

## СЕКЦІЯ 10 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.356.7.004.12

**Янковий В.О.***кандидат економічних наук,  
доцент кафедри економіки і управління національним господарством  
Одеського національного економічного університету*

### ДО ПРОБЛЕМИ ВИБОРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ФОРМИ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ

У статті розглянуто проблеми вибору математичної форми виробничої функції в економічному дослідженні. Проаналізовано теоретичні та практичні особливості застосування виробничої функції Кобба-Дугласа і функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів. Надано рекомендації щодо їхнього використання в процесі дослідження впливу виробничих ресурсів на випуск продукції суб'єктів господарювання.

**Ключові слова:** вибір виду виробничої функції, функція Кобба-Дугласа і функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів.

#### **Янковой В.А. К ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ**

В статье рассмотрены проблемы выбора математической формы производственной функции в экономическом исследовании. Проанализированы теоретические и практические особенности применения производственной функции Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замещения ресурсов. Даны рекомендации по их использованию в процессе исследования влияния производственных ресурсов на выпуск продукции субъектов хозяйствования.

**Ключевые слова:** выбор вида производственной функции, функция Кобба-Дугласа и функция с постоянной эластичностью замещения ресурсов.

#### **Yankovyi V.O. TO THE PROBLEM OF THE CHOICE OF THE MATHEMATICAL FORM OF THE PRODUCTION FUNCTION**

The problems of choice of the mathematical form of the production function in the economic research are considered. The theoretical and practical features of application of the Cobb-Douglas production function and function with constant elasticity of substitution of the resources are analyzed. We give the recommendations for their practical use in the process of analyzing the impact of the production resources on the output of the undertakings.

**Keywords:** choice of the type of the production function, Cobb-Douglas function and function with constant elasticity of substitution of the resources.

**Постановка проблеми.** При дослідженні сфери виробництва одним із ключових моментів, від якого залежить успіх усього економіко-математичного моделювання, є етап обґрунтування вибору конкретного виду виробничої функції (ВФ). Відомо, що результат процесу виробництва, зокрема обсяг створених матеріальних благ, складається під впливом численних факторів, які традиційно узагальнюються в такі агреговані чинники, як капітал, праця, НТП та ін. При цьому кількісна оцінка характеру і ступеня впливу даних факторів виступає безпосередньою метою побудови та практичного застосування самих ВФ.

В економічній теорії запропоновано більше десятка форм і видів ВФ, використання яких у першу чергу визначається їхньою адекватністю реальній господарській дійсності. Окрім того, важливим чинником при виборі форми математичної моделі представляється масштаб виробничої системи. Очевидно, що вся економіка або її галузь (регіон) будуть описуватись моделлю, яка вирізняється від тієї, що буде адекватною для окремого підприємства (об'єднання) із фіксованим технологічним процесом. Тому вибір виду ВФ у кожному конкретному випадку повинен здійснюватись на базі врахування цілей і завдань моделювання, особливостей реальної виробничої системи, що досліджується, передумов і властивостей ВФ як математичного аналога економічних явищ і пропорцій, котрі спостерігаються у виробництві.

У процесі економіко-математичного моделювання залежності випуску продукції від основних виробничих ресурсів на рівні підприємства, галузі, регіону найбільш популярними є ВФ Кобба-Дугласа і функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів, або CES-функція (від англ. аббревіатури *Constant Elasticity of Substitution*).

У зв'язку з цим виникає цілком обґрунтоване питання: якій з указаних двох моделей віддати перевагу в реальному економічному дослідженні? чи є переконливі аргументи на користь тієї чи іншої ВФ, що впливають із властивостей ВФ Кобба-Дугласа і CES-функції?

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питання обґрунтування вибору конкретного виду ВФ в економічному дослідженні розглядалися багатьма зарубіжними і вітчизняними вченими, серед яких Е. Хеді, Д. Діллон, Р. Вінн, К. Холден, К.Г. Трегубов, Л.Л. Терехов, Г.Б. Клейнер, Н.Б. Баркалов, Ю.П. Іванілов, М.К. Плакунов, Р.Л. Раяцкас, М.В. Казакова та ін. [1–8].

