УДК 517.988.6

©2012 р. **В.Ю. Слюсарчук**

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування розв'язків нелінійних функціональних рівнянь, що використовують лінійні наближення цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence solutions of nonlinear functional equations that use linear approach of these equations.

1. Постановка основної задачі. Нехай X і Y – банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно і $L(X,Y)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Позначимо через Y_1 підпростір простору Y (вважається, що $Y_1 \neq Y$).

Розглянемо рівняння

$$\mathcal{F}x = y, \tag{1}$$

де $\mathcal{F} : X \to Y$ – нелінійний неперервний обмежений оператор і $y \in Y$.

Це рівняння було об'єктом досліджень у багатьох работах (див., наприклад, [1]–[3]). Для (1) і застосувань важливі умови, що забезпечують виконання для множини значень $R(\mathcal{F})$ оператора $\mathcal{F}$ одного із співвідношень

$$R(\mathcal{F}) = Y \tag{2}$$

і

$$R(\mathcal{F}) = Y_1. \tag{3}$$

Мета статті – знаходження таких умов. Ця задача навіть у випадку лінійного оператора $\mathcal{F}$ – складна проблема (див., наприклад, [4]). Тому ми обмежимося розглядом тільки достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношень (2) і (3), які в деяких випадках і необхідні для виконання цих співвідношень.

2. Основні результати. Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх лінійних неперервних операторів $\mathcal{A} : X \to Y$, кожний з яких має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$. Через $\mathcal{E}_1$ позначимо множину всіх лінійних неперервних операторів $\mathcal{A} : X \to Y$, кожний з яких задовольняє умови:

1) $R(\mathcal{A}) = Y_1$;

2) ядро $\ker \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ має замкнений доповнювальний підпростір X_1 (підпростір X_1 залежить від оператора $\mathcal{A}$).

Звуження $\mathcal{A}|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ оператора $\mathcal{A}$ на підпростір X_1, якщо $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_1$, має неперервний обернений оператор $(\mathcal{A}|_{X_1})^{-1}$ (завдяки теоремі Банаха про обернений оператор [5] і замкненості X_1 і Y_1).

Нехай $B_Z[0,r]$, де $r \in (0,+\infty)$, – замкнена куля $\{z \in Z : \|z\|_Z \leqslant r\}$ у банаховому просторі Z.

Справджуються наступні два твердження.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H \geqslant 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, що*:

1) *$\mathcal{F} - \mathcal{A} : B_X[0,r] \to Y$ – цілком неперервне відображення*;

2) *виконується співвідношення*

$$\sup_{x \in B_X[0,r]} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_Y \leqslant \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H. \tag{4}$$

Тоді для кожного $y \in Y$ рівняння (1) *має хоча б один розв'язок $x \in X$.*

Теорема 2. *Нехай $R(\mathcal{F}) \subset Y_1$ і для кожного числа $H \geqslant 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_1$, що*:

1) *$\mathcal{F} - \mathcal{A} : B_X[0,r] \to Y_1$ – цілком неперервне відображення*;

2) *виконується співвідношення*

$$\sup_{x\in B_X[0,r]} \|\mathcal{F}x-\mathcal{A}x\|_Y \leqslant$$
$$\leqslant \frac{r}{\left\|(\mathcal{A}|_{X_1})^{-1}\right\|_{L(Y_1,X_1)}} - H. \qquad (5)$$

Тоді для кожного $y\in Y_1$ рівняння (1) *має хоча б один розв'язок $x\in X$.*

Очевидно, що оператор $\mathcal{A}$ у співвідношеннях (4) і (5) залежить від $\mathcal{F}$, H і r.

Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільний вектор $y\in Y$. На підставі умов теореми існують число $r>0$ і оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{E}$, для яких виконується співвідношення (4) при

$$H=\|y\|_Y. \qquad (6)$$

Розглянемо рівняння

$$x=\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x-\mathcal{F}x+y), \qquad (7)$$

що завдяки включенню $\mathcal{A}\in\mathcal{E}$ рівносильне рівнянню (1). Покажемо, що це рівняння має розв'язок, який належить кулі $B_X[0,r]$. Використаємо оператор $\mathfrak{A}: X\to X$, що визначається формулою

$$\mathfrak{A}x=\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x-\mathcal{F}x+y).$$

