

НЕЛОКАЛЬНІ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами в гільбертовому просторі.

The correct solvability of the nonlocal multi-point on time problem for the evolution equations with non-negative self-conjugate operators in the Gilbert space is established.

Теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлено багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничих дисциплінах. Прикладами можуть бути задачі, пов'язані з дослідженням процесів поширення тепла, вологопереносу в капілярно-пористих середовищах, дифузії і деяких технологічних процесів, обернені задачі для параболічних рівнянь, а також задачі математичної біології та демографії [1–4]. Нелокальні задачі виникають також при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач [5].

При дослідженні нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь вигляду $u'(t) + Au(t) = 0$, $t \in (0, T]$, актуальним є питання про відшукування "максимальних" просторів елементів (можливо, узагальнених) для постановки двоточкової і багатоточкової задач, за якими розв'язок $u(t)$ однозначно відновлюється і володіє необхідними властивостями. Тут дається відповідь на поставлене питання у випадку одного класу еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами в гільбертовому просторі, встановлюється коректна розв'язність двоточкової та багатоточкової задач для таких рівнянь, при цьому $u(t)$ при кожному $t \in (0, T]$ належить до певного простору, породженому оператором A .

1. Попередні відомості та позначення

Нехай A – невід'ємний самоспряжений необмежений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) та нормою $\|\cdot\|$ зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, E_λ ($\lambda \geq 0$) – його розклад одиниці. Для довільної неперервної на $[0, \infty)$ функції $G(\lambda)$, що задовольняє умови

$$G(\lambda) \geq 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda) = +\infty, \quad (1)$$

на області визначення $\mathcal{D}(G(A))$ оператора $G(A) = \int_0^\infty G(\lambda) dE_\lambda$ введемо скалярний добуток

$$(f, g)_{H_G} := (G(A)f, G(A)g),$$

$$\begin{aligned} \{f, g\} \subset \mathcal{D}(G(A)) = \\ = \left\{ \psi \in H : \int_0^\infty G^2(\lambda) d(E_\lambda \psi, \psi) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Тоді $\mathcal{D}(G(A))$ перетворюється в гільбертів простір, який позначатимемо символом H_G . З (1) випливає, що $\|f\|_{H_G} \geq \|f\|$, $f \in H_G$, тому H_G можна вважати позитивним простором відносно H ([6], розділ 2, §1, с. 59–64). Позначимо через H'_G негативний простір, побудований за парою H_G та H . Відомо ([6], розділ 2, §1, с. 59–64), що H'_G може бути отриманий як поповнення H за нормою $\|f\|_{H'_G} = \|G^{-1}(A)f\|$. H'_G збігається з простором антилінійних неперервних функціоналів на H_G .

Наприклад, якщо $H = L_2(\mathbb{R})$, A – оператор множення на $|x|$, то в цьому випадку

$$H_G = L_2(\mathbb{R}, G^2(|x|)dx),$$

$$H'_G = L_2(\mathbb{R}, G^{-2}(|x|)dx).$$

Якщо $A = |D|$ – модуль оператора диференціювання, $G(\lambda) = \lambda^\tau + 1$, $\tau > 0$, то ([6], розділ 2, §2, с. 64-66)

$$H_{\lambda^{\tau+1}} = W_2^\tau(\mathbb{R}), \quad H'_{\lambda^{\tau+1}} = W_2^{-\tau}(\mathbb{R}),$$

де $W_2^{\pm\tau}(\mathbb{R})$ – відповідно позитивний і негативний простори Соболева порядку τ .

Нехай $G(\lambda)$, $\lambda \in [0, \infty)$, додатково до умов 1), монотонно зростає,

$$\exists c > 0 \exists \alpha_0 > 0 : \frac{G(\lambda)}{\lambda} \geq cG(\alpha_0\lambda), \quad \lambda > 0,$$

$G(\lambda)$ – неперервно диференційовна на $[0, \infty)$ функція, а функція $\lambda G'(\lambda)G^{-1}(\lambda)$ монотонна на $[0, \infty)$. За функцією $G_\alpha(\lambda) = G(\alpha\lambda)$ ($\alpha > 0$) побудуємо ланцюжок $H_{G_\alpha} \subset H \subset H'_{G_\alpha}$ гільбертових просторів. Зрозуміло, що $H_{G_{\alpha_1}} \subseteq H_{G_{\alpha_2}}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$.