Наразі найбільш розповсюдженою рекомендацією щодо вибору між ВФ Кобба-Дугласа і CES-функцією в економічному дослідженні є наступна: «ВФ Кобба-Дугласа використовується для опису середньомасштабних об'єктів (від промислового об'єднання до галузі), що характеризуються стійким, стабільним функціонуванням. CES-функція застосовується у випадках, коли відсутня точна інформація про

рівень взаємозамінності виробничих факторів і є підстави припускати, що цей рівень суттєво не змінюється при зміні обсягів ресурсів, що витрачаються. Вона може бути використана (за наявності засобів оцінювання параметрів) для моделювання систем будь-якого рівня» [9; 10, с. 173–174].

На нашу думку, така аргументація представляється не досить переконливою, поверхневою, яка у дійсності не враховує реальних теоретичних особливостей кожної з ВФ, що розглядаються, а також практичних аспектів їхнього застосування в економічному дослідженні. Тим більше що стосовно ВФ Кобба-Дугласа мова йде про рівень виробничої системи, котра моделюється, а по відношенню до CES-функції – про ступінь взаємозамінності виробничих факторів «капітал» і «праця». Тобто пропонуються різні критерії вибору між ВФ Кобба-Дугласа і CES-функцією.

**Мета статті** полягає в обговоренні теоретико-методологічних особливостей ВФ Кобба-Дугласа і CES-функції, практичних аспектів їхнього застосування в економічному дослідженні, зокрема пов'язаних із розрахунком параметрів даних ВФ, а також розробці рекомендацій щодо вибору певної моделі в кожному конкретному випадку.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Почнемо з розгляду математичних формул ВФ Кобба-Дугласа і CES-функції з наведенням важливіших економіко-математичних характеристик виробництва, що визначаються на їх основі (табл. 1, 2). ВФ Кобба-Дугласа має наступний вигляд:

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad (1)$$

де  $Y$  – випуск продукції у вартісному виразі;  $K$  – вартість капіталу, спрямованого у виробничі фонди;  $L$  – витрати на оплату праці;  $A$  – невідомий коефіцієнт шкали ( $0 < A$ );  $\alpha, \beta$  – невідомі параметри ВФ ( $0 < \alpha < 1$ ;  $0 < \beta < 1$ ).

Таблиця 1

Основні економіко-математичні характеристики ВФ Кобба-Дугласа

Показник	K	L
1. Середня віддача	$\frac{Y}{K} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{K} = AK^{\alpha-1} L^\beta$	$\frac{Y}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} = AK^\alpha L^{\beta-1}$
2. Гранична віддача	$\frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta$	$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\beta K^\alpha L^{\beta-1}$
3. Еластичність випуску продукції, %	$\alpha$	$\beta$
4. Потреба в ресурсах	$K = \left(\frac{Y}{AL^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	$L = \left(\frac{Y}{AK^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$
5. Заміщення ресурсів (фондоозброєність)	$\frac{K}{L} = \left(\frac{Y}{AL^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} : L = A^{-\frac{1}{\alpha}} Y^{\frac{1}{\alpha}} L^{-1-\frac{\beta}{\alpha}}$	
6. Гранична норма заміщення ресурсів	$h = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$	
7. Еластичність заміщення ресурсів, %	$\sigma = 1$	
8. Ступінь однорідності	$\alpha + \beta$	

CES-функція представляється так:

$$Y = B[cK^{-p} + (1-c)L^{-p}]^{-\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

де  $B$  – невідомий коефіцієнт шкали ( $0 < B$ );  $c$  – невідомий коефіцієнт ваги виробничого фактора ( $0 < c < 1$ );  $p$  – невідомий параметр ВФ ( $-1 < p$ );

$\gamma$  – невідомий показник ступеня однорідності ВФ ( $0 < \gamma$ ).

