

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ $C_{\beta,\infty}^\psi$ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАССА У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІРозв'язано задачу Колмогорова–Нікольського на класах (ψ, β) -диференційовних періодичних функцій при наближенні інтегралами Вейєрштрасса $W_\delta(f; x)$ в рівномірній метриці.We solved the Kolmogorov–Nikolsky problem on the class of (ψ, β) -differentiable periodic functions at approximation of Weierstrass integrals $W_\delta(f; x)$ in uniform metric

Нехай C — простір 2π -періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t |f(t)|$; L — простір 2π -періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

В роботі О. І. Степанця [1] введені класи періодичних функцій так.

Нехай $f \in L$ і

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f .

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\pi\beta}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\pi\beta}{2} \right) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ , то цю функцію називають (ψ, β) -похідною функції $f(x)$ і позначають через $f_\beta^\psi(x)$ ($\varphi(x) = f_\beta^\psi(x)$). Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через L_β^ψ . Якщо $f \in L_\beta^\psi$, і, крім того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{M}$, де \mathfrak{M} — деяка підмножина функцій із L , то записують, що $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{M}$. Далі покладемо $L_\beta^\psi \cap C = C_\beta^\psi$ і $L_\beta^\psi \mathfrak{M} \cap C =$

$C_\beta^\psi \mathfrak{M}$. Якщо в ролі \mathfrak{M} виступає множина

$$S_\infty^0 = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \leq 1, \varphi \perp 1\},$$

то клас $C_\beta^\psi S_\infty^0$ позначають через $C_{\beta,\infty}^\psi$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ збігаються з класами $W_{\beta,\infty}^r$, які були введені Б.Надем [2], а $f_\beta^\psi(x) = f_\beta^{(r)}(x)$ — це (r, β) -похідна в розумінні Вейля–Надя. Якщо, крім цього, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то f_β^ψ є похідною порядку r функції f і при цьому класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ є відомими класами Соболева W_∞^r .

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $C_{\beta,\infty}^\psi$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел \mathbb{N} деяких додатних неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, що належать до множини \mathfrak{M}

$$\mathfrak{M} := \left\{ \psi : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geq 0 \forall t_1, t_2 \in [1; \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \right\}.$$

Як і О.І. Степанець (див., наприклад, [1, с. 160]), з множини \mathfrak{M} виділимо підмножину

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leq \mu(t) \leq K_2 \forall t \geq 1\},$$

де $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до $\psi(\cdot)$ функція, а константи K_1 і K_2 , взагалі кажучи, можуть залежати від функції ψ .

Нехай $f \in L$ і $\delta > 0$. Величину

$$W_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt \right\} dt$$

називають інтегралом Вейерштрасса функції f .

Основним об'єктом досліджень будуть величини

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; W_{\delta})_C = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \|f(\cdot) - W_{\delta}(f; \cdot)\|_C,$$

а головною метою — отримання для цих величин асимптотичних рівностей, тобто рівностей виду

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; W_{\delta})_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)), \quad \delta \rightarrow \infty,$$

де $\varphi(\delta)$ — деяка конкретна функція, що залежить від параметра δ . Якщо така рівність отримана, то услід за О.І. Степанцем [1, с. 198], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського в рівномірній метриці для класу $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ та інтеграла Вейерштрасса.

Апроксимативні властивості інтегралів Вейерштрасса вперше досліджувались в роботі П.П. Коровкіна [3] у 1959 році, а саме ним була розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу Зигмунда Z_1 та інтеграла Вейерштрасса, де

$$Z_{\alpha} = \{f \in C : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq 2|h|^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 2\}.$$

Також ним було доведено, що інтеграли Вейерштрасса здійснюють найкраще асимптотичне наближення на класі Z_2 серед операторів виду

$$L(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \rho \cos t + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k(\rho) \cos kt \right\} dt, \quad 0 < \rho < 1,$$

і зазначено, що, наприклад, інтеграл Пуассона апроксимує клас Z_2 приблизно в три рази повільніше ніж інтеграл Вейерштрасса.

Далі Л.І. Баусовим [4] у 1961 році результат П.П. Коровкіна був поширений на класи Z_{α} , $0 < \alpha \leq 2$, а у 1965 році в роботі [5] — на класи Вейля–Надя $W_{\beta,\infty}^r$. У

1975 році В.А. Баскаков [6] отримав асимптотичні рівності для величини $\mathcal{E}(W_{\infty}^1; W_{\delta})_C$ при $\delta \rightarrow \infty$. А у 2001 році Л.П. Фалалеев [7] уточнив результат Л.І. Баусова, знайшовши точніший щодо порядку залишковий член.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень інтегралів Вейерштрасса від функцій з класів $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ при $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли функції $\psi \in \mathfrak{M}_C$ і спадають до нуля при $t \rightarrow \infty$ швидше за функцію $\frac{1}{t^2}$, яка визначає клас насичення інтеграла Вейерштрасса.