Покладемо $m_n = \sup_{\lambda \geq 1} (\lambda^n / G(\lambda))$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатна і монотонно зростає. Вона володіє наступними властивостями ([6], розділ 2, §2, с. 67): 1) для довільного $\alpha > 0$ існує стала $c = c(\alpha) > 0$ така, що $m_n \geq c\alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$ (логарифмічна опуклість); 3) існують сталі $c, h > 0$ такі, що $m_{n+1} \leq ch^n m_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Введемо тепер $H_B \langle m_n \rangle$ як сукупність елементів $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, що задовольняють умову

$$\exists c > 0 \exists B > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$\|A^n f\| \leq cB^n m_n, \quad c = c(f).$$

Множина $H_B \langle m_n \rangle$ утворює банахів простір відносно норми $\|f\|_{H_B \langle m_n \rangle} = \sup_n (\|A^n f\| / (B^n m_n))$. Зазначимо, що $H_{B_1} \langle m_n \rangle \subseteq H_{B_2} \langle m_n \rangle$ при $B_1 < B_2$. Нехай $H_\infty \langle m_n \rangle := \lim_{B \rightarrow \infty} \text{ind} H_B \langle m_n \rangle$. Тоді, як відомо ([6], розділ 2, §2, с. 67-69), $H_\infty \langle m_n \rangle = H_{G,0}$, $H_{G,0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{ind} H_{G_\alpha}$.

Якщо розглянути функцію $G(\lambda) = \exp(\lambda^{1/\beta})$, $\beta > 0$, яка, очевидно, задовольняє всі умови, що накладаються на $G(\lambda)$, то клас $H_{\exp(\lambda^{1/\beta}),0}$, побудований як індуктивна границя гільбертових просторів $H_{\exp(\alpha\lambda)^{1/\beta}}$, називається класом Жевре порядку β , побудованим за оператором A , і позначається символом $G_{\{\beta\}}(A)$, тобто $G_{\{\beta\}}(A) = H_\infty \langle n^{n\beta} \rangle$, $\beta > 0$ (тут враховано, що $m_n = \sup_{\lambda \geq 1} (\lambda^n / \exp(\lambda^{1/\beta})) = (e^{-\beta} \beta^\beta)^n n^{n\beta}$).

Наприклад, якщо $H = L_2(\mathbb{R})$, A – оператор множення на $|x|$, то простір $G_{\{\beta\}}(A)$ складається з функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$, що задовольняють умову $\int_{\mathbb{R}} \exp(\alpha|x|^{1/\beta})|f(x)|^2 dx < \infty$ для деякого $\alpha > 0$.

Простір $G'_{\{\beta\}}(A)$ збігається в цьому випадку з множиною всіх функцій f , локально інтегровних з квадратом, для яких $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha|x|^{1/\beta})|f(x)|^2 dx < \infty$ для довільного $\alpha > 0$.

Якщо $A = |D|$, то (див. [6], розділ 2, §2, с. 73-75)

$$G_{\{\beta\}}(|D|) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \mid \exists c, \alpha > 0 : \right.$$

$$\left. \left(\int_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|^2 dx \right) \leq c\alpha^n n^{n\beta}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Із властивості монотонності функції G випливає нерівність $G(\alpha_1\lambda) < G(\alpha_0\lambda)$, $\lambda \in [0, \infty)$, якщо $0 < \alpha_1 < \alpha_0$. Припустимо, що виконується умова

$$\forall \alpha_0, \alpha_1 > 0 : \alpha_1 < \alpha_0 \exists c = c(\alpha_0, \alpha_1) > 0$$

