УДК 656.61.052

ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В РЯД ГРАМА-ШАРЛЬЕ ТИПА А

Ворохобин И. И., *к.т.н., доцент, декан факультета морских перевозок и технологий Национального университета «Одесская морская академия», e-mail: burmaka-mob@ukr.net;*
Сикирин В. Е., *старший преподаватель кафедры судовождения Национального университета «Одесская морская академия», e-mail: burmaka-mob@ukr.net*
Фусар И. Ю., *старший преподаватель кафедры судовождения Национального университета «Одесская морская академия», e-mail: burmaka-mob@ukr.net*

Произведен анализ возможностей применения ортогонального разложения плотностей распределения погрешностей навигационных измерений с помощью полиномов Эрмита. Приведены свойства полиномов Эрмита для плотности закона распределения Гаусса.
Получены в явном виде разложения плотностей на базе нормированного и ненормированного нормального закона ортогональными полиномами Эрмита в ряд Грама-Шарлье типа А.
Приведены результаты оценки эффективности ортогонального разложения плотностей распределения случайных погрешностей навигационных измерений путем сравнения нормированных плотностей с их ортогональными разложениями. В результате анализа оказалось, что наилучшая эффективность ортогонального разложения достигается в случае, когда оно содержит только одно слагаемое.
В качестве примера рассмотрена плотность обобщенного распределения Пуассона и ее ортогональное разложение полиномами Эрмита. Показана их хорошая сходимость и подтверждена возможность применения ортогонального разложения вместо плотности распределения случайных погрешностей навигационных измерений.
Ключевые слова: *навигационная аварийность, законы распределения случайных погрешностей, ортогональное разложение плотности распределения, полиномы Эрмита, ряд Грама-Шарлье типа А.*

Постановка проблемы. Одним из существенных аспектов проблемы обеспечения надлежащего уровня безопасности судовождения является повышение точности контроля места судна при плавании в стесненных водах. Для обеспечения максимальной точности обсерваций места судна необходимо знать закон распределения погрешностей навигационных измерений.

Однако при дефиците статистических материалов погрешностей не удается с помощью стандартной процедуры определить закон их распределения, хотя можно оценить центральные моменты распределения и если гистограмма выборки имеет «утяжеленные хвосты», то можно использовать разложение плотности распределения погрешностей с помощью ортогональных полиномов Эрмита, не располагая ее аналитическим выражением.

Анализ последних достижений и публикаций. Анализ статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, представлен в работах [1, 2]. Показано, что погрешности не подчиняются нормальному закону распределения. В работе [3] представлены результаты анализа статистических материалов точности определения места судна с помощью приёмника спутниковой радионавигационной системы, которые показали, что предположение о распределении случайных погрешностей определения широты и долготы по закону Гаусса не является корректным и требует альтернативного подхода.

В работе [4] для описания случайных погрешностей навигационных измерений предложены смешанные законы двух типов, альтернативные нормальному закону, а обобщенный закон Пуассона с этой же целью предложен в работе [5].

Результаты исследования возможности описания систем зависимых случайных величин с помощью обобщенного распределения Пуассона с базовым нормальным распределением приведены в работе [6].

В этом случае, как следует из работы [7], применение метода наименьших квадратов для расчета обсервованных координат судна не обеспечивает возможности получения их эффективных оценок. Для получения эффективных оценок обсервованных координат судна необходимо использовать метод максимального правдоподобия, учитывающий действительный закон распределения погрешностей. Данное обстоятельство в настоящее время не учитывается, и соответствующие аналитические выражения получения эффективных оценок отсутствуют.

Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения произведена в работе [8], показано, что при смешанных законах распределениях эффективность меньше единицы, и с ростом существенного параметра она стремится по величине к единице. В работе [9] приведены результаты идентификации законов распределения погрешностей навигационных измерений, из которых следует, что погрешности измерений радиолокационных пеленгов и расстояний подчиняются в основном смешанным законам первого и второго типа.

Анализ рассмотренных работ показывает, что разнообразие законов распределения вероятностей случайных величин, особенностью которых является наличие утяжеленных хвостов, может быть унифицировано использованием ортогонального разложение с полученными значениями центральных моментов высших порядков. При этом существенным обстоятельством является степень совпадения плотности распределения с ее ортогональным разложением, что является предметом исследования данной статьи.

