УДК 519.65

Величко Е.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИНУСОИДЫ ПО ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ В СИСТЕМЕ ТОЧЕК

В статье предлагается метод определения параметров синусоидальной функции, приближенные значения которой известны в некоторой системе точек, абсциссы которых образуют арифметическую прогрессию. Получены явные формулы, позволяющие последовательно вычислять частоту, начальную фазу и амплитуду. Приведены результаты восстановления тестовой кривой при наличии флуктуаций, дающих погрешность до 5%. Экспериментально проверена устойчивость метода.

Ключевые слова: *амплитуда, частота, начальная фаза, аппроксимация, метод наименьших квадратов, флуктуации.*

Актуальность исследования, постановка проблемы. При проведении посадочных работ с помощью средств механизации рядки не получаются прямолинейными [1]. Поскольку сильная их искривленность может приводить к потерям урожая в связи с трудностями, связанными с их механизированной обработкой, то возникает задача выработки критериев, которые позволяют оценивать искривленность рядка. На практике для этого проводят продольную прямую (ось рядка), по обе стороны от которой находится приблизительно одинаковое количество семян, и с некоторым шагом замеряют отклонения семян от этой прямой. По этим данным нужно сделать количественную оценку качества посадки.

Теоретический анализ исследования. Существующие методы основаны на вычислении геометрических параметров кривой, на которой расположены семена или вероятностных параметров процесса сева. Так, к примеру, в [2], предлагается визуально разбить кривую на волны и вычислять отношения длины волны к ее высоте. Однако такая оценка, во-первых, является локальным показателем, а, во-вторых, по дискретным данным может быть получена с большой погрешностью. Оценка прямолинейности рядка через статистические показатели [1] дисперсии и спектральной плотности связана с гипотезой об эргодичности случайного процесса, описывающего разброс семян от оси и с предположением, что графиком одной из реализаций есть синусоида. Таким образом, задача нахождения единой числовой характеристики, описывающей геометрию линии посева, свободной от свойств локальности и не требующая учета нескольких реализаций, есть актуальная задача.

Как отмечено в [1], линии, на которых находятся семена после механического сева, достаточно точно описываются синусоидой, и в качестве характеристики качества сева можно взять ее амплитуду. Задачи аппроксимации функций, заданных своими значениями в системе точек, часто встречаются на практике [3]. Чаще всего для этого используют многочлены первой и второй степени, однако для рассматриваемой задачи эта аппроксимация не подходит. В данном случае возникает задача об определении характеристик синусоиды по ее известным значениям в системе точек. Поскольку на практике линия сева все же отличается от теоретической, то можно считать, что присутствуют флуктуации, благодаря которым значения вычисляются с некоторой погрешностью.

Заметим, что рассматриваемую задачу можно рассматривать как задачу фильтрации синусоидального сигнала по его значениям в некоторые моменты времени [4].

Цель исследования. Целью данной статьи является получения расчетных формул для амплитуды, частоты и начальной фазы синусоиды по системе точек, от которых она уклоняется минимальным образом.

Математическая постановка задачи. Дан набор n точек A_i с координатами $A_i(x_i, y_i)$, такая, что последовательность $\{x_i\}, i=1..n$ абсцисс является арифметической прогрессией с разностью δ. Величины $y_i = f(x_i)$ есть значения функции $f(x) = a\sin(bx+c) + g(x)$, где $|g(x_i)| << a$. Требуется восстановить функцию $y = a\sin(bx+c)$.

Изложение основного материала. Поскольку заданная функция не является линейной относительно параметров a, b и c, то для определения параметров применить непосредственно метод наименьших квадратов (МНК) не удается. Покажем это. Согласно алгоритму МНК [3] составим функцию невязки

$$F(a,b,c) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a\sin(bx_k + c) - y_k\right)^2, \tag{1}$$

найдем частные производные и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial F}{\partial a}=\sum_{k=1}^{n}\left(a\sin\left(bx_k+c\right)-y_k\right)\sin\left(bx_k+c\right)=0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=\sum_{k=1}^{n}\left(a\sin\left(bx_k+c\right)-y_k\right)ax_k\cos\left(bx_k+c\right)=0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c}=\sum_{k=1}^{n}\left(a\sin\left(bx_k+c\right)-y_k\right)a\cos\left(bx_k+c\right)=0\,. \tag{4}$$

Решить систему (2-4) аналитически не представляется возможным.

