

УДК 339.727.2

Дзюба П.В.

кандидат економічних наук, доцент,  
доцент кафедри міжнародних фінансів  
Інституту міжнародних відносин  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка

## ОПТИМІЗАЦІЯ МІЖНАРОДНИХ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ПОРТФЕЛІВ ЗА СЕРЕДНЬОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЮ ДОХІДНІСТЮ: ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ПОГЛЯД НА ПОЗАПАРАДИГМАЛЬНУ КОНЦЕПЦІЮ

У статті досліджено метод оптимізації міжнародних інвестиційних портфелів за середньою геометричною дохідністю, або критерієм Келлі. Визначено переваги та недоліки цього методу. Установлено, що цей підхід виник і розвивався фактично одночасно з теорією портфеля, однак при цьому є позапарадигмальним за своєю сутністю. Виявлено еволюційні передумови виникнення критерію Келлі. Доведено, що оптимізація за цим критерієм носить об'єктивний характер, оскільки визначає оптимальний портфель за конкретним кількісним показником.

**Ключові слова:** міжнародний інвестиційний портфель, парадигма міжнародного портфельного інвестування, оптимізація, критерій Келлі, максимізація середньої геометричної дохідності, максимізація майбутньої вартості.

### Дзюба П.В. ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖДУНАРОДНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ ПО СРЕДНЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ДОХОДНОСТИ: ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ВЗГЛЯД НА ВНЕПАРАДИГМАЛЬНУЮ КОНЦЕПЦИЮ

В статье исследован метод оптимизации международных инвестиционных портфелей по средней геометрической доходности, или критерию Келли. Определены преимущества и недостатки этого метода. Установлено, что этот подход возник и развивался фактически параллельно с теорией портфеля, однако при этом является внепарадигмальным по своей сути. Выявлены эволюционные предпосылки возникновения критерия Келли. Доказано, что оптимизация по этому критерию носит объективный характер, поскольку определяет оптимальный портфель по конкретному количественному показателю.

**Ключевые слова:** международный инвестиционный портфель, парадигма международного портфельного инвестирования, оптимизация, критерий Келли, максимизация средней геометрической доходности, максимизация будущей стоимости.

### Dziuba P.V. OPTIMIZATION OF INTERNATIONAL INVESTMENT PORTFOLIOS USING THE MEAN GEOMETRIC RETURN: EVOLUTIONAL VIEW ON NON-PARADIGM CONCEPT

The article dwells on the mean geometric return method, or Kelly criterion of international investment portfolios optimization. Advantages and drawbacks of this method are found out. It is determined that this approach actually originated and was developing together with portfolio theory but is notwithstanding a non-paradigm in its essence. Evolutionary preconditions of Kelly criterion origins are revealed. The optimization using this criterion is proved to be an objective matter, since it defines one optimal portfolio using specified quantitative ratio.

**Keywords:** international investment portfolio, international portfolio investing paradigm, optimization, Kelly criterion, mean geometric return maximization, future value maximization.

**Постановка проблеми.** Сучасна теорія міжнародного портфельного інвестування пройшла тривалу еволюцію, увібравши в себе напрацювання різних напрямів економічної теорії, та сформувалася як цілісна й упорядкована епістемологічна сутність. І хоча вона й досі продовжує свій науковий розвиток, можна визначити її основні складники, ієрархію між ними та ключові взаємозв'язки. Так, попри те, що в основі цієї теорії лежать дві парадигми – портфельна та вартісна, – існують окремі концепції, котрі за своєю сутністю не підтримують жодної парадигмальної лінії, лише остеронь загальноприйнятих наукових підходів. У світлі оптимізації міжнародних інвестиційних портфелів – найбільш поширеного напрямку інвестиційної теорії – концепція середньої геометричної посідає особливе місце. Вона передбачає принципово відмінну від інших концепцій оптимізаційну логіку, дає оригінальні результати, інтуїтивно зрозумілі портфелі. Зважаючи на це, дослідження сутності та еволюційних умов формування концепції середньої геометричної є надзвичайно важливим із наукового погляду, а також має важливі практичні імплікації. Актуальним є питання визначення місця цієї концепції у парадигмі або обґрунтування її специфічного статусу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблематиці оптимізації інвестиційних портфелів приділили увагу багато відомих учених. Серед них відзначимо дослідження Г. Марковіца [20] та А. Роя [27], котрі є основоположниками домінуючої портфельної парадигми інвестиційної теорії. Важливі дослідження напряму оптимізації за принципом максимальної визначеності містяться в роботах Е. Арзака й В. Бави [1], Дінга й Лу [5] та ін. Численні емпіричні тести в частині порівняння результатів оптимізації міжнародних інвестиційних портфелів та портфелів місцевих ринків містяться в дослідженнях Б. Солніка [31], Х. Шаліта та Ш. Йітсхакі [30], Т. Меєра, К. Лі та Л. Роуз [22], Абід, Леунг, Моруа та Вонг [12], а також інших науковців.

**Мета статті** полягає у виявленні основних переваг та недоліків цього підходу, визначенні його місця в сучасній теорії міжнародного портфельного інвестування, проведенні порівняльного аналізу з іншими оптимізаційними концептами.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Концепція максимізації очікуваної дохідності панувала задовго до появи теорії портфеля. Вона виключала будь-яку диверсифікацію та не зважала на ризик. Концепція максимізації геометричної дохідності виникла після появи теорії портфеля. Її автором вважається А. Латане, який у статті 1959 р. виклав основні положення цієї концепції [15]<sup>1</sup>. Однак слід

<sup>1</sup> Номінально стаття Латане не стосується портфельного вибору. Він навіть використовує в назві специфічний термін ventures, що означає «справа», «починання», «ініціатива» тощо. Портфельний вибір – лише окремий випадок цієї концепції.