Цей оператор цілком неперервний на підставі першої умови теореми і неперервності $\mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{F}$. Також виконується співвідношення

$$\mathfrak{A}B_X[0,r]\subset B_X[0,r].$$

Справді, якщо $\|x\|_X\leqslant r$, то завдяки (4) і (1)

$$\|\mathfrak{A}x\|_X=\|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x-\mathcal{F}x+y)\|_X\leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}\left(\|\mathcal{A}x-\mathcal{F}x\|_Y+\|y\|_Y\right)\leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}\left(\frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}-H+\|y\|_Y\right)= $$
$$=r.$$

Тому на підставі теореми Шаудера про нерухому точку [3] оператор $\mathfrak{A}$ має нерухому точку $x^*\in B_X[0,r]$. Ця точка – розв'язок рівняння (7) і, отже, рівняння (1).

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Якщо для кожного невід'ємного числа H існують такі число $r>0$ і оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{E}_1$, що виконуються умови теореми, то тоді, очевидно, $\mathcal{F}-\mathcal{A}|_{X_1}: B_{X_1}[0,r]\to Y_1$ – цілком неперервне відображення і виконується співвідношення

$$\sup_{x\in B_{X_1}[0,r]} \|\mathcal{F}x-\mathcal{A}|_{X_1}x\|_{Y_1}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{r}{\left\|(\mathcal{A}|_{X_1})^{-1}\right\|_{L(Y_1,X_1)}}-H,$$

аналогічне співвідношенню (5). Тоді на підставі теореми 1 (у випадку, коли X і Y збігаються відповідно з X_1 і Y_1) для кожного $y\in Y_1$ рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x\in X_1$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Вимога про повну неперервність $\mathcal{F}-\mathcal{A}: B_X[0,r]\to Y$ і $\mathcal{F}-\mathcal{A}: B_X[0,r]\to Y_1$ у теоремах 1 і 2 є зайвою, якщо простори X і Y скінченновимірні.

Твердження, аналогічні теоремі 1, для нелінійних різницевих, диференціальних і диференціально-функціональних операторів доведені автором у [6]–[13]. У цих роботах разом з локальною лінійною апроксимацією нелінійних операторів також використовувалися властивості c-неперервних і c-цілком неперервних операторів.

3. Побудова операторів, до яких застосовна теорема 1. Множина нелінійних операторів, для яких за допомогою теореми 1 можна показати виконання співвідношення (2), є достатньо широким.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{A}\in\mathcal{E}$ и $\mathcal{K}_n: X\to Y$, $n\geqslant 1$, – довільні цілком неперервні лінійні оператори, для яких оператори*

$$\mathcal{A}_n=\mathcal{A}+\mathcal{K}_n,\quad n\geqslant 1,$$

мають неперервні обернені.

Тоді для довільної послідовності додатних чисел H_n, $n\geqslant 1$, для яких

$$\lim_{n\to\infty} H_n=+\infty,$$

існують такі неперервний обмежений оператор $\mathcal{F}: X\to Y$ і послідовність додатних чисел r_n, $n\geqslant 1$, що:

1) $\mathcal{F}-\mathcal{A}_n: B_X[0,r_n]\to Y$, $n\geqslant 1$, *– цілком неперервні відображення*;

2) *виконується співвідношення*

$$\sup_{\|x\|_X\leqslant r_n} \|\mathcal{F}x-\mathcal{A}_nx\|_Y\leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(X,Y)}} - H_n,\ n \geqslant 1. \qquad (8)$$

Доведення. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел r_n, $n \geqslant 1$, для якої $r_1 \geqslant 1$ і $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \geqslant 1$ (значення r_n уточнимо пізніше). Для кожного $n \geqslant 1$ визначимо відображення

$$\omega_{1,n} : \{x \in X : r_n \leqslant \|x\|_X \leqslant r_n + 1\} \to [0,1]$$

і

$$\omega_{2,n} : \{x \in X : r_n+1 \leqslant \|x\|_X \leqslant r_n+2\} \to [0,1]$$

за допомогою рівностей

$$\omega_{1,n}(x) = r_n \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_X} - 1 \right) x \right\|_X$$

і

$$\omega_{1,n}(x) = (r_n + 2) \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_X} - 1 \right) x \right\|_X .$$

Очевидно, що відображення $\omega_{1,n}$ і $\omega_{2,n}$ неперервні,

$$\omega_{1,n}(x) = 1,\ \text{якщо}\ \|x\|_X = r_n, \qquad (9)$$

$$\omega_{2,n}(x) = 1,\ \text{якщо}\ \|x\|_X = r_n + 2, \qquad (10)$$

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0,\ \text{якщо}\ \|x\|_X = r_n + 1, \qquad (11)$$

і

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0,1]. \qquad (12)$$

Оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ і числа r_n, $n \geqslant 1$, визначимо наступним чином.

