

Величко И.Г.

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ

В статье получено аналитическое выражение для функции Грина в двумерной стационарной задаче теплопроводности для анизотропной полуплоскости. Исследовано эффект сдвига максимума температуры в горизонтальном сечении в зависимости от угла наклона главных осей теплопроводности.

Ключевые слова: анизотропная полуплоскость, теплопроводность, главные оси анизотропии, функция Грина, преобразование Фурье.

Актуальность исследования, постановка проблемы. Наряду с изотропными материалами, свойства которых одинаковы во всех направлениях, используются и материалы, не обладающие таким свойством. Для математического описания физических полей в анизотропных материалах применяется более сложный и громоздкий математический аппарат, а для их характеристики используется большее количество констант.

Поскольку инженерные конструкции, в состав которых входят узлы из анизотропных материалов, работают под воздействием температур, которые влияют на целостность и надежность конструкции, то представляется актуальным разработка способов анализа тепловых полей в анизотропных средах.

Теоретический анализ исследования. Задачи теплопроводности представляют как самостоятельный интерес для инженерной практики [1], так и как часть исследований поведения термоупругих тел [2]. В последнее время наибольший интерес для исследователей представляют динамические задачи [3]. Однако статические задачи тоже являются полезной математической моделью, поскольку они, во-первых, описывают соответствующие установившиеся процессы, а во-вторых, математические модели при этом намного проще соответствующих динамических моделей и часто допускают аналитические решения [4].

Как правило, при решении задач теплопроводности анизотропных используют методы теории функции комплексной переменной для получения эффективных расчетных схем [5]. При аналитических решениях авторы ограничиваются случаем, когда границы области параллельны главным осям теплопроводности [1].

Цель исследования. Целью данной работы есть получение и проанализировать решение одной из задач теплопроводности в аналитическом виде, когда главная ось теплопроводности произвольно ориентирована относительно границы области. Это позволит тестировать существующие программные комплексы для расчетов физических полей, а так же явно описывать изменение тепловых полей в трансверсально изотропных телах.

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропной полуплоскости в случае, когда оси анизотропии не параллельны границе полуплоскости. На границе полуплоскости задана температура, а на бесконечности она стремится к нулю. Требуется построить функцию, описывающее стационарное распределение температур в полуплоскости в рамках линейной теории теплопроводности.

Изложение основного материала. Будем считать, что на плоскости заданы две прямоугольные декартовы системы координат с общим началом на границе полуплоскости (рис 1).

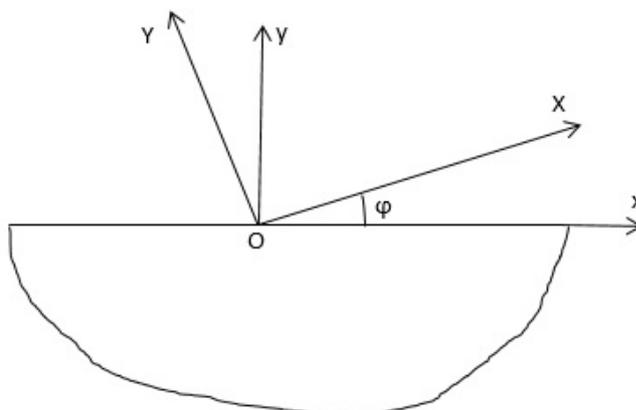


Рис.1. Две системы координат, связанные с полуплоскостью

В канонической системе координат OXY , у которой координатные оси совпадают с главными осями теплопроводности, уравнение теплопроводности имеет вид [6]

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

здесь λ_1, λ_2 – главные коэффициенты теплопроводности. В системе координат Oxy полуплоскость занимает область $y < 0$.

Обозначим через φ угол поворота от одной системы к другой. Тогда координаты точек связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \\ y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

В системе координат Oxy уравнение (1) примет вид

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

где $a = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi$, $b = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \varphi \sin \varphi$, $c = \lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi$.