зазначити, що викладки Латане носили більш широкий характер, тоді як підхід до застосування методу середньої геометричної безпосередньо в контексті портфеля був запропонований ним у 1967 та 1969 рр. [16; 17]. Сама ж ідея застосування середньої геометричної виникла дещо раніше, її запропонував у 1956 році Дж. Келлі [13]. Він досліджував стратегію ставок азартного гравця, котрий мав приватну інформацію, яка, однак, не була повністю точною. Гравець, за припущенням, робив велику кількість ставок, постійно реінвестуючи як прибутки, так і збитки (умовно), а також вкладав додатково певний (фіксований) обсяг коштів кожного раунду. Висновок Келлі був таким: оскільки наявна інформація не є повністю точною, то занадто високі ставки можуть призвести до повного банкрутства, однак оскільки вона все ж є частково правдивою, то занадто низькі ставки не дають змоги повністю скористатися цією правдивістю. Повинен бути певний оптимальний рівень ставки, котрий гравець повинен здійснювати кожного раунду. Такий оптимальний рівень досягається за рахунок максимізації середньої геометричної інвестованого капіталу та забезпечує максимізацію кінцевої майбутньої вартості вкладених коштів. У літературі цей підхід часто називають критерієм Келлі [7, с. 137; 32, с. 284 та ін.]. Публікації з проблематики ймовірнісного аналізу азартних ставок, що важливо, розглядають фондовий ринок як один із варіантів таких ставок – поряд, скажімо, з рулеткою, баккарою, блек-джеком та колесом фортуни [32, с. 273–281].

Ключовою передумовою застосування цієї концепції для пошуку оптимального портфеля стала, на нашу думку, невідомість функції корисності, а також окремі пов'язані з цим аспекти, як то припущення про нормальний характер розподілу дохідностей та ін. Головна ідея такого оптимізаційного підходу полягає у тому, що оптимальним портфелем слід уважати той, який має найвищу середню геометричну дохідність. Як зазначає сам Латане, Марковіч розробив концепцію визначення ефективних портфелів, але не спосіб вибору одного з них. Критерій же середньої геометричної є об'єктивним за своєю сутністю основою та не передбачає багатоваріантності вибору [7, с. 138].

На думку Латане, оцінюючи очікувані дохідності, слід брати до уваги такі чинники, як значення дохідностей очікуваних майбутніх альтернатив та ймовірність реалізації цих альтернатив. Неврахування цих чинників унеможливить інвестиційний вибір раціонального інвестора [15, с. 144]. Техніка оптимізації, таким чином, повинна складатися з трьох етапів: постановка мети та критеріїв вибору стратегій, формування матриці інвестиційних альтернатив (очікувана дохідність та ймовірність реалізації тієї чи іншої альтернативи), вибір стратегії з матриці на основі визначених критеріїв. Мету доцільно формулювати у форматі максимізації певного показника, пов'язаного з вартістю. Приміром, якщо одна стратегія дає вищу дохідність порівняно з іншими в усіх імовірнісних альтернативах, то її можна обрати вже на першому етапі. У такому разі ціль сама по собі дає змогу інвесторові знайти оптимальну інвестиційну альтернативу. Якщо ж за різних імовірнісних варіантів різні стратегії

дають різні результати, то такий вибір зробити вже неможливо. Інвестор потребує додаткового критерію, котрий дасть йому змогу такий вибір зробити. Цей критерій – субціль [15, с. 145]. У концепції максимізації середньої геометричної субціллю є те, що ймовірність ( $P'$ ) того, що дана стратегія дасть у кінці періоду дохід, не менший від інших суттєво відмінних стратегій, є максимальною.

Для інвестиційного портфеля як конкретну ціль логічно використовувати його кінцеву вартість з урахуванням реінвестування всіх проміжних доходів ( $W_i^n$ ). Латане довів, що портфель із найбільшою середньою геометричною ( $G$ ) має найвищу ймовірність  $P'$ , що й забезпечує досягнення поставленої субцілі – максимізацію  $W_i^n$ . Вона обчислюється за формулою:

$$G = \bar{r}_G = (1+r_1)^{t_1} (1+r_2)^{t_2} \dots (1+r_n)^{t_n} - 1, \quad (1)$$

де  $r_i$  – очікувана дохідність інвестиційної альтернативи з ймовірністю реалізації  $P_i$ .

Концепція максимізації середньої геометричної прихильників, було проведено низку емпіричних тестів. Вони, зокрема, показали, що здебільшого портфель із максимальною середньою геометричною є диверсифікованим. Він, однак, не буде ефективним за Марковіцем. Аналізуючи цей метод у контексті парадигмального конфлікту між концепцією ефективності та концепцією диверсифікації в рамках теорії портфеля, слід зазначити, що метод середньої геометричної не є результатом еволюції теорії портфеля, однак більшою мірою підтримує концепцію диверсифікації в її найвчужішому розумінні. Оптимальні за геометричною портфелі не є ефективними, однак є більш зрозумілими на інтуїтивному рівні.