Спочатку розглянемо лінійний оператор $\mathcal{F}_1 : X \to Y$, що визначається рівністю

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{A} + \mathcal{K}_1.$$

Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant r} \|\mathcal{F}_1 x - \mathcal{A}_1 x\|_Y = 0.$$

Виберемо число $r_1 \geqslant 1$ так, щоб

$$\frac{r_1}{\left\|\mathcal{A}_1{}^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_1 \geqslant 0.$$

Далі розглянемо нелінійний оператор $\mathcal{F}_2 : X \to Y$, що визначається формулою

$$\mathcal{F}_2 x =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо}\ \ \|x\|_X \leqslant r_1, \\ G_{1,1} x, & \text{якщо}\ \ r_1 < \|x\|_X \leqslant r_1 + 1, \\ G_{2,1} x, & \text{якщо}\ \ r_1 + 1 < \|x\|_X \leqslant r_1 + 2, \\ \mathcal{A}_2 x, & \text{якщо}\ \ \|x\|_X > r_1 + 2, \end{cases}$$

де

$$G_{1,1} x = \mathcal{A} + \omega_{1,1}(x) \mathcal{K}_1 x$$

і

$$G_{2,1} x = \mathcal{A} + \omega_{2,1}(x) \mathcal{K}_2 x.$$

Цей оператор обмежений і неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,1}$ і $\omega_{2,1}$, співвідношень (9) – (12) і неперервності лінійних операторів $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{A}_2$. Легко перевірити, що

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y =$$

$$= \sup_{\|x\|_X \leqslant r_1 + 2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_2 > r_1 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant r_2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_2}{\left\|\mathcal{A}_2^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_2.$$

Далі визначимо нелінійний оператор $\mathcal{F}_3 : X \to Y$ за допомогою формули

$$\mathcal{F}_3 x =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо}\ \ \|x\|_X \leqslant r_2, \\ G_{1,2} x, & \text{якщо}\ \ r_2 < \|x\|_X \leqslant r_2 + 1, \\ G_{2,2} x, & \text{якщо}\ \ r_2 + 1 < \|x\|_X \leqslant r_2 + 2, \\ \mathcal{A}_3 x, & \text{якщо}\ \ \|x\|_X > r_2 + 2, \end{cases}$$

де

$$G_{1,2} x = \mathcal{A} + \omega_{1,2}(x) \mathcal{K}_2 x$$

і

$$G_{2,2} x = \mathcal{A} + \omega_{2,2}(x) \mathcal{K}_3 x.$$

Цей оператор обмежений і неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,2}$ і $\omega_{2,2}$, співвідношень (9) – (12), обмеженості і неперервності нелінійного оператора $\mathcal{F}_2$ і неперервності лінійного оператора $\mathcal{A}_3$. Очевидно, що

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y =$$

$$= \sup_{\|x\|_X \leqslant r_2 + 2} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_3 > r_2 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant r_3} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y \leqslant \frac{r_3}{\left\|\mathcal{A}_3^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_3.$$

Аналогічним чином визначаються обмежені і неперервні оператори $\mathcal{F}_n : X \to Y$, $n \geqslant 4$, і числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \geqslant 4$.

Зауважимо, що оператор $\mathcal{F}_n : X \to Y$ визначається за допомогою формули

$$\mathcal{F}_n x =$$

$$= \begin{cases} F_{n-1}x, & \text{якщо } \|x\|_X \leqslant r_{n-1}, \\ G_{1,n-1}x, & \text{якщо } \|x\|_X \in (r_{n-1}, r_{n-1}+1], \\ G_{2,n-1}x, & \text{якщо } \|x\|_X \in \\ & \in (r_{n-1}+1, r_{n-1}+2], \\ \mathcal{A}_n x, & \text{якщо } \|x\|_X > r_{n-1}+2, \end{cases}$$

де

$$G_{1,n-1}x = \mathcal{A} + \omega_{1,n-1}(x)\mathcal{K}_{n-1}x$$

і

$$G_{2,n-1}x = \mathcal{A} + \omega_{2,n-1}(x)\mathcal{K}_n x.$$

Завдяки співвідношенню

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y =$$

$$= \sup_{\|x\|_X \leqslant r_{n-1}+2} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y < +\infty$$