$$\exists \alpha_2 > 0 : G(\alpha_2\lambda)G(\alpha_1\lambda) < cG(\alpha_0\lambda), \quad (2)$$

$$\lambda \in [0, \infty).$$

Нехай $f \in H_\infty \langle m_n \rangle = \bigcup_{\alpha > 0} H_{G_\alpha}$, тобто $f \in H_{G_{\alpha_0}}$ при деякому $\alpha_0 > 0$. Тоді $f = G^{-1}(\alpha_0 A)h$, $h \in H$. Візьмемо $\alpha_1 < \alpha_0$. Враховуючи умову (2), одержимо наступні нерівності:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \|G(\alpha_1 A)A^k f\| =$$

$$= \|G_{\alpha_1}(A)A^k G^{-1}(\alpha_0 A)h\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\int_0^\infty G^2(\alpha_1\lambda)\lambda^{2k}G^{-2}(\alpha_0\lambda)d(E_\lambda h, h)} \leq \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty \frac{c^2\lambda^{2k}}{G^2(\alpha_2\lambda)}d(E_\lambda h, h)} \leq \\
&\leq c\|h\| \sup_{\lambda \geq 1} \frac{\lambda^k}{G(\alpha_2\lambda)} = \frac{c\|h\|}{\alpha_2^k} \sup_{\alpha_2\lambda \geq 1} \frac{(\alpha_2\lambda)^k}{G(\alpha_2\lambda)} = \\
&= \frac{c\|h\| \cdot m_k}{\alpha_2^k}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Припустимо тепер, що ціла функція $F(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, набуває невід'ємних значень на \mathbb{R} і задовольняє умову

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : \\
|F(z)| \leq c_\varepsilon \cdot G(\varepsilon|z|). \tag{4}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти Тейлора функції F обчислюються за формулою

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F(z)}{z^{k+1}} dz, \\
|c_k| &\leq c_\varepsilon \inf_R \frac{G(\varepsilon R)}{R^k} = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k \inf \frac{G(\varepsilon R)}{(\varepsilon R)^k} = \\
&= c_\varepsilon \varepsilon^k \frac{1}{\sup_R \frac{R^k}{G(R)}} = \frac{c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k}{m_k}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Враховуючи (3) та (5) знайдемо, що для $0 < \varepsilon < \alpha_2$

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k| \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \leq c c_\varepsilon \|h\| \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)^k = \tilde{c}_\varepsilon \|h\|.$$

За функцією F побудуємо оператор $\tilde{F}(A) = \sum_{k=0}^\infty c_k A^k$. Оскільки

$$\|\tilde{F}(A)f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \left\| \sum_{k=0}^\infty c_k A^k f \right\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^\infty |c_k| \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \tilde{c}_\varepsilon \|h\|, \quad f \in H_{G_{\alpha_0}},$$

то $\tilde{F}(A)f \in H_{G_{\alpha_1}}$. Звідси випливає також, що кожен обмежену множину L простору $H_{G_{\alpha_0}}$ оператор $\tilde{F}(A)$ відображає в обмежену множину $\tilde{F}(A)L$ простору $H_{G_{\alpha_1}}$. Доведення випливає з наступних міркувань: якщо f перебігає обмежену множину в просторі $H_{G_{\alpha_0}}$, то множина M елементів $h \in H$ таких, що $f = G^{-1}(\alpha_0 A)h$ також обмежена, тобто $\exists \gamma_0 > 0 \forall h \in M : \|h\| \leq \gamma_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
\forall f \in L : \|\tilde{F}(A)f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} &\leq \sum_{k=0}^\infty |c_k| \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \leq \\
&\leq \tilde{c}_\varepsilon \|h\| \leq \tilde{c}_\varepsilon \gamma_0.
\end{aligned}$$

Таким чином, оператор $\tilde{F}(A)$ відображає простір $H_\infty\langle m_n \rangle$ в себе і є неперервним, $H_\infty\langle m_n \rangle \subseteq \mathcal{D}(\tilde{F}(A))$. Звуження оператора $\tilde{F}(A)$ на $H_\infty\langle m_n \rangle$ позначимо символом $F(A)$. Отже, $\mathcal{D}(F(A)) = H_\infty\langle m_n \rangle$ та $F(A)f = \sum_{k=0}^\infty c_k A^k f$, $\forall f \in H_\infty\langle m_n \rangle$.