Цей підхід не вимагає інформації стосовно характеру розподілу дохідностей, що є його важливою перевагою. Однак слід виділити й суттєвий недолік цього підходу. Це виключення значних негативних дохідностей (менших, від -1). У протилежному разі може виявитися ситуація, коли у формулі (1) доведеться діставати квадратний корінь (або корінь іншого ступеню) з від'ємного числа, що математично неможливо.

Існує два випадки, коли оптимальний за критерієм Келлі портфель буде ефективним. По-перше, коли функція корисності є логарифмічною за нормального розподілу<sup>2</sup>. По-друге, коли розподіл дохідностей є логнормальним. І хоча максимізація середньої геометричної є менш загальним підходом до оптимізації порівняно із максимізацією корисності, вона є більш практичною, оскільки на відміну від концепції корисності передбачає реальну можливість формування матриці інвестиційних альтернатив.

Л. Браймен також підтвердив доцільність використання середньої геометричної для максимізації майбутньої вартості [3]. Він довів, що максимізація середньої геометричної забезпечує досягнення оптимуму за двома критеріями, що також означає й максимізацію відповідної логарифмічної функції. По-перше, мінімізація витрат часу. Йдеться про те, яка стратегія забезпечить мінімальну кількість спроб для отримання наперед визначеної майбутньої вартості [3, с. 68–72]. По-друге, максимізація майбутньої вартості. Наперед визначеним показником у рамках цього критерію є кількість спроб, а максимізація середньої геометричної забезпечує максимізацію майбутньої вартості після цієї кількості спроб [3, с. 72–74].

Важливою особливістю середньої геометричної як методу оптимізації інвестиційних портфелів є

<sup>1</sup> Логарифмічна функція корисності фактично означає спадну схильність інвестора до ризику в системі координат «дохідність – ризик». Вона була запропонована для аналізу ризику ще Д. Бернуллі в 1738 р. [2].

те, що вона є надзвичайно ефективною у довготерміновій перспективі. У цьому контексті слід відзначити, що, по суті, одним із варіантів застосування середньої геометричної є так звана багатоперіодна оптимізація, ключовим цільовим орієнтиром якої є саме кінцева майбутня вартість, тому часто портфелі, оптимізовані цим методом, називають оптимальними портфелями зростання. Підтримуючи у цілому цю концепцію, Марковіц зазначив, що краще вкласти один цент під 6,01%, ніж 1 млн. дол. під 6% [19, с. 1273]. Багатоперіодність передбачає, що формулу (2) можна застосовувати не у форматі інвестиційних альтернатив із різною ймовірністю (по суті, одноперіодна оптимізація), а у форматі рівномірнісних послідовних періодів – кількість спроб у термінах Браймена. Вищезгадані методи оптимізації є фактично одноперіодними.

Крім розглянутих переваг методу середньої геометричної, він має низку недоліків. Одним з активних критиків цієї концепції був П. Самуельсон, який серед ключових проблем методу середньої геометричної називав те, що в реальності закон великих чисел Якоба Бернуллі не завжди підтверджується [28]. Цей закон, за інших рівних умов, передбачає, що гравець (інвестор) може відмовитися від одиничної (навіть доволі вигідної) ставки (інвестиції), однак погодиться на велику кількість таких ставок поспіль, оскільки це суттєво підвищить ймовірність максимізації його кінцевого блага. На думку Самуельсона, якщо інвестор намагається максимізувати свою корисність, то, відхиляючи одну ставку, він також відхилить і велику послідовну кількість таких ставок. Він також заперечив панівне після публікації досліджень Келлі та Латане положення про оптимальність середньої геометричної для визначеної кількості періодів (навіть тривалих) та за умови асимптотичного характеру апроксимації (логарифмічного характеру) функції корисності [29].

Серед інших суттєвих недоліків методу середньої геометричної слід відзначити те, що в короткотермінових періодах такі оптимальні портфелі можуть демонструвати суттєво гірші результати порівняно з портфелями, оптимальними за іншими критеріями [18]. Більше того, оптимізація на основі середньої геометричної передбачає доволі значні ризики, що обмежує її практичне застосування лише схильними до ризику інвесторами. Слід зазначити, однак, що вищенаведені висновки Самуельсона були згодом спростовані в літературі, а тому на разі вони не є однозначними. Приміром, Росс показав, що ситуація, за якої гравець (інвестор), відхиляючи разову ставку (інвестицію), прийматиме значну кількість таких ставок у послідовності, не лише кореспондується з теорією корисності, а є доволі типовою [26]. Головним аргументом Самуельсона «за» закон великих чисел було те, що він діє тоді, коли ризики розподіляються між акціонерами, а не тоді, коли вони поєднуються в рамках послідовності азартних ставок (інвестицій). Ризик перебуває під контролем та зменшується тоді, коли він розподіляється між великою кількістю страхового<sup>3</sup> або інвестиційного портфеля. Росс убачає певний парадокс у тому, що точно невідомо, які саме ризики дрібняться та як це відбува-

ється. Так, продаючи нові поліси, страхова компанія залучає певну кількість додаткових незалежних умовно дрібних ризиків, але наявні більші ризики не дрібняться.