Будем решать уравнение (3) методом интегрального преобразования по переменной x с параметром ξ , считая, что при любом $y < 0$ функция $T(x, y)$ удовлетворяет условиям преобразования:

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

Обратным к нему будет преобразование

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} dx.$$

Уравнение (3) в пространстве трансформант примет вид

$$c \frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} - 2bi\xi \frac{d\bar{T}}{dy} - ap^2 \bar{T} = 0,$$

здесь $\bar{T} = \bar{T}(\xi, y)$, $p = |\xi|$.

Характеристическое уравнение имеет вид $ck^2 - 2bi\xi k - ap^2 = 0$. С помощью тождественных преобразований несложно убедиться, что дискриминант равен $D = 4p^2(ac - b^2) = 4p^2\lambda_1\lambda_2$, а корни $k_{1,2} = \frac{bi\xi \pm p\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{c}$. Поскольку мы рассматриваем область $y < 0$, то берем только корень с положительной действительной частью. Таким образом получаем трансформанту решения в виде $\bar{T}(\xi, z) = A(\xi) e^{\alpha py + i\beta \xi y}$, где $\alpha = \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{c}$, $\beta = \frac{b}{c}$.

Используя граничное условие $T(x, 0) = g(x)$, находим, что

$$\bar{T}(\xi, 0) = A(\xi) = \bar{g}(\xi).$$

Таким образом, получаем для трансформанты температуры

$$\bar{T}(\xi, z) = A(\xi) e^{\alpha py + i\beta \xi y}. \quad (4)$$

Выполним обратное преобразование и преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} T(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\xi) e^{(\alpha p + i\beta \xi)y} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{i\xi s} ds \right) e^{(\alpha p + i\beta \xi)y} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha p + i\beta \xi)y} e^{-i\xi x} e^{i\xi s} d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в последнем выражении вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha p y} e^{i \xi (s + \beta y - x)} d \xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha p y} (\cos \xi (s + \beta y - x) + i \sin \xi (s + \beta y - x)) d \xi = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{\alpha p y} \cos(p(s + \beta y - x)) dp = \frac{-2 \alpha y}{\alpha^2 y^2 + (s + \beta y - x)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом получили решение поставленной задачи в виде свертки

$$T(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) G(x - s, y) ds, \quad (5)$$

где функция Грина имеет вид

$$G(x - s, y) = \frac{-(\lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} y}{\lambda_1 \lambda_2 y^2 + (0.5 y (\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2\varphi - (\lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi) (x - s))^2}. \quad (6)$$

Удобно ввести безразмерный параметр $\kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и переписать (6) в виде

$$G(x - s, y) = \frac{-(\kappa \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \sqrt{\kappa} y}{\kappa y^2 + (0.5 y (\kappa - 1) \sin 2\varphi - (\kappa \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (x - s))^2}. \quad (7)$$

При $\varphi = 0$ получаем формулу, когда главная ось параллельна границе полуплоскости

$$G(x - s, y) = \frac{-y \sqrt{\kappa} y}{\kappa y^2 + (x - s)^2}. \quad (8)$$

Для изотропной полуплоскости ($\kappa = 1$) получаем функцию Грина в виде

$$G(x - s, y) = \frac{-y}{y^2 + (x - s)^2}. \quad (9)$$

Заметим, что предельные случаи (8) и (9) получаются из (7) непосредственной подстановкой соответствующих значений, без предельного перехода.

Формула (9) является классической и приведена, к примеру, в [7]. Ее обобщение, формулу (7), обнаружить в литературе не удалось.

Пример численного расчета. Приведем пример численного моделирования, показывающего влияние поворота главных осей теплопроводности к границе полуплоскости. Рассмотрим случай анизотропии, когда $\lambda_1 = 10\lambda_2$, и, следовательно, $\kappa = 10$. На границе полуплоскости температура описывается функцией:

$$g(x) = \begin{cases} T_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Угол φ есть угол между границей полуплоскости и направлением главной оси теплопроводности, соответствующей большему главному коэффициенту теплопроводности.

На рис.2. изображено график температуры $\frac{T(x, \tilde{y})}{T_0}$ в сечении, параллельном границе полуплоскости на

глубине $h = 0.5$ (то есть при $\tilde{y} = -0.5$) для значений угла $\varphi = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. На рис.3. изображены аналогичные графики на глубине $h = 1$. Большему значению φ соответствует график, пересекающую ось ординат в более низкой точке.