В данной статье предлагается альтернативный метод нахождения неизвестных параметров. Предполагаем, что все точки находятся на искомой кривой, то есть

$$y_i=a\sin\left(bx_i+c\right). \tag{5}$$

Сначала получим приближенное значение величины b, определяющей период колебаний. Рассмотрим три соседние точки y_{k-1},y_k,y_{k+1}. Используя тригонометрические тождества, преобразуем величину

$$y_{k+1}+y_{k-1}=a\sin\left(bx_{k+1}+c\right)+a\sin\left(bx_{k-1}+c\right)=a\cdot 2\sin\frac{b\left(x_{k+1}+x_{k-1}\right)+2c}{2}\cdot\cos\frac{b\left(x_{k+1}-x_{k-1}\right)}{2}=$$

$$=2a\sin\left(bx_k+c\right)\cos\frac{b\cdot 2\delta}{2}=2y_k\cos b\delta.$$

Отсюда получаем, что

$$\cos b\delta=\frac{y_{k+1}+y_{k-1}}{2y_k}. \tag{6}$$

Поскольку на практике точки не лежат на искомой линии, то усредним этот результат по всем соседним тройкам точек. Получаем такую оценку

$$b=\frac{1}{\delta}\arccos\left(\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{y_{k+1}+y_{k-1}}{2y_k}\right) \tag{7}$$

или

$$b=\frac{1}{\delta\left(n-2\right)}\sum_{k=2}^{n-1}\arccos\frac{y_{k+1}+y_{k-1}}{2y_k}\,. \tag{8}$$

Примечание. Если какие-то значения y_k сильно близки к нулю, то соответствующие слагаемые нужно исключить из суммы (2), уменьшив при этом знаменатель дроби перед суммой.

Переходим к вычислению величины c. Для этого запишем формулу (5) для индексов $i=k$ и $i=k+1$:

$$y_k=a\sin\left(bx_k+c\right),\ \ y_{k+1}=a\sin\left(bx_{k+1}+c\right).$$

Исключив из этой системы параметр a, получим соотношение

$$y_k\sin\left(bx_{k+1}+c\right)=y_{k+1}\sin\left(bx_k+c\right).$$

Использовав формулу для синуса суммы, после преобразований получим равенство

$$\left(y_k\sin\left(bx_{k+1}\right)-y_{k+1}\sin\left(bx_k\right)\right)\cos c=\left(y_{k+1}\cos\left(bx_k\right)-y_k\cos\left(bx_{k+1}\right)\right)\sin c\,.$$

Отсюда находим, что

$$tgc=\frac{y_k\sin\left(bx_{k+1}\right)-y_{k+1}\sin\left(bx_k\right)}{y_{k+1}\cos\left(bx_k\right)-y_k\cos\left(bx_{k+1}\right)}\,. \tag{9}$$

Поскольку на практике точки не лежат на искомой линии, то опять усредним этот результат по всем соседним парам точек. Получаем такую оценку для параметра c:

$$c=arctg\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{y_k\sin\left(bx_{k+1}\right)-y_{k+1}\sin\left(bx_k\right)}{y_{k+1}\cos\left(bx_k\right)-y_k\cos\left(bx_{k+1}\right)}\right) \tag{10}$$

или

$$c=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}arctg\,\frac{y_k\sin\left(bx_{k+1}\right)-y_{k+1}\sin\left(bx_k\right)}{y_{k+1}\cos\left(bx_k\right)-y_k\cos\left(bx_{k+1}\right)}\,. \tag{11}$$

Теперь, после того, как мы определили параметры b и c, переходим к определению оставшегося параметра a. Для этого воспользуемся полученным ранее соотношением (2). Разрешая это уравнение относительно a, находим

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \sin(bx_k + c)}{\sum_{k=1}^{n} \sin^2(bx_k + c)}. \quad (12)$$

Заметим, что здесь сразу применяется усреднение по всем точкам.

Пример численного расчета. В качестве тестовой рассмотрим функцию $2\sin(0.1x + 0.2)$. Случайные флуктуации будем моделировать слагаемым $g(x) = 0.1\sin x$. То есть считаем, что реальная линия расположения семян есть графиком функции $f(x) = 2\sin(0.1x + 0.2) + 0.1\sin x$. На рис.1 изображены графики функций $f(x)$ и функции $h(x) = f(x) - g(x)$, которую нужно восстановить, на отрезке (0, 100).