Спростування висновків Самуельсона здійснювалося також у дослідженнях інших учених. Однією з таких робіт є дослідження Ф. де Броувера та Ф. Ван ден Шпігеля [4], які, серед іншого, довели, що для максимізації корисності не слід включати до портфеля занадто ризикові активи, що безпосередньо кореспондується з концепцією оптимізації на основі середньої геометричної. Е. Пекьоз також підтверджує доцільність прийняття визначної кількості послідовних ставок (інвестицій), якщо є можливість дострокового виходу [23]. Однак достроковий вихід є ефективним, коли гравець (інвестор) має збитки, та не є таким у разі прибутковості стратегії.

Значущими є, на нашу думку, висновки дослідження Г. Кіма та С. Юнга, котрі також довели ефективність оптимізації методом середньої геометричної на основі емпіричних даних за компаніями з індексу KOSPI 200 (тижневі дохідності в період із січня 1986 по грудень 2012 р.) [14]. Вони також назвали прізвища інвесторів, які за методом середньої геометричної мали доволі високі результати своїх портфельних стратегій. Серед них – Шеннон (середня річна дохідність портфеля становила 28% упродовж 35 років); Торп (у середньому 15% у період із 1969 по 1980 р.); Баффетт та ін.

Існують також емпіричні підтвердження тому, що оптимальний за геометричною портфель за своїми статистичними характеристиками є схожим на ринковий портфель [25]. Попри це, однак, змістовні та структурні відмінності між цими портфелями є значними. Зокрема, середні геометричні дохідності та коефіцієнти бета ринкових портфелів є значно нижчими [9]. Порівняння портфелів, оптимізованих за середньою геометричною та за коефіцієнтом Шарпа, свідчать, що часто такі портфелі є доволі схожими [10; 24]. При цьому обидва критерії не дають у підсумку портфель з високим рівнем диверсифікації, а портфель, оптимізований за коефіцієнтом Шарпа, є більш диверсифікованим, порівняно з портфелем, оптимізованим за критерієм Келлі [10]. При цьому ризики та дохідності останніх є вищими.

Б. Гант емпірично довів ефективність середньої геометричної як методу оптимізації на прикладі акцій промислового індексу Доу Джонса [11]. Він оцінював інвестиційні характеристики портфелів, оптимізованих чотирма різними методами за даними з 1972 по 2002 р. За середньою геометричною портфель формувався шляхом щомісячного перебалансування часток акцій для максимізації кінцевої вартості. З іншого боку, розглядалися три альтернативні портфелі з тих самих акцій (із можливістю коротких продажів та без такої можливості): пропорційний портфель; портфель із мінімальним ризиком та портфель із мінімальним ризиком за заданого рівня дохідності в 15%. У всіх шести порівнюваних випадках портфель зростання показав вищі дохідності, у деяких – навіть більше ніж у два рази. Недоліком цих портфелів був доволі низький рівень диверсифікації, що можна пояснити тією обставиною, що середня геометрична «обирала» незначну кількість акцій із високими дохідностями. Аналогічні висновки Гант дістав і провівши аналогічне дослідження для 25 акцій австралійських компаній [11].

На особливу увагу заслуговують порівняння оптимізаційних стратегій на прикладі міжнародних інвестиційних портфелів. Приміром, Х. Естрада проводив

<sup>3</sup> Самуельсон у цьому зв'язку наводив приклад страхової компанії, котра ніколи б не страхувала один корабель, оскільки ризик його загибелі занадто високий, але страхує багато кораблів, оскільки в такому разі ризик розподіляється на більш дрібні частини та є прийнятним [28].

<sup>4</sup> У 1980 р. інвестиційна компанія була закрита через злочинні дії одного з працівників.

таке порівняння для портфельів, оптимальних за коефіцієнтом Шарпа та за середньою геометричною [8]. Він розглядав місячні дохідності індексів MSCI для 22 розвинутих ринків, 26 ринків, що формуються, та для п'яти класів активів: акції ринку США, акції зі складу індексу EAFE, акції ринків, що формуються, облігації США та нерухомість США. Усі дохідності – у доларах США та передбачають валове реінвестування дивідендів. Період – різний для різних акцій та активів – від включення до індексів до червня 2008 р.

Проводиться три порівняння портфельів, оптимізованих за середньою геометричною (портфельі G), та портфельів, оптимізованих за критерієм Шарпа (портфельі S): для розвинутих ринків, для ринків, що формуються, та для різних класів активів. Кожне порівняння проводиться для трьох часових періодів: червень 1998 р., червень 2003 р. та червень 2008 р. Результати розрахунків для розвинутих ринків наведено в табл. 1.

Із табл. 1 видно, що міжнародні G портфельі у сенсі наївної диверсифікації є значно менше диверсифікованими порівняно з міжнародними портфельі

ями S. Вони мають значно вищі середні арифметичні дохідності та ризики, а також дають змогу значно більшою мірою максимізувати майбутню вартість через 10 та через 20 років. Високі ризики, очевидно, можна пояснити як обраним методом оптимізації, так і відносно низьким рівнем диверсифікації. У табл. 2 наведено лише аналітичні дані за ринками, що формуються.

Аналізуючи портфельі ринків, що формуються, слід зазначити, що порівняння портфельів S та портфельів G дає аналогічні результати, однак у випадку розвинутих ринків більшість показників є значно нижчими в абсолютному вираженні. Більше того, для ринків, що формуються, різниця між інвестиційними характеристиками G та S портфельів є значно більшою. Приміром, ризик G портфелья перевищує ризик S портфелья для розвинутих ринків у 1,6, 1,9 та 1,7 рази, а для ринків, що формуються, – відповідно в 2,5, 2,9 та 3,3 рази. Рівень же «наївної» диверсифікації є приблизно однаковим.