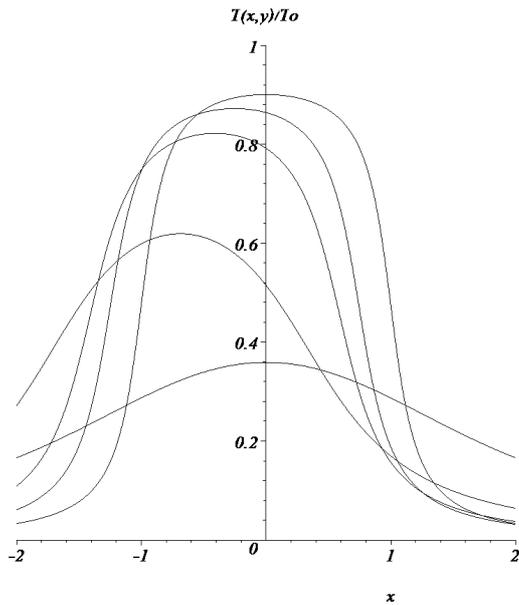


Рис.2. Графики температур при $h = 0.5$

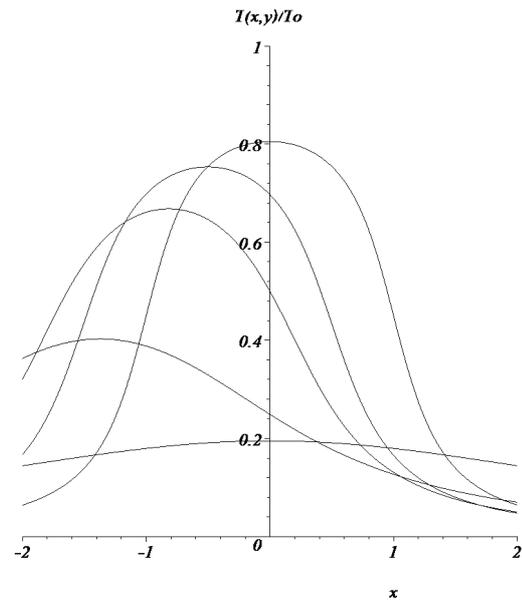


Рис.3. Графики температур при $h = 1$

Заметим, что для такой простой функции $g(x)$ можно было выписать формулу для температуры в конечном виде, поскольку интеграл (5) вычисляется аналитически. Однако полученное выражение будет достаточно громоздким.

Полученные численные результаты показывают, что с увеличением угла φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ максимум температуры в каждом из горизонтальных сечений уменьшается, а сама точка максимума сдвигается сначала влево, а потом обратно вправо, к точке $x = 0$. Это соответствует ожидаемым результатам и согласуется с физическим смыслом.

Исследуем этот эффект подробнее. Рассмотрим простейший случай, когда температура на верхней границе задана дельта-функцией $g(x) = \delta(x)$. Тогда температура определяется формулой

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) G(x-s, y) ds = G(x, y) = \frac{-(\kappa \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \sqrt{\kappa} y}{\kappa y^2 + (0.5 y (\kappa - 1) \sin 2\varphi - (\kappa \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) x)^2}.$$

Для нахождения максимума в сечении $y = const$ вычислим частную производную по переменной x и приравняем ее к нулю.

После преобразований получим

$$x_{\max} = \frac{0.5 y (\kappa - 1) \sin 2\varphi}{\kappa \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}.$$

На рис. 4. изображено зависимость $x_{\max}(\varphi)$ при $y = 1, \kappa = 10$.