Нехай F_j , $j \in \{1, \dots, s\}$, – цілі функції, невід'ємні на \mathbb{R} , для яких виконується аналог умови (4):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|F_j(z)| \leq c_\varepsilon G(\varepsilon|z|), \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

$\alpha_j: (0, T] \rightarrow (0, \infty)$, $j \in \{1, \dots, s\}$, – неперервні функції, інтегровні на $(0, T]$. Символом $\gamma(t, A)$, $t \in (0, T]$, позначимо оператор-функцію вигляду $\sum_{j=1}^s \alpha_j(t) F_j(A)$,

де $F_j(A)$, $j \in \{1, \dots, s\}$, – звуження відповідного оператора $\tilde{F}_j(A)$ на $H_\infty\langle m_n \rangle$. Отже, $\mathcal{D}(\gamma(t, A)) = H_\infty\langle m_n \rangle$ для кожного $t \in (0, T]$. Із вигляду $\gamma(t, A)$ випливає, що при кожному $t \in (0, T]$ оператор $\gamma(t, A)$ є самоспряженим і

$$\begin{aligned}
(\gamma(t, A)f, f) &= \sum_{j=1}^s \alpha_j(t) (F_j(A)f, f) = \\
&= \sum_{j=1}^s \alpha_j(t) \int_0^\infty F_j(\lambda) d(E_\lambda f, f) \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\forall f \in H_\infty \langle m_n \rangle,$$

тобто $\gamma(t, A)$ – невід’ємний оператор при кожному $t \in (0, T]$.

2. Основні результати

Розглянемо рівняння

$$u'(t) + \gamma(t, A)u(t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

де $\gamma(t, A)$ – оператор-функція, побудована в п. 1. Припускаємо також, що функції $F_j, j \in \{1, \dots, s\}$, задовольняють умову

$$\forall c > 0 \exists \mu = \mu(c) > 0: cF_j(\lambda) \geq \ln G(\mu\lambda),$$

$$\lambda \in [0, \infty), j \in \{1, \dots, s\}.$$

Звідси при фіксованому $t \in (0, T]$ випливають нерівності

$$\begin{aligned} \exp\{\varphi(t, \lambda)\} &\equiv \exp\left\{\sum_{j=1}^s b_j(t)F_j(\lambda)\right\} \equiv \\ &\equiv \exp\left\{\sum_{j=1}^s c_j F_j(\lambda)\right\} \geq \exp\{cF_j(\lambda)\} \geq \\ &\geq \exp\{\ln G(\mu\lambda)\} = G(\mu\lambda), \quad c = c(t) > 0, \\ b_j(t) &= \int_0^t \alpha_j(\tau) d\tau, \quad j \in \{1, \dots, s\}, t \in (0, T], \\ \exp\{-\varphi(t, \lambda)\} &\leq \frac{1}{G(\mu\lambda)}, \quad \mu = \mu(t) > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

З урахуванням (7) маємо, що

$$\begin{aligned} \|e^{-\varphi(t, A)} f\|_{H_{G\mu}}^2 &= \|G(\mu A)e^{-\varphi(t, A)} f\|^2 = \\ &= \int_0^\infty G^2(\mu\lambda) e^{-2\varphi(t, \lambda)} d(E_\lambda f, f) \leq \\ &\leq \int_0^\infty d(E_\lambda f, f) = \|f\|^2, \quad \forall f \in H. \end{aligned}$$

Отже, $\exp\{-\varphi(t, A)\}f \in H_\infty \langle m_n \rangle, \forall f \in H$, при кожному $t \in (0, T]$.