Наведені аналітичні результати повною мірою кореспондують з аналогічними висновками за

Таблиця 1

Структура та інвестиційні характеристики портфельів розвинутих ринків

№ п/п	Актив у портфельі	Частка у портфельі, %					
		Червень 2008 р.		Червень 2003 р.		Червень 1998 р.	
		S	G	S	G	S	G
1	Австралія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	Австрія	13,8	0,0	7,7	0,0	0,0	0,0
3	Бельгія	10,6	0,0	16,7	2,2	17,9	0,0
4	Канада	3,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	Данія	33,0	12,3	22,3	0,0	11,4	0,0
6	Фінляндія	0,6	9,2	0,0	12,4	2,2	0,0
7	Франція	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	Німеччина	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
9	Гонконг	11,8	56,1	11,9	60,7	7,1	49,8
10	Ірландія	0,0	0,0	0,0	0,0	18,4	10,8
11	Італія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
12	Японія	3,7	0,0	5,3	0,0	0,0	0,0
13	Нідерланди	3,2	0,0	3,9	0,0	20,2	8,3
14	Нова Зеландія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	Норвегія	1,0	5,5	0,0	0,0	0,0	0,0
16	Португалія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
17	Сінгапур	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
18	Іспанія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
19	Швеція	12,4	16,9	12,8	24,7	10,7	31,3
20	Швейцарія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
21	Велика Британія	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
22	США	6,2	0,0	19,4	0,0	12,0	0,0
Характеристики портфелья							
Кількість активів – із 22 (n)		11	5	8	4	8	4
Середня арифметична дохідність ( $\mu_p$ ), у %		1,3	1,6	1,2	1,6	1,4	1,8
Ризик ( $\sigma_p$ )		4,4	7,1	4,3	8	4,1	7,0
Коефіцієнт Шарпа ( $SR_p$ )		0,220	0,179	0,208	0,166	0,242	0,187
Середня геометрична дохідність ( $GM_p$ ), у %		1,2	1,4	1,1	1,3	1,4	1,5
$\sigma_p$ у річному виразі		15,1	24,8	15,0	27,7	14,3	24,2
$GM_p$ у річному виразі, у %		15,2	17,5	14,0	16,8	17,6	19,7
TV 10, у \$		413	502	370	473	505	604
TV 20, у \$		1709	2516	1372	2240	2549	3653

Примітки:

1. Актив у портфельі – індекс MSCI відповідного ринку.

2. TV 10 – майбутня вартість 100 \$, вкладених сьогодні за ставкою  $GM_p$ , через 10 років; TV 20 – через 20 років.

Джерело: складено за [8, с. 138]

Таблиця 2

## Інвестиційні характеристики портфелів ринків, що формуються

Показник	Портфель					
	Червень 2008 р.		Червень 2003 р.		Червень 1998 р.	
	S	G	S	G	S	G
Кількість активів – із 26 ( <i>n</i> )	12	4	9	5	7	4
Середня арифметична дохідність ( $\mu_p$ ), у %	1,9	2,9	1,5	2,9	2,7	3,8
Ризик ( $\sigma_p$ )	4,0	9,9	4,3	12,6	3,3	10,9
Коефіцієнт Шарпа ( $SR_p$ )	0,388	0,263	0,274	0,211	0,681	0,311
Середня геометрична дохідність ( $GM_p$ ), у %	1,8	2,5	1,4	2,2	2,7	3,3
$\sigma_p$ у річному виразі	13,7	34,3	15,0	43,7	11,5	37,7
$GM_p$ у річному виразі, у %	23,7	33,8	17,9	29,5	37,0	46,9
TV 10, у \$	840	1837	520	1331	2333	4673
TV 20, у \$	7062	33733	2705	17705	54428	218397

Примітки:

1. Актив у портфелі – індекс MSCI відповідного ринку.

3. TV 10 – майбутня вартість 100 \$, вкладених сьогодні за ставкою  $GM_p$ , через 10 років; TV 20 – через 20 років.

Джерело: складено за [8, с. 139]

Таблиця 3

## Структура та інвестиційні характеристики портфелів (за класами активів)

№ п/п	Актив у портфелі	Частка у портфелі, у %					
		Червень 2008 р.		Червень 2003 р.		Червень 1998 р.	
		S	G	S	G	S	G
1	Акції США	4,8	0,0	9,3	77,4	75,7	100,0
2	Акції EAFE	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	Акції ринків, що формуються	16,9	100,0	7,7	22,6	4,0	0,0
4	Облігації США	64,8	0,0	68,7	0,0	16,6	0,0
5	Нерухомі активи США	13,5	0,0	14,3	0,0	3,7	0,0
Характеристики портфеля							
Кількість активів – із 5 ( <i>n</i> )		4	1	4	2	4	1
Середня арифметична дохідність ( $\mu_p$ ), у %		0,8	1,4	0,8	1,1	1,4	1,5
Ризик ( $\sigma_p$ )		1,9	6,6	1,8	4,4	3,0	3,5
Коефіцієнт Шарпа ( $SR_p$ )		0,267	0,165	0,299	0,174	0,321	0,318
Середня геометрична дохідність ( $GM_p$ ), у %		0,8	1,2	0,8	1,0	1,3	1,5
$\sigma_p$ у річному виразі		6,6	22,8	6,3	15,2	10,3	12,0
$GM_p$ у річному виразі, у %		10,3	15,3	10,3	12,1	17,5	19,3
TV 10, у \$		266	416	266	314	500	586
TV 20, у \$		707	1732	705	985	2496	3437

Примітки:

1. Актив у портфелі – відповідні індекси MSCI.