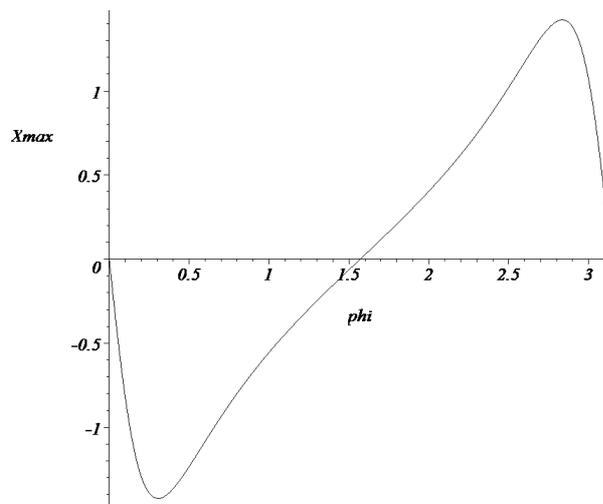


Рис.4. Положение точки максимума температуры в зависимости от угла наклона главной оси теплопроводности

Как видим, приведенная функция не является монотонной, и при некоторых углах отклонение точки максимума от линии приложения тепловой нагрузки может превышать глубину сечения.

Выводы. В статье получена аналитическая форма записи для стационарной температуры в анизотропной полуплоскости при произвольной ориентации главных осей теплопроводности относительно границы. Результат представляет собой свертку температуры на границе полуплоскости и построенной функции Грина. Проведенные численные эксперименты подтверждают достоверность полученных теоретических результатов. Показано, что максимум температуры в сечении при увеличении глубины может сдвигаться в сторону и получена оценка величины этого сдвига.

Литература

1. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Часть 1. Аналитические методы решения задач / В.Ф. Формалев. – М.: Изд-во: Физматлит, 2014. – 349 с.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Грибанов В.Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В.Ф. Грибанов, Н.Г. Паничкин. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Учебное пособие / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
5. Ю.А. Боган Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости / Боган Ю.А. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – Вып. 5(21). – 2010. – С. 64–71.
6. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 488 с.
7. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

References

1. Formalev V.F. Teploprovodnost anizotropnykh tel. Chast 1. Analiticheskie metodyi resheniya zadach / V.F. Formalev. – М.: Izd-vo: Fizmatlit, 2014. – 349 s.
2. Kolyano Yu.M. Metodyi teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela / Yu.M. Kolyano. – Kiev: Nauk. dumka, 1992. – 280 s.
3. Gribanov V.F. Svyazannyye i dinamicheskie zadachi termouprugosti / V.F. Gribanov, N.G. Panichkin. – М.: Mashinostroenie, 1984. – 184 s.
4. Lyikov A.V. Teoriya teploprovodnosti. Uchebnoe posobie / A.V. Lyikov. – М.: Vyisshaya shkola, 1967. – 600 s.
5. Yu.A. Bogan Zadacha Dirihle v dvumernoy statsionarnoy anizotropnoy termouprugosti / Bogan Yu.A. // Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. – Vyip. 5(21). – 2010. – S. 64–71.
6. Karlsru G. Teploprovodnost tverdyykh tel / G. Karlsru, D. Eger. – М., 1964. – 488 s.
7. Aramanovich I.G. Uravneniya matematicheskoy fiziki / I.G. Aramanovich, V.I. Levin. – М.: Nauka, 1969. – 288 s.

У статті отримано аналітичний вираз для функції Гріна в двовимірній стаціонарній задачі теплопровідності для анізотропної півплощини. Досліджено ефект зсуву максимуму температури в горизонтальному перетині залежно від кута нахилу головних осей теплопровідності.

Ключові слова: анізотропна напівплощина, теплопровідність, головні осі анізотропії, функція Гріна, перетворення Фур'є.

In the article, an analytical expression for the Green's function in the two-dimensional stationary heat conduction problem for an anisotropic half-plane. Investigated the effect of shifting the maximum temperature in the horizontal section according to the angle of inclination of the principal axes of thermal conductivity.

Keywords: anisotropic half-plane, thermal conductivity, the principal axes of anisotropy, the Green's function, the Fourier transform.

Величко Игорь Георгиевич. - кандидат физико-математических наук, доцент Таврического государственного агротехнологического университета wig64@mail.ru

Velichko Igor Georgievich - Candidate of physico-mathematical sciences, Associate Professor, Tavria State Agrotechnological University wig64@mail.ru

Рецензент: Леженкин А.Н. д.т.н., профессор Таврического государственного агротехнологического университета