Покладемо

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2}) \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2}) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (1)$$

де $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u \geq 1$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати функцію $\psi(u)$ такою, що має неперервну другу похідну на $[1, \infty)$.

Домовимося впродовж подальшої роботи через K , K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_C$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла на $[b; \infty)$, $b \geq 1$, і*

$$\int_1^{\infty} u\psi(u)du < \infty. \quad (2)$$

Тоді при $\delta \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; W_{\delta})_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \|f''(x)\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^2} \int_1^{\sqrt{\delta}} t^3 \psi(t) dt + \frac{1}{\delta} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} t \psi(t) dt\right). \quad (3)$$

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (1) у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} u^2 \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ u^2 \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2} - u^2) \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2} - u^2) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \quad (5)$$

Переконаємося в сумовності перетворень Фур'є $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$ функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ виду

$$\hat{\varphi}_\beta(t) = \hat{\varphi}(t, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du,$$

$$\hat{\mu}_\beta(t) = \hat{\mu}(t, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du.$$

Покажемо збіжність інтеграла

$$A(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \int_0^\infty \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt.$$

Для цього, згідно з теоремою 1 роботи Л.І. Баусова [5, с. 24], досить показати збіжність інтегралів

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u |d\varphi'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^\infty |u-1| |d\varphi'(u)|, \quad (6)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u} du, \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u} du. \quad (7)$$

Із (4) випливає, що $d\varphi'(u) = 2 \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} du$ при $u \in [0; 1/\sqrt{\delta}]$. Тому

$$\int_0^{1/\sqrt{\delta}} u |d\varphi'(u)| = \frac{\psi(1)}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \quad (8)$$

Враховавши, що

$$\int_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2} u |d\varphi'(u)| \leq \int_{1/\sqrt{\delta}}^\infty u |d\varphi'(u)|,$$

$$\int_{1/2}^\infty |u-1| |d\varphi'(u)| \leq \int_{1/\sqrt{\delta}}^\infty u |d\varphi'(u)|,$$

знайдемо оцінку інтеграла $\int_{1/\sqrt{\delta}}^\infty u |d\varphi'(u)|$ на кожному із проміжків $[1/\sqrt{\delta}; b/\sqrt{\delta}]$ та $[b/\sqrt{\delta}; \infty)$ (при $\delta > 4b^2$).

Із (4) при $u \geq 1/\sqrt{\delta}$ маємо

$$\varphi''(u) = 2 \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4u \frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + u^2 \frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}.$$

Тоді

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u |d\varphi'(u)| \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^3 \psi''(\sqrt{\delta}u) du + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^2 |\psi'(\sqrt{\delta}u)| du + \frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u \psi(\sqrt{\delta}u) du.$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл з правої частини останньої нерівності двічі, а другий — один раз, і врахувавши, що функція $\psi(u)$ спадна на $[1; \infty)$, одержимо

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u |d\varphi'(u)| \leq \frac{\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} u^3 \psi'(\sqrt{\delta}u) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} - \frac{7}{\psi(\sqrt{\delta})} u^2 \psi(\sqrt{\delta}u) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} + \frac{16}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u \psi(\sqrt{\delta}u) du \leq \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \quad (9)$$

Враховуючи опуклість функції $g(u) = u^2\psi(u)$ на $[b; \infty)$, а також рівності $\lim_{u \rightarrow \infty} u^2\psi(u) = 0$ та $\lim_{u \rightarrow \infty} u^3\psi'(u) = 0$, в справедливості яких неважко переконатися, матимемо

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u |d\varphi'(u)| = \int_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u d\varphi'(u) =$$

$$= (u\varphi'(u) - \varphi(u)) \Big|_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \quad (10)$$

Отже, із співвідношень (8), (9) та (10) впливають оцінки

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u |d\varphi'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right), \quad (11)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1| |d\varphi'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \quad (12)$$

Враховуючи (4) та умову теореми $\int_1^{\infty} u\psi(u)du < \infty$, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u} du &= \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_0^{1/\sqrt{\delta}} u du + \\ &+ \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(\sqrt{\delta}u) du = \frac{\psi(1)}{2\delta\psi(\sqrt{\delta})} + \\ &+ \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\infty} u\psi(u) du \leq \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \end{aligned} \quad (13)$$