2. EAFE – індекс MSCI для ринків акцій Європи, Австралії та Далекого Сходу (Europe, Australia &amp; Far East).

3. TV 10 – майбутня вартість 100 \$, вкладених сьогодні за ставкою  $GM_p$ , через 10 років; TV 20 – через 20 років.

Джерело: складено за [8, с. 140]

портфелями, сформованими на основі диверсифікації за класами активів (табл. 3).

Аналіз наведених у табл. 3 даних дає змогу відзначити, що *G* портфель у двох із трьох випадків є зовсім недиверсифікованим – для 1998 та 2008 р. Він включає лише один клас активів, тоді як портфель *S* включає чотири із п'яти можливих класів активів.

Завершуючи аналіз даного дослідження, слід зазначити, що автор також провів порівняння власних прогнозних розрахунків із фактичними даними. Результати такого порівняння у цілому підтримали логіку проведеного аналізу, однак здивували в одному моменті: у трьох із шести спостережуваних випадках *G* портфелі продемонстрували вищий

коефіцієнт Шарпа, ніж *S* портфелі, як за стандартним відхиленням, так і за стандартним напіввідхиленням<sup>5</sup>. Середня ж геометрична *S* портфелів перевищує середню геометричну *G* портфелів лише в одному випадку. Ці висновки, безперечно, не дають змоги зробити однозначний вибір на користь якогось методу, однак, все ж, на нашу думку, більшою мірою підтримують концепцію середньої геометричної. Хоча її остаточний вибір все одно потребує визначеності інвестора щодо його схильності до ризику.

Використання середньої геометричної, однак, потребує, на нашу думку, методологічної визначеності стосовно двох питань. По-перше, формат застосування формули (1). Річ у тім, що у цій формулі дохідність не фігурує у безпосередньому форматі – норми дохідності, виражені в частках. Вона представлена як сума норми дохідності у частках та одиниці. У такому форматі технічного представ-

<sup>5</sup> За стандартним напіввідхилення розраховується коефіцієнт Сортіно, котрий є ще одним методом оптимізації інвестиційних портфелів.

лення, як зазначалося вище, даний метод оптимізації не передбачає врахування великих від'ємних значень дохідностей – менших від -1, оскільки в такому разі, як уже зазначалося, підкореневе значення буде від'ємним. У деяких джерелах зазначають, що головним недоліком оптимізації за середньою геометричною є неможливість використання від'ємних дохідностей взагалі. Це й зумовлено форматом представлення формули (1). Якби у цій формулі фігурувала не сума одиниць та дохідності, а просто дохідність, то її від'ємні значення не можна було б використовувати.

По-друге, одноперіодний чи багатоперіодний характер середньої геометричної як методу оптимізації інвестиційного портфеля. Номінально як у Лагане, так і у Келлі наголошувалося на багатоперіодному характері цього критерію. Акцент робився на максимізації майбутньої вартості портфеля після завершення певної кількості періодів. Однак технічно зручно та економічно доцільно використовувати цей метод і для одноперіодної оптимізації. На цьому, приміром, прямо наголошує МакЕнеллі [21, с. 21], який зазначає, що дохідність – це характеристика, котра притаманна як певному часовому періоду, так і стану (приміром, дохідність різних активів в одному й тому самому періоді). На нашу думку, критерій середньої геометричної можна використовувати як для послідовних періодів, так і для структури портфеля в рамках одного періоду. Більше того, критерій Келлі можна застосовувати у подвійному форматі – для оптимізації структури портфеля в рамках одного періоду та для максимізації його майбутньої вартості одночасно.

**Висновки з проведеного дослідження.** Підводячи підсумки аналізу напряму оптимізації інвестиційного портфеля на основі середньої геометричної, або критерію Келлі, слід зазначити, що еволюційно він виник фактично водночас із появою теорії портфеля та весь цей час ці концепції розвивалися паралельно. У науковому плані обидві підтримувалися аргументами «за» та «проти», різні емпіричні тести наводять як переваги, так і недоліки обох концепцій. Більше того, оптимізацію за критерієм Келлі часто порівнювали й з іншими методами оптимізації. У підсумку до ключових рис цього методу оптимізації слід віднести такі. Орієнтація на довготермінову перспективу. Саме портфель, оптимізований за критерієм Келлі, забезпечує найбільшу максимізацію майбутньої вартості. Оптимізація для короткотермінових інвестиційних горизонтів часто дає гірші порівняно з іншими методами оптимізації результати. Більш тривалі інвестиційні горизонти разом із доволі високими нормами дохідності роблять цей метод прийнятним для відносно більш схильних до ризику інвесторів. Суттєва максимізація майбутньої вартості портфеля зумовлює необхідність прийняття більш високих ризиків. Оптимізація за середньою геометричною на відміну від традиційної біпараметричної оптимізації дає змогу сформулювати диверсифіковані портфелі, котрі є інтуїтивно зрозумілими. Така оптимізація не потребує інформації стосовно характеру розподілу дохідностей (як у традиційній біпараметричній оптимізації та оптимізації на основі корисності) та функції корисності, зокрема й кількісно вираженого коефіцієнта схильності до ризику. За своєю суттю цей метод оптимізації носить об'єктивний характер, структура отриманого портфеля не залежить від схильності інвестора до ризику та вираховується математично. Однак якщо функція корисності є логарифмічною,

то оптимізація на основі корисності стає фактично оптимізацією за середньою геометричною. Цей збіг, однак, є суто технічним та не впливає на змістовні відмінності між цими двома підходами до оптимізації інвестиційних портфелів. Оптимальні за середньою геометричною портфелі часто мають доволі високі коефіцієнти Шарпа, а за певних умов міжнародні портфелі мають навіть вищі коефіцієнти Шарпа порівняно із самими портфелями, оптимізованими на основі коефіцієнта Шарпа.