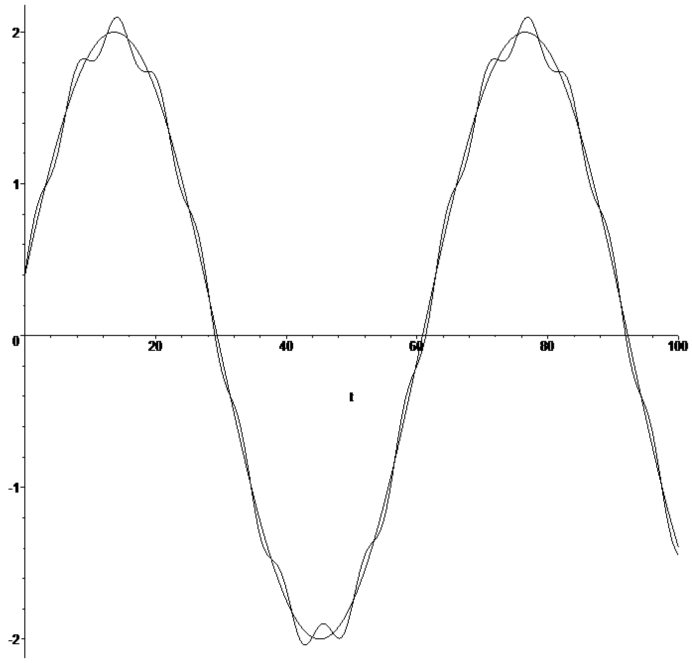

Рис.1. Графики функций $f(x)$ и $g(x)$

Бралось 30 точек с координатами $x_k = \frac{100(k-1)}{29}$, $y_k = f(x_k)$. При вычислении использовались формулы (7), (10) и (12). В результате расчетов были получены значения $a = 1.973$, $b = 0.096$, $c = 0.385$.

На рис. 2. изображены точки и кривая, полученная по результатам расчетов.

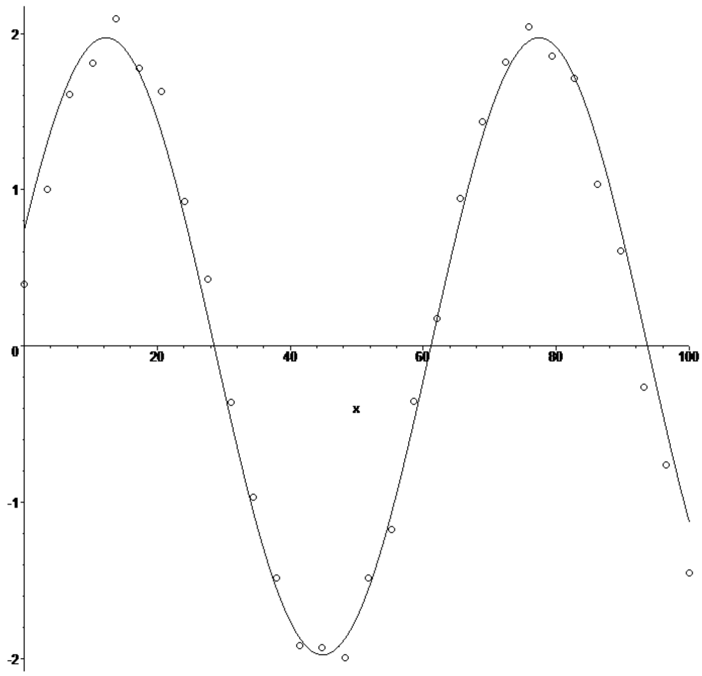

Рис.2. Точки и аппроксимирующая кривая

Как видим, даже при наличии флуктуации полученные значения амплитуды a и величины b оказались близки к эталонным. Это подтверждает достоверность полученных результатов.

Получим еще одно полезное тождество. Для этого вычислим

$$y_{k+1} - y_{k-1} = a\sin(bx_{k+1} + c) - a\sin(bx_{k-1} + c) = 2a\sin\delta b\cos(bx_k + c).$$

Возведя в квадрат, получим

$$(y_{k+1} - y_{k-1})^2 = 4a^2\sin^2\delta b\cos^2(bx_k + c) = 4a^2\left(1 - \cos^2\delta b\right)\left(1 - \sin^2(bx_k + c)\right).$$

Подставим в последнее выражение формулы (5) и (6):

$$(y_{k+1} - y_{k-1})^2 = 4\left(1 - \frac{(y_{k+1} + y_{k-1})^2}{(2y_k)^2}\right)\left(a^2 - y_k^2\right).$$

Выразим отсюда a^2, и получим формулу

$$a^2 = y_k^2 + \frac{y_k^2(y_{k+1} - y_{k-1})^2}{4y_k^2 - (y_{k+1} + y_{k-1})^2}. \tag{13}$$

Формула (13) позволяет получать значение амплитуды по трем соседним точкам без предварительного нахождения параметров b и c. Если целью исследования является именно оценка амплитуды, то можно рекомендовать воспользоваться формулой

$$a^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\left(y_k^2 + \frac{y_k^2(y_{k+1} - y_{k-1})^2}{4y_k^2 - (y_{k+1} + y_{k-1})^2}\right), \tag{4}$$

которая усредняет эту оценку по всем соседним тройкам точек.