існує таке число $r_n > r_{n-1} + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant r_n} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H_n. \tag{13}$$

Оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ визначимо формулою

$$\mathcal{F}x = \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо } \|x\|_X \leqslant r_1, \\ \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо } r_1 < \|x\|_X \leqslant r_2, \\ \mathcal{F}_3 x, & \text{якщо } r_2 < \|x\|_X \leqslant r_3, \\ & \vdots \\ \mathcal{F}_n x, & \text{якщо } r_{n-1} < \|x\|_X \leqslant r_n, \\ & \ddots \end{cases}$$

Очевидно, що для звужень $\mathcal{F}|_{B_X[0,r_n]}$ і $\mathcal{F}_n|_{B_X[0,r_n]}$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_n$ на кулю $B_X[0, r_n]$ справджується рівність

$$\mathcal{F}|_{B_X[0,r_n]} = \mathcal{F}_n|_{B_X[0,r_n]}. \tag{14}$$

На підставі цієї рівності та обмеженості і неперервності операторів $\mathcal{F}_n : X \to Y$, $n \geqslant 1$, оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ також обмежений і неперервний.

Співвідношення (8) випливає із співвідношень (13) і (14).

Із співвідношень, за допомогою яких визначаються $\mathcal{F}_n$, $n \geqslant 1$, і $\mathcal{F}$, а також із обмеженості та неперервності $\omega_{1,n}$, $\omega_{2,n}$ і повної неперервності $\mathcal{K}_n$, $n \geqslant 1$, випливає, що відображення $\mathcal{F} - \mathcal{A}_n : B_X[0, r_n] \to Y$, $n \geqslant 1$, цілком неперервні.

Теорему 3 доведено.

Зауваження 2. У теоремі 3 множина цілком неперервних операторів $\mathcal{K}_n$, $n \geqslant 1$, для яких оператори $\mathcal{A} + \mathcal{K}_n$, $n \geqslant 1$, у випадку $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ мають неперервні обернені, є не порожньою. Справді, зафіксуємо довільний ненульовий вектор $b \in Y$. Завдяки включенню $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ існує єдиний вектор $a \in X$, для якого $\mathcal{A}a = b$. Розглянемо довільний лінійний неперервний і ненульовий функціонал φ, визначений на X, для якого $\varphi(a) = 0$ (таких функціоналів, якщо $\dim X \geqslant 2$, є нескінченно багато на підставі теореми Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала [5]). Визначимо цілком неперервний оператор $\mathcal{K} : X \to Y$ рівністю $\mathcal{K}x = \varphi(x)b$. Тоді оператор $\mathcal{A} + \mathcal{K}$ буде мати неперервний обернений, оскільки $\ker(\mathcal{A} + \mathcal{K}) = \{0\}$, що легко перевірити, і $R(\mathcal{A} + \mathcal{K}) = R(\mathcal{A}) = Y$ завдяки фредгольмовості оператора $\mathcal{A}$ та стійкості цієї властивості оператора по відношенню до довільних цілком неперервних збурень [4].

Очевидно, що аналогічним чином, як і при доведенні теореми 3, можна побудувати нелінійний неперервний і обмежений оператор $\mathcal{F}$, до якого застосовна теорема 2.

4. Застосування теорем 1 і 2 до слабко нелінійних рівнянь. Розглянемо рівняння (1) у випадку, коли

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} + \mathcal{K},$$

де $\mathcal{A} : X \to Y$ - елемент множини $\mathcal{E}$ або $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{K} : X \to Y$ – нелінійний неперервний і обмежений оператор, для якого нижня границя

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y}{r}$$

є достатньо малою.

За допомогою теорем 1 і 2 легко доводяться наступні два твердження.