Головною еволюційною передумовою виникнення концепції оптимізації на основі середньої геометричної стала, на нашу думку, невідомість функції корисності, а також окремі пов'язані із цим аспекти, як то припущення про нормальний характер розподілу дохідностей. У контексті парадигмального конфлікту між концепціями ефективності та диверсифікації слід зазначити, що метод середньої геометричної є позапарадигмальним, однак більшою мірою підтримує концепцію диверсифікації в її найважливішому розумінні. Оптимальні за геометричною портфелі не є ефективними, однак є більш зрозумілими на інтуїтивному рівні.

Емпіричні тести підтверджують загальну логіку середньої геометричної як оптимізаційного методу. Міжнародні портфелі як розвинутих ринків, так і ринків, що формуються, оптимізовані за середньою геометричною, мають значно вищі дохідності й ризики, а також значно більш високу майбутню вартість у довготерміновій перспективі.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Arzac E.R. Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors / Enrique R. Arzac, Vijay S. Bawa // *Journal of Financial Economics*. – 1977. – Vol. 4. – № 3. – P. 277–288.
2. Bernoulli D. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk / Daniel Bernoulli // *Econometrica*. – 1954. – Vol. 22. – № 1. – P. 23–36.
3. Breiman L. Optimal Gambling Systems for Favorable Games / L. Breiman // *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability: Proceedings, June 20 – July 30 1960, Berkeley*. – Berkeley, California: Statistical Laboratory of the University of California, Berkeley, 1961. – С. 65–78.
4. De Brouwer P. The Fallacy of Large Numbers Revisited: The Construction of a Utility Function that Leads to the Acceptance of Two Games, while One is Rejected / Philippe De Brouwer, Freddy Van den Spiegel // *The Journal of Asset Management*. – 2001. – Vol. 1. – № 3. – P. 257–266.
5. Ding Y. The Optimal Portfolios Based on a Modified Safety-First Rule with Risk-Free Saving / Yuanyao Ding, Zudi Lu // *Journal of Industrial and Management Optimization*. – 2016. – Vol. 12. – № 1. – P. 83–102.
6. Dumas B. The World Price of Foreign Exchange Risk / Bernard Dumas, Bruno Solnik // *The Journal of Finance*. – 1995. – Vol. 50. – № 2. – P. 445–479.
7. Estrada J. Geometric Mean Maximization: An Overlooked Portfolio Approach? / Javier Estrada // *The Journal of Investing*. – 2009. – Vol. 19. – № 4. – P. 134–147.
8. Estrada J. Geometric Mean Maximization: An Overlooked Portfolio Approach? / Javier Estrada // *The Journal of Investing*. – 2009. – Vol. 19. – № 4. – P. 134–147.
9. Fama E.F. Long-Term Growth in a Short-Term Market / Eugene F. Fama, James D. MacBeth // *The Journal of Finance*. – 1974. – Vol. 29. – № 3. – P. 857–885.
10. Grauer R.R. A Comparison of Growth Optimal and Mean Variance Investment Policies / Robert R. Grauer // *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. – 1981. – Vol. 16. – № 1. – P. 1–21.
11. Hunt B.F. Feasible High Growth Investment Strategy: Growth Optimal Portfolios Applied to Dow Jones Stocks / B. F. Hunt // *Journal of Asset Management*. – 2005. – Vol. 6. – № 2. – P. 141–157.
12. International Diversification Versus Domestic Diversification: Mean-Variance Portfolio Optimization and Stochastic Dominance