Під розв’язком рівняння (6) розуміємо функцію $u(t), t \in (0, T]$, зі значеннями в $H_\infty \langle m_n \rangle = \mathcal{D}(\gamma(t, A))$, неперервно диференційовну на $(0, T]$, яка задовольняє це рівняння.

Лема 1. Якщо розв’язки $u_1(t)$ і $u_2(t), t \in (0, T]$, рівняння (6) співпадають у точці $t_0 \in (0, T]$, то $u_1(t) \equiv u_2(t)$ для $t \in [t_0, T] \subset (0, T]$.

Доведення. Внаслідок лінійності рівняння (6) досить довести, що якщо розв’язок $u(t)$ рівняння (6) перетворюється в нуль у точці $t_0 \in (0, T]$, то $u(t) \equiv 0$ на проміжку $[t_0, T]$. Отже, нехай $u(t_0) = 0, t_0 \in (0, T]$. Оскільки $(u'(t), u(t)) = -(\gamma(t, A)u(t), u(t)) \leq 0$ і $(u'(t), u(t)) = \frac{1}{2}(u(t), u(t))'$, то для довільного $t \in (t_0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 &= \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}(u(\tau), u(\tau)) d\tau = \\ &= 2 \int_{t_0}^t \left(\frac{du(\tau)}{d\tau}, u(\tau)\right) d\tau = \\ &= -2 \int_{t_0}^t (\gamma(\tau, A)u(\tau), u(\tau)) d\tau \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Згідно з умовою $u(t_0) = 0$, тому $\|u(t)\| \leq 0, t \in (t_0, T]$. Звідси випливає, що $u(t) \equiv 0$ для $t \in [t_0, T]$.

Наслідок 1. Якщо $u(t), t \in (0, T]$, – розв’язок рівняння (6), неперервний на $[0, T]$, і $u(0) = 0$, то $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Доведення. З (8) випливає, що $\|u(t)\|^2 \leq \|u(t_0)\|^2$ для довільних t_0, t таких, що $0 < t_0 < t \leq T$. Попрямувавши t_0 до нуля отримаємо, що $\|u(t)\| \leq \|u(0)\| \leq 0$ для всіх $t \in (0, T]$. Отже, $u(t) = 0$ на $[0, T]$.

Теорема 1. Функція $u(t)$, неперервна на $[0, T]$, є розв’язком рівняння (6) тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\varphi(t, A)} f, \quad f = u(0) \in H, \\ \varphi(t, A) &= \sum_{j=1}^s b_j(t)F_j(A), \end{aligned} \quad (9)$$

$$de b_j(t) = \int_0^t \alpha_j(\tau) d\tau, \quad j \in \{1, \dots, s\}.$$

Доведення. Функція $e^{-\varphi(t, \lambda)}, (t, \lambda) \in (0, T] \times \sigma(A)$, де $\sigma(A)$ – спектр оператора A ,

диференційовна по t на довільному проміжку $[\varepsilon, T]$, $0 < \varepsilon < T$, причому

$$\sup_{t \in [\varepsilon, T], \lambda \in \sigma(A)} |(e^{-\varphi(t, \lambda)})'_t| \leq c < \infty,$$

де $c = c(\varepsilon, T) > 0$. Отже, оператор-функція $e^{-\varphi(t, A)}$ сильно диференційовна на відрізку $[\varepsilon, T]$ і

$$\frac{d}{dt} e^{-\varphi(t, A)} = -\gamma(t, A) e^{-\varphi(t, A)}. \quad (10)$$

Внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо, що оператор-функція $e^{-\varphi(t, A)}$ сильно диференційовна на проміжку $(0, T]$. З (10) випливає також, що функція $u(t) = e^{-\varphi(t, A)} f$ є розв'язком рівняння (6); при цьому, як зазначалося раніше, $u(t) \in H_\infty \langle m_n \rangle = \mathcal{D}(\gamma(t, A))$ при кожному $t \in (0, T]$.