Таблиця 2  
Основні економіко-математичні характеристики CES-функції

Показник	K	L
1. Середня віддача	$\frac{Y}{K} = BK^{-1}[c+(1-c)\left(\frac{L}{K}\right)^{-p}]^{-\frac{1}{p}}$	$\frac{Y}{L} = Bc^{-1}[c\left(\frac{K}{L}\right)^{-p} + (1-c)]^{-\frac{1}{p}}$
2. Гранична віддача	$\frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{c}{B^p} \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+p}$	$\frac{\partial Y}{\partial L} = -\frac{1-c}{B^p} \left(\frac{Y}{L}\right)^{1+p}$
3. Еластичність випуску продукції, %	$\frac{c}{B^p} \left(\frac{Y}{K}\right)^p$	$\frac{1-c}{B^p} \left(\frac{Y}{L}\right)^p$
4. Потреба в ресурсах	$K = \left[\left(\frac{Y}{B}\right)^{\frac{p}{1+p}} - (1-c)L^{-\frac{p}{1+p}}\right]^{-\frac{1+p}{p}}$	$L = \left[\left(\frac{Y}{B}\right)^{\frac{p}{1+p}} - cK^{-\frac{p}{1+p}}\right]^{-\frac{1+p}{p}}$
5. Заміщення ресурсів (фондоозброєність)	$\frac{K}{L} = \left[ \frac{\left(\frac{Y}{B}\right)^{\frac{p}{1+p}} - cK^{-\frac{p}{1+p}}}{\left(\frac{Y}{B}\right)^{\frac{p}{1+p}} - (1-c)L^{-\frac{p}{1+p}}} \right]^{\frac{1+p}{p}}$	
6. Гранична норма заміщення ресурсів	$h = \frac{1-c}{c} \left(\frac{K}{L}\right)^{1+p}$	
7. Еластичність заміщення ресурсів, %	$\sigma = \frac{1}{1+p}$	
8. Ступінь однорідності	$\gamma$	

У роботах [11; 12, с. 170–171] було показано, що при певних значеннях фондоозброєності обидві функції забезпечують максимум випуску продукції, а гранична норма заміщення ресурсів стає рівною одиниці:

1) ВФ Кобба-Дугласа

при  $K/L = \alpha/\beta$   $Y_{\max} = \frac{A\alpha^\alpha \beta^\beta (K+L)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$ ;  $h = 1$ ; (3)

2) CES-функція

при  $K/L = \left(\frac{c}{1-c}\right)^{\frac{1+p}{p}}$   $Y_{\max} = Bc^{-1}(1-c)^{-\frac{1}{p}} [K/L+1]^{-\frac{1}{p}}$ ;  $h = 1$ . (4)

ВФ (1) і (2) аналогічні в тому, що стосується припущення про постійне убування граничної віддачі виробничих ресурсів  $K$  і  $L$ . Це так звана неокласична умова, що випливає з теорії поведінки споживача, оскільки відносно ресурсів суб'єкти господарювання є споживачами і ВФ характеризує саме цей аспект – виробництво як споживання. Зазначимо, що ВФ (1) і (2) тісно пов'язані між собою: загальна поведінка ефективності виробництва при зміні його масштабів, характерна для цих двох функцій, завжди збігається.

Однак між ВФ (1) і (2) є й суттєві відмінності. Так, еластичність заміщення ресурсів  $\sigma$ , яка служить мірою можливості заміни праці капіталом і, навпаки, для функції Кобба-Дугласа завжди дорівнює одиниці. Дане обмеження вважається дуже жорстким, яке часто не відповідає реальній економічній дійсності. У цьому плані CES-функція має явну перевагу: величина  $\sigma$  для неї може приймати будь-які значення, хоча так само, як і у ВФ Кобба-Дугласа, вона є постійною величиною, що випливає з самої її назви. При  $p \rightarrow 0$   $\sigma \rightarrow 1$  і відбувається перехід від ВФ (2) до ВФ (1). Отже, можна стверджувати: CES-функція узагальнює ВФ Кобба-Дугласа, що значною мірою пояснює подібність їхньої загальної поведінки.

Окрім того, є ще один вагомий аргумент на користь вибору в якості інструменту економічного аналізу саме ВФ (2). Легко показати, що характер залежності продуктивності праці ( $Y/L$ ) від фондоозброєності ( $K/L$ ) у рамках даних ВФ досить різний.