Цель статьи. Целью статьи является анализ эффективности ортогонального разложения плотностей законов распределения и выявление возможностей использования ортогонального разложения вместо плотности распределения упомянутых законов на примере обобщенного распределения Пуассона.

Изложение основного материала. Оценка точности обсервации судна возможна при известном законе распределения векториальной погрешности, аналитический вид плотности которой однозначно определяется выражением законов распределения погрешностей измерений навигационных параметров.

В работе [1] показано, что закон распределения погрешностей навигационных измерений близок к закону Гаусса, поэтому плотность распределения $f(x)$ центрированной и нормированной случайной погрешности x можно представить ортогональным разложением $f(x)$, в ряд Грама-Шарлье типа А, воспользовавшись результатами работы [10]:

$$f(x)=c_0\,\varphi(x)+c_1\varphi^{(1)}(x)+c_2\varphi^{(2)}(x)/2!\,...+c_i\varphi^{(i)}(x)/i!...,$$

где $\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ – нормальная плотность нормированной и центрированной случайной величины.

В работе [10] получены выражения производных высших порядков от нормальной плотности $\varphi^{(i)}(x)$ через ортогональные полиномы Эрмита $H_i(x)$:

$$\varphi^{(i)}(x)=(-1)^i\,H_i(x)\varphi(x)\ ,$$

где $H_i(x)=(-1)^i\{\dfrac{d^i}{dx^i}[\exp(-x^2/2)]\}\exp(-x^2/2)$.

В случае, когда случайной величина x является ненормированной, разложение имеет следующий вид:

$$f(x)=c_0\varphi(x)+c_1\varphi^{(1)}(x)+c_2\varphi^{(2)}(x)/2!...+c_i\varphi^{(i)}(x)/i!..,\qquad (1)$$

где $\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)$ и $\varphi^{(i)}(x)=(-1)^i\,H_i\,(x/\sigma^2)\varphi(x)$, причем σ – дисперсия исходной плотности $f(x)$.

В выражении (1) коэффициенты c_i с нечетными индексами равны нулю, а для коэффициентов с четными индексами c_{2s} (s=1, 2, …) справедливо:

$c_4 = \mu_4 / \sigma^4 - 3$; (эксцесс);

$c_6 = \mu_6 / \sigma^6 - 15\mu_4 / \sigma^4 + 30$;

$c_8 = \mu_8 / \sigma^8 - 28\mu_6 / \sigma^6 + 210\mu_4 / \sigma^4 - 315$;

$c_{10} = \mu_{10} / \sigma^{10} - 45\mu_8 / \sigma^8 + 630\mu_6 / \sigma^6 - 3150\mu_4 / \sigma^4 + 3780$;

$c_{12} = \mu_{12} / \sigma^{12} - 66\mu_{10} / \sigma^{10} + 1485\mu_8 / \sigma^8 - 13860\mu_6 / \sigma^6 + 51975$.

Выражение (1) для ортогонального разложения плотности $f(x)$ с учетом полученных результатов принимает вид:

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,[1 + \sum_{s=2} \frac{c_{2s}}{(2s)!} H_{2s}(x/\sigma^2)]\,, \tag{2}$$

в котором σ^2 и μ_{2s} вычисляются по исходной плотности $\mathrm{f}(x)$, а выражения для четных полиномов Эрмита имеют следующий вид:

$\mathrm{H}_4(y) = y^4 - 6y^2 + 3$;

$\mathrm{H}_6(y) = y^6 - 15y^4 + 45y^2 - 15$;

$\mathrm{H}_8(y) = y^8 - 28y^6 + 210y^4 - 420y^2 + 105$;

$\mathrm{H}_{10}(y) = y^{10} - 45y^8 + 630y^6 - 3150y^4 + 4725y^2 - 945$;

$\mathrm{H}_{12}(y) = y^{12} - 66y^{10} + 1485y^8 - 13860y^6 + 51975y^4 - 62370y^2 + 10395$.

В приведенных выражениях $y = x/\sigma^2$.