Навпаки, якщо $u(t)$, $t \in (0, T]$, – розв'язок рівняння (6), неперервний у точці 0, то функція $z(t) = u(t) - e^{-\varphi(t, A)} f$, $f = u(0)$, задовольняє умови наслідку 1. Тому $u(t) \equiv 0$, $t \in (0, T]$, тобто $z(t) = e^{-\varphi(t, A)} f$, $t \in (0, T]$. Теорема доведена.

Для рівняння (6) задамо нелокальну умову

$$\mu_1 u(0) - \mu_2 u(T) = g, \quad g \in H, \quad (11)$$

де $\mu_1, \mu_2 > 0$ – фіксовані параметри, $\mu_1 > \mu_2$. Під розв'язком двоточкової задачі (6), (11) розуміємо розв'язок рівняння (6), який задовольняє умову (11).

Нехай $\mu := \mu_1/\mu_2$, $\mu > 1$. Оператор $\mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)}$ обмежений в H , причому $\|\mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)}\| < 1$. Тоді, як відомо, існує оператор $(I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1}$, який обмежений в H і подається у вигляді

$$(I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} e^{-k\varphi(T, A)}.$$

Враховуючи цей факт доведемо, що функція

$$\begin{aligned} u(t) &= \mu_1^{-1} e^{-\varphi(t, A)} (I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1} g = \\ &= \mu_1^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\varphi(t, \lambda)} (1 - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, \lambda)})^{-1} dE_\lambda g = \end{aligned}$$

$$= \mu_2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} e^{-(\varphi(t, A) + k\varphi(T, A))} g$$

є розв'язком задачі (6), (10). Справді, нехай

$$\psi := (I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1} g, \quad \psi \in H.$$

Тоді $u(t) = \mu_1^{-1} e^{-\varphi(t, A)} \psi$, причому $u(t) \in H_\infty \langle m_n \rangle \equiv \mathcal{D}(\gamma(t, A))$ при кожному $t \in (0, T]$. З теореми 1 випливає, що $u(t)$ є розв'язком рівняння (6). Крім того, $u(t)$ задовольняє умову (11). Справді,

$$\begin{aligned} \mu_1 u(0) - \mu_2 u(T) &= \int_0^{\infty} (1 - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, \lambda)})^{-1} dE_\lambda g - \\ &- \mu^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\varphi(T, \lambda)} (1 - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, \lambda)})^{-1} dE_\lambda g = \\ &= \int_0^{\infty} dE_\lambda g = g, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Нехай тепер $u(t)$ – розв'язок задачі (6), (11). Тоді, внаслідок теореми 1, $u(t)$ подається у вигляді (9). Знайдемо елемент $f \in H$ такий, щоб функція $e^{-\varphi(t, A)} f$ задовольняла умову (11). Це буде тоді й лише тоді, коли виконуються співвідношення

$$\mu_1 f - \mu_2 e^{-\varphi(T, A)} f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu_1 (I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)}) f = g, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1.$$

Звідси знаходимо, що $f = \mu_1^{-1} (I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1} g \equiv \mu_1^{-1} \psi$. Отже, $u(t) = \mu_1^{-1} e^{-\varphi(t, A)} \psi$.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Функція $u(t)$, неперервна на $[0, T]$ в H , є розв'язком двоточкової задачі (6), (11) тоді й тільки тоді, коли вона подається у вигляді*

$$\begin{aligned} u(t) &= \mu_1^{-1} e^{-\varphi(t, A)} \psi, \quad \psi = (I - \mu^{-1} e^{-\varphi(T, A)})^{-1} g, \\ \mu &= \mu_1/\mu_2 > 1, \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (12)$$