Для функції Кобба-Дугласа при  $K/L \rightarrow \infty$  при будь-яких допустимих значеннях параметрів  $A, \alpha, \beta$  продуктивність праці також прагне в нескінченність. А CES-функція при довільних значеннях параметрів  $B, c, \rho, \gamma$  і при  $K/L \rightarrow \infty$  має верхню межу  $C$  (рис. 1).

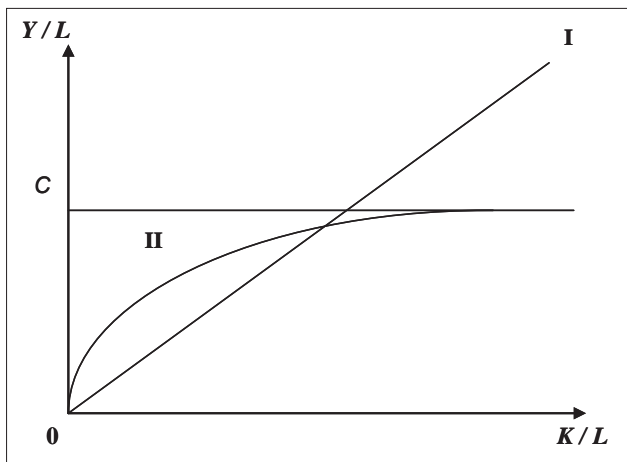


Рис. 1. Графік залежності продуктивності праці від фондоозброєності в рамках ВФ Кобба-Дугласа (I) і CES-функції (II)

Уважається, що обмеженість продуктивності праці залежно від фондоозброєності в рамках ВФ (2) є однією з переваг її застосування в економічних дослідженнях у порівнянні з ВФ (1). Хоча для вітчизняної промисловості економічна ситуація, коли  $K/L \rightarrow \infty$ , представляється скоріше абстрактно-гіпотетичною, ніж реальною.

Невідомі коефіцієнти і параметри ВФ Кобба-Дугласа і CES-функції підлягають оцінюванню за відомими значеннями показників  $Y, K, L$ , узятими з бухгалтерської та фінансової звітності досліджуваних суб'єктів господарювання (підприємств, організацій тощо).

Оцінювання невідомих параметрів ВФ Кобба-Дугласа зазвичай здійснюється шляхом лінеаризації за допомогою логарифмування лівої та правої частин (1) із подальшим застосуванням стандартних програм кореляційно-регресійного аналізу. Тобто побудова ВФ Кобба-Дугласа та розрахунок основних економіко-математичних характеристики табл. 1 за даними звітності представляється відносно простим завданням. Хоча і тут є свої «підводні камені» у вигляді коллінеарності логарифмів виробничих чинників  $\ln K$  і  $\ln L$ , яка в даному випадку обумовлена тим, що фактори  $K$  і  $L$  лінійно залежні внаслідок характеристики ними однієї властивості досліджуваних підприємств – їх розміру. Коллінеарність чинників викликає проблеми при оцінці невідомих параметрів ВФ Кобба-Дугласа, які в даному випадку втрачають точність і сталість, що особливо відчутно проявляється на малих вибірках і веде до отримання неадекватних, наприклад, неповних моделей  $Y = f(K)$  чи  $Y = f(L)$ .

Що стосується CES-функції, то вираження (2) принципово неможливо привести до лінійного вигляду і, отже, використати звичайні методи оцінки невідомих коефіцієнтів і параметрів. Тому в даному випадку застосовують методи приблизного ітеративного оцінювання, зокрема, нелінійний метод найменших квадратів.

На нашу думку, найбільш конструктивним представляється підхід до апроксимації CES-функції, запропонований Дж. Кментой. Він заснований на

її логарифмуванні й розкладанні в ряд Тейлора з подальшим застосуванням до отриманої наближеної моделі кореляційно-регресійного аналізу [13].