Результаты сравнения нормированных плотностей $\mathrm{f}(x)$ и их ортогонального разложения полиномами Эрмита $f(x)$ для смешанных законов обоих типов и обобщенного закона Пуассона представлены в работе [11]. Учитывая симметричность кривой плотности распределения, рассматривались только положительные значения погрешности ξ в пределах от 0 до 6σ, – практически весь интервал возможных значений погрешности, который был разбит на 24 отрезка одинаковой длины (по 0,25σ), и для средины каждого i-го отрезка вычислялись значение исходной плотности $\mathrm{f}(\xi_i)$ и ее разложения $f(\xi_i)$.

В качестве критерия Э, характеризующего соответствие ортогонального разложения $f(\xi_i)$ исходной нормированной плотности $\mathrm{f}(\xi_i)$, выбрана следующая сумма:

$$Э = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24}\left\{\frac{[f(\xi_i) - \mathrm{f}(\xi_i)]^2}{\mathrm{f}(\xi_i)}\right\}^{1/2}, \tag{2}$$

выражающая относительное уклонение плотности $\mathrm{f}(x)$ от ее разложения $f(x)$.

Для плотности каждого из трех законов распределения рассчитывали критерий Э при различном числе составляющих разложения, т. е. вначале в ортогональном разложении $f(x)$ учитывали только первое слагаемое и рассчитывали эффективность $Э_1^{(n)}$. Затем вычисляли значение $Э_2^{(n)}$ сохраняя в разложении $f(x)$ два слагаемых. Аналогично находили значения критериев $Э_3^{(n)}$ и $Э_4^{(n)}$ для разложения с тремя и четырьмя слагаемыми.

В табл. 1 приведены значения критерия Э для всех трех исследуемых законов распределения с учетом числа слагаемых разложения от одного до четырех.

Таблица 1 – Результаты расчета эффективности $Э_i^{(n)}$

Закон распределения, существенный параметр	$Э_1^{(10)}$	$Э_2^{(10)}$	$Э_3^{(10)}$	$Э_4^{(10)}$
Смешанный первого типа, n=10	0,0037	0,0048	0,0057	0,0115
Смешанный второго типа, n=10	0,0033	0,0042	0,0047	0,0090
Обобщенный Пуассона, c =5	0,0250	0,0430	0,0670	0,0870

Из таблицы следует, что ортогональное разложение плотности для трех рассмотренных законов распределения обладает наилучшей сходимостью с самой плотностью при использовании только первого члена разложения (2), т. е. оптимальное ортогональное разложение имеет следующее выражение:

$$f_1(\mathrm{y}) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\mathrm{y}^2/2)[1 + (\mu_4 - 3)\,(\mathrm{y}^4 - 6y^2 + 3)/24\,], \qquad (3)$$

где $y = x/\sigma^2$.

В заключение рассмотрим плотность обобщенного закона Пуассона, порождаемого законом Гаусса, с существенным параметром c=5 и соответствующее ей ортогональное разложение (3) с первым членом. Стандартная плотность распределения этого типа описывается следующим выражением [12]:

$$\mathrm{f}(\xi) = \frac{\exp(-\mathrm{c})}{(2\pi)^{1/2}\,\sigma} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{c}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\,\mathrm{k}^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\mathrm{k}\sigma^2}\right),$$

где σ и c – соответственно масштабный и существенный параметры распределения.

Так как дисперсия рассматриваемого распределения равна $\mu_2 = \mathrm{c}^2$, то нормированная плотность обобщенного закона Пуассона имеет следующий аналитический вид:

$$\mathrm{g(y)} = \frac{\exp(-\mathrm{c})}{(2\pi)^{1/2}}\,\mathrm{c}^{1/2} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{c}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\,\mathrm{k}^{1/2} \exp\left(-\frac{\mathrm{c\,y}^2}{2\mathrm{k}}\right).$$

Рассчитываем значения ортогонального разложения $f_1(\mathrm{y})$ упомянутой плотности, содержащего только одно первое слагаемое, и самой нормированной плотности $\mathrm{g(y)}$, учитывая, что $\mu_4 = 3\,(\mathrm{c}+\mathrm{c}^2)/\mathrm{c}^2$. Результаты расчетов разложения и плотности приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Значения плотности $\mathrm{g(y)}$ и ее ортогонального разложения $f_1(\mathrm{y})$