З теореми 2 випливає

Теорема 3. Двоточкова задача (6), (11) коректно розв'язна в гільбертовому просторі H , її розв'язок зображається формулою (12), $u(t) \in H_\infty\langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Доведення. Для доведення твердження достатньо показати, що функція $u(t)$ неперервно залежить від граничного елемента g . Отже, нехай $\{g_n, n \geq 1\} \subset H$, $g \in H$, $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$ в H ,

$$u_n(t) = \mu_1^{-1} \int_0^\infty e^{-\varphi(t,\lambda)} (1 - \mu^{-1} e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1} dE_\lambda g_n,$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Введемо позначення: $\Phi_n(\lambda) = (E_\lambda(g_n - g), g_n - g)$. При фіксованому λ за умови, що $g_n \rightarrow g$, $n \rightarrow \infty$ в H маємо

$$0 \leq \Phi_n(\lambda) = (E_\lambda(g_n - g), E_\lambda(g_n - g)) = \|E_\lambda(g_n - g)\|^2 \leq \|g_n - g\|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто $\Phi_n(\lambda) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $\exists c > 0 \forall n: \|g_n - g\| \leq c$, то із властивостей спектральної функції E_λ випливає, що варіації функцій Φ_n обмежені одним числом. Звідси, з урахуванням неперервності функції

$$\Psi_t(\lambda) := \mu_1^{-1} e^{-\varphi(t,\lambda)} (1 - \mu^{-1} e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1},$$

$$\lambda \in [0, \infty),$$

як функції змінної λ (при фіксованому $t \in (0, T]$), яка прямує до нуля на нескінченності, з першої теореми Хеллі випливає граничне співвідношення

$$\|u_n - u\|^2 = \int_0^\infty \Psi_t^2(\lambda) d\Phi_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в H , що й потрібно було довести.

Зазначимо, що наведені результати можна сформулювати так: формула (12) описує всі розв'язки рівняння (6), які задовольняють умову (11), при цьому $u(t) \in H_\infty\langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Для рівняння (6) поставимо m -точкову ($m \geq 2$) задачу

$$\mu u(0) - \mu_1 u(t_1) - \dots - \mu_m u(t_m) = g, \quad g \in H, \quad (13)$$

де $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$.

Під розв'язком задачі (6), (13) розуміємо розв'язок рівняння (6), який задовольняє умову (13). Оскільки

$$\mu I - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)} = \mu \left(I - \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)} \right),$$

причому

$$\left\| \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)} \right\| \leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < 1,$$

то існує оператор $(I - B)^{-1}$, обмежений в H , де $B := \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)}$. Внаслідок теореми 1 розв'язок задачі (6), (13) має вигляд $e^{-\varphi(t, A)} f$, де f – такий елемент з H , що

$$\mu f - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)} f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu \left(I - \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k, A)} \right) f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu(I - B)f = g.$$

Отже, $f = \mu^{-1}(I - B)^{-1}g$. Враховуючи результати, отримані у випадку двоточкової задачі (6), (11), і, міркуючи аналогічно, прийдемо до наступного твердження.

Теорема 4. Функція $u(t)$, неперервна на $[0, T]$ в H , є розв'язком m -точкової задачі (6), (13) тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$u(t) = \mu^{-1} e^{-\varphi(t, A)} \psi, \quad \psi = (I - B)^{-1}g,$$

$$t \in (0, T].$$

m -точкова задача (6), (13) коректно розв'язна в гільбертовому просторі H , $u(t) \in H_\infty\langle m_n \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Як відомо (див. [6], розділ. 2, §3, с. 80-82), оператор A допускає замикання в просторі H'_G до самоспряженого невід'ємного оператора \hat{A}_G , при цьому $A \subset \hat{A}_G$, $\varphi(A) \subset \varphi(\hat{A}_G)$

для довільної неперервної на $[0, \infty)$ функції φ . Нехай \hat{E}_λ – розклад одиниці оператора \hat{A}_G у просторі H'_G . Тоді для довільного $f \in H$

$$\begin{aligned} (\hat{E}_\lambda f, f)_{H'_G} &= (E_\lambda f, f)_{H'_G} = \\ &= (G^{-1}(A)E_\lambda f, G^{-1}(A)f) = \\ &= (E_\lambda G^{-1}(A)f, E_\lambda G^{-1}(A)f) = \\ &= \|E_\lambda G^{-1}(A)f\|^2 = \\ &= \|G^{-1}(A)E_\lambda f\|^2 = \\ &= \int_0^\infty G^{-2}(\mu) d(E_\mu E_\lambda f, E_\lambda f) = \\ &= \int_0^\lambda G^{-2}(\mu) d(E_\mu f, f). \end{aligned}$$