Оцінимо другий інтеграл з (7). Як і при встановленні співвідношення (58) з роботи [8], можна показати, що має місце рівність

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |\varphi(1-u) - \varphi(1+u)| \frac{du}{u} = \\ &= \int_0^1 |\lambda(1-u) - \lambda(1+u)| \frac{du}{u} + O(H(\varphi)), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\lambda(u) = 1 - u^2$,

$$\begin{aligned} H(\varphi) &= |\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int_0^{1/2} u |d\varphi'(u)| + \\ &+ \int_{1/2}^{\infty} |u-1| |d\varphi'(u)|. \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (4), (11), (12), те, що $\int_0^1 |\lambda(1-u) - \lambda(1+u)| \frac{du}{u} \leq K$ і $\lim_{u \rightarrow \infty} u^2\psi(u) = 0$, отримаємо оцінку

$$\int_0^1 |\varphi(1-u) - \varphi(1+u)| \frac{du}{u} = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \quad (15)$$

Отже, за теоремою 1 з роботи [5], інтеграл $A(\varphi)$ збіжний.

Покажемо тепер збіжність інтеграла

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \quad (16)$$

Згідно з теоремою 1 роботи Л.І. Баусова [5, с. 24] для збіжності інтеграла (16) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u |d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1| |d\mu'(u)|, \quad (17)$$

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u} du, \quad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u} du. \quad (18)$$

Для оцінки першого інтеграла з (17) розіб'ємо проміжок $[0; 1/2]$ на дві частини $[0; 1/\sqrt{\delta}]$ та $[1/\sqrt{\delta}; 1/2]$.

Із (5) випливає, що при $u \in [0; 1/\sqrt{\delta}]$

$$\mu''(u) = 2(e^{-u^2} - 2u^2e^{-u^2} - 1) \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})},$$

тому, враховуючи нерівність

$$2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 3u^2, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_0^{1/\sqrt{\delta}} u |d\mu'(u)| = \\ &= \frac{2\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_0^{1/\sqrt{\delta}} u(2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1) du \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{6\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_0^{1/\sqrt{\delta}} u^3 du \leq \frac{K}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}. \quad (20)$$

Із (5) випливає, що при $u \geq 1/\sqrt{\delta}$

$$\begin{aligned} \mu''(u) = & \left(1 - e^{-u^2} - u^2\right) \frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + \\ & + 4u \left(e^{-u^2} - 1\right) \frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + \\ & + 2 \left(e^{-u^2} - 2u^2e^{-u^2} - 1\right) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Враховувавши нерівність (19) та нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2}, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

матимемо

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u |d\mu'(u)| \leq & \frac{\delta}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^5 \psi''(\sqrt{\delta}u) du + \\ & + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)| du + \\ & + \frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши перший інтеграл у правій частині останньої нерівності частинами та скориставшись теоремами 3.12.1 [1, с. 161] та 3.16.1 [1, с. 175], отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2} u |d\mu'(u)| \leq \\ & \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_3}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du \leq \\ & \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_3}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du. \end{aligned} \quad (23)$$

Поєднуючи (20) та (23) і враховуючи, що

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = \infty,$$

і те, що $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = K$, або

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = \infty, \text{ дістанемо}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u |d\mu'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du\right). \quad (24)$$

Оцінимо другий інтеграл з (17). Використовуючи формулу (21), те, що $|u - 1| \leq u$, $u \in [1/2; \infty)$ та нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq u^2, \quad 1 - e^{-u^2} \leq 1,$$

$$2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 2, \quad u \in \mathbb{R},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\infty} |u - 1| |d\mu'(u)| \leq & \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/2}^{\infty} u^3 \psi''(\sqrt{\delta}u) du + \\ & + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/2}^{\infty} u^2 |\psi'(\sqrt{\delta}u)| du + \frac{4}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/2}^{\infty} u \psi(\sqrt{\delta}u) du. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл із правої частини останньої рівності двічі, а другий інтеграл — один раз, та використавши теорему 3.12.1 [1, с. 161] та 3.16.1 [1, с. 175], а також той факт, що функція $\psi(\sqrt{\delta}u)$, $\delta \geq 4$, є спадною при $u \in [1/2; \infty]$, одержимо

