi + (\lambda_5 + \lambda_6|\psi|^2)\partial_1\psi,
\end{aligned}
\tag{67}
$$

які використовуються для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики, таких як нелінійна оптика. Зокрема, воно описує альвеновські хвилі з круговою поляризацією — магнітогідродінамічні хвилі, що розповсюджуються в плазмі в магнітному полі [19–21] хвилі Стокса у рідині скінченної глибини та ін.

Серед одержаних нами систем, як частинні випадки, містяться також нелінійна система рівнянь конвекції-дифузії, симетрійні властивості якої були вивчені в роботі [6], системи рівнянь реакції-дифузії, що досліджувались у роботах Р.М. Черніги та Дж. Кінга [13]–[16], А.Г. Нікітіна [22]–[25], А.Г. Нікітіна та Р. Вітлшира [26], [27].

Поряд з цим встановлено систему (58), яка не може бути одержана із узагальнення раніше відомих систем, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Висновки

Отже, в даній роботі з точністю до перетворень еквівалентності (18) встановлено вигляд систем класу (1), які володіють симетрійними властивостями, характерними для рівнянь, що описують процеси, підпорядковані принципу відносності Галілея. Серед них, як частинні випадки, містяться рівняння Шредінгера, Гінзбурга-Ландау, система рівнянь хемотаксису та інші. Одержані системи, в силу своїх симетрійних властивостей, можуть бути використані при моделюванні реальних фізичних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Глеба А.В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь: дис.. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03.— К., 2003.— 120 с.

2. *Кудряшов Н.А.* Точные решения обобщенного уравнения Гинзбурга- Ландау // Математическое моделирование.— 1989.— Т.1.— С.151—158.

3. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування.— 2002.— Т. 45.— 359 с.

4. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 125.— С.492—495.

5. *Омелян О.М.* Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії // Тр. Ин-та ИПММ НАН Украины. Донецк.— 2009.— Т. 1.— С.138—147.

6. *Сєров М.І., Жадан Т.О., Блажко Л.М.* Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // УМЖ.— 2006.— Т. 58, № 8.— С.1128—1145.

7. *Сєров М.І., Омелян О.М.* Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису // Український математичний вісник.— 2008.— Т. 5, № 4.— С.536—562.

8. *Фущич В.И.,* Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения в частных производных // Тез. докл. Всесоюзн. конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики 12-15 сентября 1989г.— Тернополь.— 1989.— Ч. II.— С.444—452.

9. *Фущич В.И., Чернига Р.М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 10.— С.1349—1357.

10.*Фущич В.И., Чернига Р.М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 12.— С.1687—1694.

11. *Фущич В.И., Чернига Р.М.* О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа // Препринт № 86.85, Ин-т математики АН УССР.— 1986.— 44 с.

12. *Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.,* Nonlocal symmetries. Heuristic approach // J. Sov. Math.— 55 (1991).— P.1401—1450.

13.*Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys.— 2000.— A 33. — P.267—282.

14. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys.— 2000.— A 33.— P.7839—7841.

15. *Cherniha R.M., King J.R.* Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II // J. Phys. A: Math.Gen.— 2003.— **36**.— P.405—425.

16. *Cherniha R.M., King J.R.* Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions // Math. Anal. Appl.— 2005.— **308**.— P.11—35.

17. *Cherniha R.M., Serov M.I.* Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions // J. Math. Anal. Appl.— **282 (2003)**.— P.305—328.

18. *Deissler R., Brand R.* Effect of Nonlinear Gradient Terms on Breathing Localizet Solutions Quintic Complex Ginzburg-Landau Equations // Phisical review letters.— Vol. 81, № 18.— P.3856—3859.

19. *Ivanauskas F., Radziunas M.* On convergence and stability of the explicit difference method for solution of nonlinear Schrödinger equations // SIAM J. Numer. Anal.— 1999. – 36(5).— P.1466—1481.

20. *Mio W., Ogino T., Minami K., Takeda S.* Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasmas // J. Phys. Soc. Japan.— 1976.— 41.— P.265–271.

21. *Meskauskas T., Ivanauskas F.* Initial Boundary-Value Problems for Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. Justification of Two-Step Algorithm // Nonlinear Analysis: Modelling and Control.— 2002.— Vol. 7, No. 2.— P.69—104.

22. *Nikitin A.G.* Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Ukrainian Marhematical Bulletin.— 2005.— Vol. 2, № 2.— P.153—204.

23. *Nikitin A.G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations // J. Math. Anal. and Appl. (JMAA).— 2006.— V. 324.— P.615—628.

24. *Nikitin A.G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Analysis and Applications (JMAA).— 2007.— Vol. 332, № 1.— P.666—690.

25. *Nikitin A.G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix // Ukrainian Mathematical Journal.— 2007.— Vol. 59, № 3.— P.395—411.

26. *Nikitin A.G., Wiltshire R.J.* Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics . Proc. of the Third Int. Conf.— Kiev, July 12-18.— 1999, Ed. A.M. Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine).— P.47—59.

27. *Nikitin A.G., Wiltshire R.J.* System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys.— 2001.— Vol. 42.— P.1666—1688.

28. *Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W.* Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys.— A 36. (2003). — no. 26.— 7337—7360 (see arXiv:math-ph/0301029v7).