Отже,

$$\forall f \in H : (E_\lambda f, f) = \int_0^\lambda G^2(\mu) d(\hat{E}_\mu f, f)_{H'_G}.$$

Звідси випливає, що $H'_G = G(\hat{A})H$. Для зручності далі через \hat{A} будемо позначати оператор \hat{A}_G , де $G(\lambda) = e^\lambda$, через H'_e – простір $H'_{e,\lambda}$, спряжений до $H_{e,\lambda}$, $H'_{e,\alpha} \equiv H'_{e,\alpha\lambda}$, $\alpha > 0$. Таким чином, якщо $G(\lambda) = e^{\alpha\lambda}$, $\alpha > 0$, то $H'_{e,\alpha} = e^{\alpha\hat{A}}H$, причому оператор $e^{-\alpha\hat{A}}$ ізометрично відображає $H'_{e,\alpha}$ на H .

У монографії [6] (розділ 2, §4, с. 87-89) встановлено, що всі неперервно диференційовні на $(0, T]$ у просторі H розв'язки рівняння

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (14)$$

мають вигляд $u(t) = e^{-t\hat{A}}f$, де $f \in H'_\infty\langle n! \rangle$; при цьому функція $u(t)$ неперервна на $[0, T]$ в $H'_\infty\langle n! \rangle$. Граничне значення $u(t)$ при $t \rightarrow +0$ існує в просторі $H'_\infty\langle n! \rangle$ (але не існує, взагалі кажучи, в H). Ураховавши сказане, поставимо наступну задачу: знайти гладкий розв'язок $u(t)$ рівняння (14) на $(0, T]$, який задовольняє умову

$$\mu_1 u(0) - \mu_2 u(T) = g, \quad g \in H'_\infty\langle n! \rangle, \quad (15)$$

де $u(0) = \lim_{t \rightarrow +0} u(t)$, $u(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} u(t)$ (границі розглядаються в просторі $H'_\infty\langle m_n \rangle$), $\mu_1 > \mu_2 > 0$.

Теорема 5. Функція $u(t)$, $t \in (0, T]$, є розв'язком двоточкової задачі (14), (15) тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= \mu_1^{-1} e^{-t\hat{A}} \psi, \quad \psi = (I - \mu_1^{-1} e^{-T\hat{A}})^{-1} g, \\ \mu &= \mu_1 / \mu_2 > 1. \end{aligned}$$

Задача (14), (15) коректно розв'язна, $u(t) \in H'_\infty\langle n! \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Доведення теореми 5 здійснюється за схемою доведень теорем 2, 3.

Зауваження. Якщо для рівняння (14) поставити m -точкову ($m \geq 2$) задачу

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t) &= g, \\ g &\in H'_\infty\langle n! \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

(границі розглядаються в просторі $H'_\infty\langle n! \rangle$), де параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ задовольняють умови, сформульовані раніше, то прийдемо до наступного твердження: функція $u(t)$, $t \in (0, T]$, є розв'язком задачі (14), (16) тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$\begin{aligned} u(t) &= \mu^{-1} e^{-t\hat{A}} \left(I - \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k \hat{A}} \right)^{-1} g, \\ g &\in H'_\infty\langle n! \rangle; \end{aligned}$$

задача (14), (16) коректно розв'язна, $u(t) \in H'_\infty\langle n! \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72-81.
2. Белавин И.А. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения / И.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 6. – С. 885-902.

3. *Майков А.Р.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем / А.Р. Майков, А.Д. Поезд, С.А. Якушев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267-1271.

4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.

5. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61-86.

6. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.