Заметим, что используемое вначале предположение о том, что абсциссы точек образуют арифметическую прогрессию, не есть существенным ограничением. В том случае, когда значения функции известны в узлах неравномерной сетки, можно свести задачу к случаю равномерной сетки, получив требуемые значения, например, с помощью аппроксимации сплайнами [5]. Предложенный метод, очевидно, можно применять и для функции вида $\alpha\sin\varphi x + \beta\cos\varphi x$, приведя ее методом дополнительного угла к виду $a\sin(bx + c)$.

Выводы. В статье получены явные формулы, позволяющие определить амплитуду, начальную фазу и период колебаний функции $a\sin(bx + c)$ по трем ее значениям. В случае, если функция состоит из синусоидальной составляющей и аддитивного шума, то оценки этих параметров получаются по формулам, полученным усреднением значений соответствующих параметров по тройкам соседних точек. Проведенные численные эксперименты показали, что предложений метод позволяет восстанавливать синусоидальную составляющую функции даже при наличии значительных помех.

Литература

1. Чорна Т.С. Результати польових досліджень прямолінійності рядків просапної культури / Т.С. Чорна // Науковий вісник ТДАТУ. – 2012. – Вип.2, Т.5. – С. 233-237.
2. Пожидаєв С.П. До питання про вибір показника для оцінки на прямолінійності рядків просапних культур / С.П. Пожидаєв // Вісник сільськогосподарської науки. – 1980. – №11. – С. 61-64.
3. Лоусон Ч. Численное решение задач методом наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
4. Бердышев В.И. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения / В.И. Бердышев, Л.В. Петрак. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. – 296 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 632 с.

References

1. Chorna T.S. Rezultaty polovyh doslidzhen pryamoliniynosti ryadkiv prosapnoyi kultury / T.S. Chorna // Naukovyy visnyk TDATU. – 2012. – Vyp.2, T.5. – S. 233-237.
2. Pozhidayev S.P. Do pytannya pro vybir pokaznyka dlya otsinky na pryamoliniynosti ryadkiv prosapnih kultur / S.P. Pozhidayev // Visnyk silskogospodarskoyi nauky. – 1980. – №11. – S. 61-64.
3. Louson Ch. Chislennoe reshenie zadach metodom naimenshih kvadratov / Ch. Louson, R. Henson. – M.: Nauka, 1986. – 232 st.
4. Berdyishev V.I. Approksimatsiya funktsiy, szhatie chislennoy informatsii, prilozheniya / V.I. Berdyishev, L.V. Petrak. – Ekaterinburg: Izd-vo UrO RAN, 1999. – 296 st.
5. Bahvalov N.S. Chislennyie metodyi / N.S. Bahvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobelkov. – M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2009. – 632 st.

У статті пропонується метод визначення параметрів синусоїдальної функції, наближені значення якої відомі в деякій системі точок, абсциси яких утворюють арифметичну прогресію. Отримано явні формули, які дозволяють послідовно обчислювати частоту, початкову фазу і амплітуду. Наведено результати відновлення тестової кривої при наявності флуктуацій, що дають похибка до 5%. Експериментально перевірено стійкість методу.
Ключові слова: *амплітуда, частота, початкова фаза, апроксимація, метод найменших квадратів, флуктуації.*

In this article we propose a method of determining the parameters of sinusoidal functions, approximate values of which are known to a certain system of points, the abscissa of which form an arithmetic progression. Explicit formulas allowing consistently calculate the frequency and amplitude of the initial phase. Results of recovery test curve in the presence of fluctuations, giving an error of up to 5%. Experimentally verified the stability of the method.
Keywords: *amplitude, frequency, initial phase approximation, least squares method, the fluctuations.*

Величко Елена Вадимовна - кандидат физико-математических наук, доцент, Таврического государственного агротехнологического университета velichko_ev@i.ua

Velichko Helen Vadimovna. Ph.D. (physics and mathematics), Associate Professor, doctoral student in «Information Technology» Tavria State Agrotechnological University velichko_ev@i.ua

Рецензент: Леженкин А.Н. д.т.н., профессор Таврического государственного агротехнологического университета