- Approaches / [Fathi Abid, Pui Lam Leung, Mourad Mroua, Wing Keung Wong] // Journal of Risk and Financial Management. – 2014. – Vol. 7. – № 2. – P. 45–66.
13. Kelly J.L. A New Interpretation of Information Rate / J.L. Kelly, Jr. // The Bell System Technical Journal. – 1956. – Vol. 35. – № 4. – P. 917–926.
  14. Kim G. The Construction of the Optimal Investment Portfolio Using the Kelly Criterion / Gytai Kim, Suhee Jung // World Journal of Social Sciences. – 2013. – Vol. 3. – № 6. – P. 15–26.
  15. Latané H.A. Criteria for Choice among Risky Ventures / Henry Allen Latané // The Journal of Political Economy. – 1959. – Vol. 67. – № 2. – P. 144–155.
  16. Latané H.A. Test of Portfolio Building Rules / Henry A. Latané, William E. Young // The Journal of Finance. – 1969. – Vol. 24. – № 4. – P. 595–612.
  17. Latané H.A. Criteria for Portfolio Building / Henry A. Latané, Donald L. Tuttle // The Journal of Finance. – 1967. – Vol. 22. – № 3. – P. 359–373.
  18. MacLean L. Growth versus Security Tradeoffs in Dynamic Investment Analysis / Leonard MacLean, William T. Ziemba // Annals of Operations Research. – 1999. – Vol. 85. – P. 193–225.
  19. Markowitz H.M. Investment for the Long Run: New Evidence for an Old Rule / Harry M. Markowitz // The Journal of Finance. – 1976. – Vol. 31. – № 5. – P. 1273–1286.
  20. Markowitz H.M. Portfolio Selection / Harry Markowitz // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – № 1. – P. 77–91.
  21. McEnally R.W. Latané's Bequest: The Best of Portfolio Strategies / Richard W. McEnally // The Journal of Portfolio Management. – 1986. – Vol. 12. – № 2. – P. 21–30.
  22. Meyer T.O. Comparing Mean Variance Tests with Stochastic Dominance Tests when Assessing International Portfolio Diversification Benefits / Thomas O. Meyer, Xiao-Ming Li, Lawrence C. Rose // Financial Services Review. – 2005. – Vol. 14. – № 2. – P. 149–168.
  23. Peköz E.A. Samuelson's Fallacy of Large Numbers and Optional Stopping / Erol A. Peköz // The Journal of Risk and Insurance. – 2002. – Vol. 69. – № 1. – P. 1–7.
  24. Pulley L. B. Mean-Variance Approximations to Expected Logarithmic Utility / Lawrence B. Pulley // Operations Research. – 1983. – Vol. 31. – № 4. – P. 685–696.
  25. Roll R. Evidence on the "Growth-Optimal" Model / Richard Roll // The Journal of Finance. – 1973. – Vol. 28. – № 3. – P. 551–566.
  26. Ross S.A. Adding Risks: Samuelson's Fallacy of Large Numbers Revisited / Stephen A. Ross // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1999. – Vol. 34. – № 3. – P. 323–339.
  27. Roy A.D. Safety First and the Holding of Assets / A.D. Roy // Econometrica. – 1952. – Vol. 20. – № 3. – P. 431–449.
  28. Samuelson P.A. Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers / P.A. Samuelson // Scientia. – 1963. – Vol. 98. – P. 108–113.
  29. Samuelson P.A. The "Fallacy" of Maximizing the Geometric Mean in Long Sequences of Investing or Gambling / Paul A. Samuelson // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1971. – Vol. 68. – № 10. – P. 2493–2496.
  30. Shalit H. How Does Beta Explain Stochastic Dominance Efficiency / Haim Shalit, Shlomo Yitzhaki // Review of Quantitative Finance and Accounting. – 2010. – Vol. 35. – № 4. – P. 431–444.
  31. Solnik B.H. Why Not Diversify Internationally Rather than Domestically? / Bruno H. Solnik // Financial Analysts Journal. – 1974. – Vol. 30. – № 4. – P. 48–54.
  32. Thorp E.O. Optimal Gambling Systems for Favorable Games / E.O. Thorp // Review of the International Statistical Institute. – 1969. – Vol. 37. – № 3. – P. 273–293.

UDC 339.5

Ilyina O.L.  
Student,  
Salem College

## ECONOMIC COOPERATION OF UKRAINE AND GREAT BRITAIN

This article is devoted to the assessment of international cooperation with Great Britain as an important component of Ukraine's foreign policy. Economic relations, investment activity, problems, and prospects of interstate cooperation are taken into consideration.

**Keywords:** international cooperation, economic relations, export, import, investments, trade.

### Ільїна О.Л. ЕКОНОМІЧНА СПІВПРАЦЯ УКРАЇНИ ТА ВЕЛИКОБРИТАНІЇ

Статтю присвячено оцінці міжнародного співробітництва з Великобританією як важливої складовою зовнішньої політики України. Розглянуто економічні взаємовідносини, інвестиційну діяльність, проблеми та перспективи міждержавної співпраці.

**Ключові слова:** міжнародна співпраця, економічні відносини, експорт, імпорт, інвестиції, торгівля.

### Ильина О.Л. ЭКОНОМИЧЕСКОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО УКРАИНЫ И ВЕЛИКОБРИТАНИИ

Статья посвящена оценке международного сотрудничества с Великобританией как важной составляющей внешней политики Украины. Рассмотрены экономические взаимоотношения, инвестиционная деятельность, проблемы и перспективы межгосударственного сотрудничества.

**Ключевые слова:** международное сотрудничество, экономические отношения, экспорт, импорт, инвестиции, торговля.

**Problem formulation.** Ukraine was in a difficult economic situation prior to 2014, which continued to deteriorate in 2015. The issue of developing international relations with the leading countries of the world, creating favourable conditions for business development in Ukraine remains extremely urgent.

Interstate economic relations between Ukraine and the United Kingdom (UK) are carried out in accordance with the bilateral legal and contractual framework in three main directions: investment cooperation, trade, and technical assistance.

**Analysis of investigations and publications.** Maiko V.A. researched the problems of economic

cooperation between the two countries [6]. He reviewed Ukrainian-British investment cooperation and trade relations in the 1990s. The first attempt of a monographic study of Ukrainian-British relations in the years of 1991–2004 was the book by Grubinko A.V. [2]. The author revealed the geopolitical factors that influenced the development of Ukrainian-British diplomatic relations, discussed the state of investment cooperation, gave a general overview of military-political contacts and individual projects of British technical assistance.

The development of interstate relations between Ukraine and Great Britain in 1991–2005 was researched