М. Кубініва та ін., використовуючи підхід Кменти в якості методу знаходження первісної оцінки параметрів CES-функції, розробили процедуру пошуку рішення поставленого завдання із заданою точністю на базі використання ітеративного алгоритму мінімізації цільової функції залишків моделі за методом Марквардта. Дана процедура знайшла своє втілення в програмі MACRO6, написаної на мові Бейсік [14, с. 137–149], яка досить легко адаптується до сучасного програмного забезпечення за допомогою макросів редактора Excel.

**Висновки.** Найбільш популярна в економічних дослідженнях ВФ Кобба-Дугласа відносно проста і володіє рядом позитивних характеристик: 1) добре економічно інтерпретується; 2) легко приводиться до лінійного вигляду шляхом логарифмування вихідних змінних; 3) має невелике число невідомих параметрів, а відповідні їм показники економічного зростання, ефективності та ін. мають зручну аналітичну форму вираження.

Однак дана функція має також ряд недоліків: 1) еластичність заміщення одного виробничого ресурсу іншим постійна і дорівнює одиниці, що є дуже жорстким обмеженням, яке часто не відповідає економічній дійсності; 2) необмеженість росту продуктивності праці в залежності від зростання фондоозброєності викликає сумніви в адекватності ВФ (1); 3) взаємозалежність чинників викликає проблеми при оцінюванні невідомих параметрів, які в даному випадку втрачають точність і сталість, що особливо відчутно проявляється на малих вибірках і може привести до отримання неадекватної (наприклад, неповної) моделі.

CES-функція володіє тими ж перевагами, що і ВФ Кобба-Дугласа. Окрім того, вона вільна від недоліків ВФ (1). Тому ми вважаємо, що використання CES-функції в економічних дослідженнях із теоретичної точки зору має певні пріоритети в порівнянні із застосуванням ВФ Кобба-Дугласа. Однак слід мати на увазі, що функція (2) унаслідок своєї складності не лінеаризується, що обумовлює розрахунок її параметрів за допомогою нелінійних методів оцінювання (градієнтні методи оптимізації, метод Марквардта, методи прямого пошуку тощо). Це, природно, вимагає наявності відповідного програмного забезпечення і викликає певні обчислювальні труднощі для дослідників.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

- Хедди Э., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве / Э. Хедди, Д. Диллон ; пер. с англ. – М. : Прогресс, 1965. – 600 с.
- Терехов Л.Л. Производственные функции / Л.Л. Терехов. – М. : Статистика, 1974. – 128 с.
- Иванов Ю.П. Математические модели в экономике / Ю.П. Иванов, В.А. Лотов. – М. : Наука, 1979. – 304 с.
- Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден ; пер. с англ. С.А. Николаенко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
- Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста / Н.Б. Баркалов. – М. : МГУ, 1981. – 128 с.
- Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе / М.К. Плакунов, Р.Л. Раяцкас. – Вильнюс : Минтис, 1984. – 308 с.
- Клейнер Г.Б. Производственные функции : теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
- Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/nrp/wpaper/31.pdf>.

9. Артемова А.В. Методика оценивания затрат при производстве продукции / А.В. Артемова, М.А. Грищенко, Д.В. Лисняк [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [file:///C:/Users/qwerty/Downloads/piprp\\_2014\\_1\\_3%20\(4\).pdf](file:///C:/Users/qwerty/Downloads/piprp_2014_1_3%20(4).pdf).
10. Боровской Д.Н. Производственные функции и проблема выбора экономико-математической модели активного элемента / Д.Н. Боровской // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 1(28). – С. 172–177.
11. Черевко Є.В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є.В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, 2007. – № 26. – С. 359–365.
12. Янковой В.А. Анализ хозяйственной деятельности предприятий пищевой промышленности на базе CES-функции / В.А. Янковой // Соціо-еколого-економічний розвиток агропродовольчої сфери України в сучасних умовах : проблеми та шляхи розв'язання : [монографія] ; за ред. О.І. Павлова. – Одеса : Астропринт, 2015. – С. 167–180.
13. Kmenta J. (1967). On Estimation of the CES Production Function. *International Economic Review*. – 1967. – № 2, June, – P. 180–189.
14. Математическая экономика на персональном компьютере / М. Кубинива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ ; пер. с япон. под ред. М. Кубонива. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.