Теорема 4. *Нехай $\mathcal{A}$ – елемент множини $\mathcal{E}$ і $\mathcal{K}: X \to Y$ – цілком неперервний оператор, для якого*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}. \tag{15}$$

Тоді

$$R(\mathcal{A}+\mathcal{K}) = Y.$$

Доведення. Нехай y – довільний елемент простору Y. Розглянемо рівняння

$$(\mathcal{A}+\mathcal{K})x = y. \tag{16}$$

Покладемо $H = \|y\|_Y$. Завдяки (15) існує таке число $r > 0$, що

$$\sup_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y \leqslant \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H.$$

Тому на підставі теореми 1 і повної неперервності $\mathcal{K}$ рівняння (16) має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай $\mathcal{A}$ – елемент множини $\mathcal{E}_1$,*

$$R(\mathcal{K}) \subset Y_1$$

і $\mathcal{K}: X \to Y_1$ – цілком неперервний оператор, для якого

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y}{r} <$$

$$< \frac{1}{\left\|(\mathcal{A}|_{X_1})^{-1}\right\|_{L(Y_1,X_1)}}. \tag{17}$$

Тоді

$$R(\mathcal{A}+\mathcal{K}) = Y_1.$$

Доведення. Розглянемо рівняння (16), в якому y – довільний елемент простору Y_1. Покладемо $H = \|y\|_Y$. Завдяки (17) існує число $r > 0$, таке, що

$$\sup_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y \leqslant \frac{r}{\left\|(\mathcal{A}|_{X_1})^{-1}\right\|_{L(Y_1,X_1)}} - H.$$

Тому на підставі теореми 2 і повної неперервності $\mathcal{K}$ рівняння (16) має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 3. У теоремах 4 і 5 оператор $\mathcal{K}$ може бути таким, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X\leqslant r} \|\mathcal{K}x\|_Y}{r} = +\infty.$$

Справді, нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Розглянемо числові послідовності $(\alpha_n)_{n\geqslant1}$ і $(\beta_n)_{n\geqslant1}$, де

$$\alpha_n = n!$$

і

$$\beta_n = \alpha_n + 1,$$

і неперервні функції $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, для яких

$$\operatorname{supp}\varphi_n = [\alpha_n, \beta_n]$$

($\operatorname{supp}\varphi_n$ – носій функції φ_n) і

$$\max_{x\in[\alpha_n,\beta_n]} |\varphi_n(x)| = n!\sqrt{n}$$

для всіх $n \geqslant 1$. Визначимо неперервне відображення $\mathcal{K}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності

$$\mathcal{K}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

що є цілком неперервним, оскільки

$$\dim\, \mathbb{R} = 1 < +\infty.$$

Очевидно, що

$$\frac{\max\limits_{|x|\leq\beta_n} |\mathcal{K}(x)|}{\beta_n} = \frac{n!\sqrt{n}}{n!+1}$$

і

$$\frac{\max\limits_{|x|\leq\alpha_{n+1}} |\mathcal{K}(x)|}{\alpha_{n+1}} = \frac{n!\sqrt{n}}{(n+1)!}.$$

Із цих співвідношень і рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$$

випливає, що

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\max\limits_{|x|\leqslant r}|\mathcal{K}(x)|}{r}=0$$

і

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\max\limits_{|x|\leqslant r}|\mathcal{K}(x)|}{r}=+\infty.$$

Очевидно, що окремим випадком теореми 5 є наступний результат.

Теорема 6 ([3, с. 90–91]). *Нехай X і Y – дійсні банахові простори і $\mathcal{A}: X\to Y$ – обмежене лінійне відображення, таке, що множина $R(\mathcal{A})$ замкнена і* $\ker\mathcal{A}$ *має замкнений доповнювальний підпростір. Нехай, далі, $\mathcal{K}: X\to Y$ – нелінійне цілком неперервне відображення, таке, що*

$$R(\mathcal{K})\subset R(\mathcal{A})$$

і

$$\mathcal{A}(x)=o(\|x\|)\quad \text{при}\quad \|x\|\to\infty.$$

Тоді

$$R(\mathcal{A}+\mathcal{K})=R(\mathcal{A}).$$

Завершуючи параграф, наведемо застосування теореми 4 до нелінійних інтегральних рівнянь.

Нехай $C_{[0,1]}$ – банаховий простір неперервних функцій $x\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{C_{[0,1]}}=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$$

і $X=Y=C_{[0,1]}$.

Розглянемо рівняння

$$x(t)=\int\limits_0^t f(x(\gamma(s)))\,ds+y(t),\ t\in[0,1],\quad (18)$$

і

$$x(t)=$$
$$=f\left(\int\limits_0^t x(\gamma(s))\,ds\right)+y(t),\ t\in[0,1],\quad (19)$$

де $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\gamma\colon[0,1]\to[0,1]$ і $y\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – неперервні функції.