y	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25
$f_1(\mathrm{y})$	0,429	0,412	0,366	0,301	0,230	0,165
$\mathrm{g(y)}$	0,382	0,370	0,333	0,282	0,227	0,173
y	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75
$f_1(\mathrm{y})$	0,112	0,073	0,047	0,030	0,020	0,012
$\mathrm{g(y)}$	0,127	0,089	0,060	0,039	0,025	0,015
y	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25
$f_1(\mathrm{y})$	0,0078	0,0046	0,0026	0,0014	0,0007	0,0003
$\mathrm{g(y)}$	0,0092	0,0054	0,0031	0,0017	0,0009	0,0004
y	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50	5,75
$f_1(\mathrm{y})$	0,0001	0,00005	0,00002	0,000007	0,000002	0,00
$\mathrm{g(y)}$	0,0002	0,0001	0,00006	0,00003	0,00001	0,000006

Из полученной таблицы следует, что ортогональное разложение плотности обобщенного пуассоновского распределения погрешностей навигационных измерений, содержащее только первый член, имеет хорошую сходимость с самой плотностью распределения.

Выводы и предложения:

1. Приведено ортогональное разложение стандартных и нормированных плотностей законов распределения погрешностей навигационных измерений.
2. Рассчитан критерий эффективности ортогональных разложений и выявлено, что точность описания ортогональным разложением исходной плотности снижается с увеличением числа членов разложения.
3. Рассмотрено три закона распределений с «утяжеленными хвостами», которые можно представить ортогональным разложением, содержащим только первый член, что позволяет применять ортогональное разложение для описания случайных погрешностей навигационных измерений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондрашихин В. Т. Определение места судна / В. Т. Кондрашихин – М. : Транспорт, 1989. – 230 с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32. – № 3. – P. 426–429.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Астайкин Д. В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Д. В. Астайкин, Б. М. Алексейчук // Автоматизация судовых технических средств : науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. – Одесса : ОНМА. – С. 3–9.
5. Сикирин В. Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона / В. Е. Сикирин // Судовождение : сб. научн. трудов / ОНМА.– Вып. 26. – Одесса : ИздатИнформ, 2016. – С. 152–156.
6. Астайкин Д. В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях / Д. В. Астайкин, В. Е. Сикирин, И. И. Ворохобин, Б. М. Алексейчук. – Saarbrucken, Deutschland/Германия : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.
7. Мудров В. М. Методы обработки измерений / В. М. Мудров, В. Л. Кушко. – М. : Советское радио, 1976. – 192 с.
8. Бурмака И. А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / И. А. Бурмака, Д. В. Астайкин, Б. М. Алексейчук // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. – Санкт-Петербург, 2016. – Выпуск 1 (35). – С. 24–29.
9. Алексейчук Б. М. Идентификация закона распределения погрешностей измерений / Б. М. Алексейчук, С. С. Пасечнюк // Судовождение : Сб. научн. трудов. / ОНМА. – Вып. 27. – Одесса : «ИздатИнформ», 2016.
10. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер – М. : Мир, 1975. – 648 с.
11. Ворохобин И. И. Эффективность применения полиномов Эрмита для ортогонального разложения плотностей распределения навигационных погрешностей / И. И. Ворохобин, В. Е. Сикирин, И. Ю. Фусар // East European Scientific Journal. – 2017. – № 11 (27). Part 1. – P. 24–30.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. / Феллер В. – М. : Мир, 1984. – 752 с.