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\infty} |u - 1| |d\mu'(u)| \leq & K_1 + \frac{K_2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_{1/2}^1 u \psi(\sqrt{\delta}u) du + \\ & + \frac{K_2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\infty} u \psi(\sqrt{\delta}u) du \leq K_1 + \frac{K_3\psi(\sqrt{\delta}/2)}{\psi(\sqrt{\delta})} + \\ & + \frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u \psi(u) du \leq K_4 + \frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u \psi(u) du. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким чином, із (25) отримуємо оцінку

$$\int_{1/2}^{\infty} |u-1| |d\mu'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du\right). \quad (26)$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (18), розділимо проміжок $[0; \infty)$ на три частини: $[0; 1/\sqrt{\delta}]$, $[1/\sqrt{\delta}; 1]$ і $[1; \infty)$. Використовуючи першу нерівність з (22), матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u} du &\leq \frac{K}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}, \\ \int_{1/\sqrt{\delta}}^1 \frac{|\mu(u)|}{u} du &\leq \frac{K_1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta}u)} \int_{1/\sqrt{\delta}}^1 u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du \leq \\ &\leq \frac{K_1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3\psi(u)du, \\ \int_1^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u} du &= \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\infty} \psi(\sqrt{\delta}u) \left(\frac{e^{-u^2}-1}{u} + u\right) du \leq \\ &\leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\infty} u\psi(\sqrt{\delta}u)du \leq \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u} du &= O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3\psi(u)du + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du\right). \quad (27) \end{aligned}$$

Міркуючи аналогічно як і при відшуканні оцінки (15), можна показати справедливість оцінки

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\mu(1-u) - \mu(1+u)| \frac{du}{u} &= \\ &= O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3\psi(u)du + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du\right). \quad (28)$$

Згідно з теоремою 1 роботи Л.І. Баусова [5] переконуємося в збіжності інтеграла $A(\mu)$, а також із нерівностей (2.14) і (2.15) тієї ж роботи [5] з урахуванням формул (24), (26), (27) та (28) знаходимо оцінку

$$\begin{aligned} A(\mu) &= O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} \int_1^{\sqrt{\delta}} u^3\psi(u)du + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u)du\right). \quad (29) \end{aligned}$$

Аналогічно до [1, с. 183] можна показати, що для будь-якої функції $f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) - W_{\delta}(f, x) = \psi(\sqrt{\delta}) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \hat{\tau}_{\beta}(t) dt.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; W_{\delta})_C &= \\ &= \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \left\| \psi(\sqrt{\delta}) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \hat{\tau}_{\beta}(t) dt \right\|_C = \\ &= \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \left\| \psi(\sqrt{\delta}) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) (\hat{\varphi}_{\beta}(t) + \hat{\mu}_{\beta}(t)) dt \right\|_C = \\ &= \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \left\| \psi(\sqrt{\delta}) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \hat{\varphi}_{\beta}(t) dt \right\|_C + \\ &\quad + O\left(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\right). \quad (30) \end{aligned}$$

Повторюючи міркування, що наведені в роботі [9, с. 12], легко переконатися, що для довільного $\delta > 0$ ряд Фур'є функції $f_{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) \hat{\varphi}_{\beta}(t) dt$ має вигляд:

$$S[f_{\varphi}](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\delta} \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f . Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{\psi} \left(x + \frac{t}{\sqrt{\delta}} \right) \hat{\varphi}_{\beta}(t) dt = -\frac{1}{\delta \psi(\sqrt{\delta})} f''(x). \quad (31)$$

Підставляючи (31) в (30), при $\delta \rightarrow \infty$ одержимо

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{\psi}; W_{\delta})_C = \frac{1}{\delta} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f''(x)\|_C + O\left(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\right). \quad (32)$$

Підставляючи (29) в (32) отримаємо рівність (3). Теорему доведено.

Прикладом функцій, для яких має місце теорема є функції виду:
 $\psi(u) = \frac{1}{u^2 \ln^{\alpha}(u+K)}$, $K > 0$, $\alpha > 1$;
 $\psi(u) = \frac{1}{u^r} \ln^{\alpha}(u+K)$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r} \operatorname{arctg} u$,
 $\psi(u) = \frac{1}{u^r} (K + e^{-u})$, $u \geq 1$, $K > 0$, $r > 2$,
 $\alpha \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанец А.И. Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
2. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. // Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie. zu — Leipzig, 1938. — **90**. — С. 103–134.
3. Коровкин П. П. О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. — 1959. — **127**, № 3. — С. 143–149.
4. Баусов Л. И. О приближении функций класса Z_{α} положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи мат. наук. — 1961. — **16**. № 3. — С. 143–149.
5. Баусов Л. И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.
6. Баскаков В. А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона // Мат. заметки. — 1975. — **17**, № 2. — С. 169–180.

7. Фалалеев Л. П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона. — Сибирский математический журнал, 2001. — **1**, № 4 — С. 926–936.
8. Жигалло Т. В., Харкевич Ю. И. Наближення (ψ, β) -диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1497–1515.
9. Степанец А. И. Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 83.69).