Теорема 7. *Нехай для деякого числа $k\in\mathbb{R}$ виконується співвідношення*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\max\limits_{|x|\leqslant r}|f(x)-kx|}{r}<e^{-|k|}.\qquad (20)$$

Тоді для довільної функції $y\in C_{[0,1]}$ кожне з рівнянь (18) *і* (19) *має у просторі $C_{[0,1]}$ хоча б один розв'язок.*

Це твердження – наслідок теореми 4. Справді, визначимо за допомогою рівностей

$$(\mathcal{A}x)(t)=x(t)-k\int\limits_0^t x(\gamma(s))\,ds,\ t\in[0,1],$$

$$(\mathcal{K}_1x)(t)=$$
$$=-\int\limits_0^t (f(x(\gamma(s)))-kx(\gamma(s)))\,ds,\ t\in[0,1],$$

і

$$(\mathcal{K}_2x)(t)=-f\left(\int\limits_0^t x(\gamma(s))\,ds\right)+$$
$$+k\int\limits_0^t x(\gamma(s))\,ds,\ t\in[0,1],$$

неперервні лінійний оператор $\mathcal{A}$ і нелінійні оператори $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}_2$, що діють у просторі $C_{[0,1]}$.

Оператор $\mathcal{A}$ має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$, що за допомогою оператора

$$(Sx)(t)=\int\limits_0^t x(\gamma(s))\,ds,\quad t\in[0,1],$$

подається у вигляді

$$\left(\mathcal{A}^{-1}x\right)(t)=$$
$$=\left(\left(I+kS+k^2S^2+\ldots\right)x\right)(t),\qquad (21)$$

де I – одиничний оператор. Тут ряд

$$I+kS+k^2S^2+\ldots$$

збігається, оскільки

$$|(S^ny)(t)|\leqslant\frac{t^n}{n!}\|y\|_{C_{[0,1]}},\quad t\in[0,1],$$

для всіх $y \in C_{[0,1]}$. Також для $y_0(t) \equiv 1$

$$(S^n y_0)(1) = \frac{1}{n!}.$$

Тому

$$\|S^n\|_{L\left(C_{[0,1]}, C_{[0,1]}\right)} = \frac{1}{n!}$$

і, отже, на підставі (21)

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L\left(C_{[0,1]}, C_{[0,1]}\right)} \leqslant e^{|k|}. \tag{22}$$

Якщо $k \in [0, +\infty)$, то, очевидно, що

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|_{L\left(C_{[0,1]}, C_{[0,1]}\right)} = e^k.$$

Оператори $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ цілком неперервні на підставі теореми Арцела [5] і неперервності функцій f і γ.

Також на підставі (20) і (22) виконуються співвідношення

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_{C_{[0,1]}} \leqslant r} \|\mathcal{K}_1 x\|_{C_{[0,1]}}}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L\left(C_{[0,1]}, C_{[0,1]}\right)}},$$

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_{C_{[0,1]}} \leqslant r} \|\mathcal{K}_2 x\|_{C_{[0,1]}}}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L\left(C_{[0,1]}, C_{[0,1]}\right)}}.$$

Ураховуючи те, що рівняння (18) і (19) відповідно можна подати у вигляді

$$(\mathcal{A} + \mathcal{K}_1)x = y$$

і

$$(\mathcal{A} + \mathcal{K}_2)x = y,$$

приходимо до висновку, що для цих рівнянь виконуються всі умови теореми 4. Тому теорема 7 – окремий випадок теореми 4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Качуровский Р.И.* К теории Фредгольма для нелинейных операторных уравнений // ДАН. — 1970. — **192**, № 5. — С. 968—972.

2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

3. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

4. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

6. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту, Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 88—94.

7. *Слюсарчук В.Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 109—115.

8. *Слюсарчук В.Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1541—1556.

9. *Слюсарчук В.Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. — 2010. — **201**, № 8. — С. 103—126.

10. *Слюсарчук В.Ю.* Умови обмеженості розв'язків нелінійного різницевого рівняння $F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n$ // Науковий вісник Чернівецького ун-ту, Математика. — 2011. — **1**, № 3. — С. 113—119.

11. *Слюсарчук В.Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. матем. журн. — 2011. — **63**, № 12. — С. 1685—1698.

12. *Слюсарчук В.Ю.* Умови обмеженості розв'язків нелінійного диференціального рівняння $x'' + F(x', x) = y(t)$ // Науковий вісник Чернівецького ун-ту, Математика. — 2012. — **2**, № 1. — С. 108—119.

13. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. — 2012. — **203**, № 5. — С. 135—160.