REFERENCES

1. Kondrashikhin V.T. Location of ship / Kondrashikhin V.T. – M. : Transport, 1989. – 230 s.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32. – № 3. – P. 426–429.
3. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58, № 2, p. 207-225.
4. Astayrin D. V. Authentication of laws of distributing of navigation errors by the mixed laws of two types / D.V.Astayrin, B. M. Alekseychuk // Avtomatizatsiya sudovyh tehnicytskih sredstv: nauch.-tehn. sb. – 2014. – Vyp. 20. Odessa : ONMA. – P. 3–9.
5. Sikirin V. E. Description of navigation errors by the generalized distributing of Puasson / Sikirin V.E.// Sudovozhdenie: Sb. nauchn. trudov. / ONMA, Vyp. 26. – Odessa : «IzdatInform», 2016 - P. 152 – 156.
6. Astayrin D. V. Estimation of exactness of coordinates of ship at the surplus measuring / Astayrin D. V., Sikirin V. E., Vorokhobin I. I., Alekseychuk B. M. – Saarbrucken, Deutschland/ Germaniya : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 p.
7. Mudrov V. M. Methods of treatment of measurings / Mudrov V.M., Kushko V.L. – M. : Sovetskoe radio, 1976. – 192 p.
8. Burmaka I. A. Estimation of efficiency of coordinates of ship at the surplus measuring / Burmaka I. A., Astaykin D. V., Alekseychuk B. M. // Vestnik Gosudarstvennogo univtrsiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. – Sankt-Peterburg, 2016. – vypusk 1 (35). – P. 24–29.
9. Alekseychuk B. M. Authentication of law of distributing of errors of measuring / Alekseychuk B.M., Pasechnyuk S.S. // Sudovozhdenie : Sb. nauchn. trudov. / ONMA, Vyp. 27. – Odessa : IzdatInform, 2017. – P. 10–14.
10. Cramer H. Mathematical methods of statistics / Cramer H. – M. : Mir. – 1975. – 648 p.
11. Vorokhobin I. I. Efficiency of application of the Ermit's polynomials for ortogonal decomposition of closeness of distributing of navigation errors / Vorokhobin I. I., Sikirin V. E., Fusar I. Y. // East European Scientific Journal. – 2017. – № 11 (27), part 1. – P. 24–30.
12. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. V.2. / Feller W. – M. : Mir. 1984. – 752 p.

Ворохобін І. І., Сікірін В. Є., Фусар І. Ю. ОРТОГОНАЛЬНЕ РОЗКЛАДАННЯ ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ПОХИБОК НАВІГАЦІЙНИХ ВИМІРЮВАНЬ В РЯД ГРАМА-ШАРЛЬЕ ТИПУ А

Здійснено аналіз можливостей застосування ортогонального розкладання щільності розподілу похибок навігаційних вимірювань за допомогою поліномів Ерміту. Приведені властивості поліномів Ерміту для щільності закону розподілу Гаусу. Одержані в явному виді розкладання щільності на базі нормованого і ненормованого нормального закону ортогональними поліномами Ерміту в ряд Грама-Шарльє типу А.

Приведені результати оцінки ефективності ортогонального розкладання щільності розподілу випадкових похибок навігаційних вимірювань шляхом порівняння нормованої щільності з їх ортогональними розкладаннями. В результаті аналізу виявилося, що найкраща ефективність ортогонального розкладання досягається у разі, коли воно містить тільки один член.

Як приклад розглянута щільність узагальненого розподілу Пуассону і її ортогональне розкладання поліномами Ерміту. Показана їх хороша збіжність і підтверджена можливість застосування ортогонального розкладання замість щільності розподілу випадкових похибок навігаційних вимірювань.

Ключові слова: *навігаційна аварійність, закони розподілу випадкових похибок, ортогональне розкладання щільності розподілу, поліноми Ерміту, ряд Грама-Шарльє типу А.*

Vorokhobin I. I., Sikirin V. Y., Fusar I. Y. ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF CLOSENESS OF DISTRIBUTING OF ERRORS OF THE NAVIGATION MEASURING IN THE ROW OF THE GRAMA-SHARL TYPE A

The analysis of possibilities of application of orthogonal decomposition of closenesses of distributing of errors of the navigation measuring by the Ermyt's polynomials is produced. Properties of the Ermyt's polynomials for the closeness of law of distributing of Gauss are resulted.

Got in the obvious type of decomposition of closenesses on the base of the rationed and unrationed normal law the orthogonal polynomials of Ermyt in the row of the Grama-Sharl type A.

The results of estimation of efficiency of orthogonal decomposition of closenesses of distributing of random error terms of the navigation measuring by comparison of the rationed closenesses with their orthogonal decompositions are resulted. It appeared as a result of analysis, that was achieved the best efficiency of orthogonal decomposition in the case when it contains one element only.

As an example the closeness of the generalized distributing Puasson and its orthogonal decomposition by the Ermyt's polynomials is considered. Their good accordance is shown and possibility of application of orthogonal decomposition in place of closeness of distributing of random error terms of the navigation measuring is confirmed.

Keywords: *navigation accident rate, laws of distributing of random error terms, orthogonal decomposition of closeness of distributing, Ermyt's polynomials, row of the Grama-Sharle type A.*

Статтю прийнято
до редакції 23.10.17