УДК 378

Валерій САМОЙЛЕНКО

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу
Херсонського державного університету,
м. Херсон, Україна;*

Валентина ГРИГОР'ЄВА

*кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри алгебри,
геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету,
м. Херсон, Україна*

e-mail: vb.grigorieva@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВНИХ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІОНАЛІВ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ-МАТЕМАТИКІВ

У статті розглядаються деякі методичні особливості навчання майбутніх вчителів-математики математичних дисциплін у педагогічному навчальному закладі з урахуванням професійно-педагогічної спрямованості навчання й вимог, що висуваються до майбутньої педагогічної діяльності. Враховуючи важливе місце курсу математичного аналізу у професійній підготовці вчителів математики та значення теорії дослідження функцій, розглянуто питання дослідження екстремумів функцій, а саме питання дослідження умовних екстремумів функціоналу в гільбертовому просторі. Використовуючи розглянуті в статті умови існування умовного локального екстремуму в гільбертовому просторі, можна отримати більш відомі та загальні умови в R^n як частинний випадок даної ситуації.

Ключові слова: лінійний обмежений функціонал, лінійний оператор, нормований простір, простір Гільберта, умовний екстремум.

Проблема формування професіоналізму майбутніх учителів математики у процесі фахової підготовки обумовлена динамічними перетвореннями, які відбуваються в політичній, соціальній, економічній сферах нашої країни загалом і у сфері освіти зокрема. Нагальність цього питання пов'язана і з ефективною імплементацією оновленої законодавчо-нормативної бази освітнього простору України (Стратегія державної кадрової політики на 2012–2020 роки, Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року, Закон України «Про вищу освіту»), що значною мірою залежить від комплексного вирішення завдань стосовно побудови цілей, організаційно-структурних, змістових і технологічних компонентів навчально-виховного процесу підготовки майбутніх фахівців у вищих навчальних закладах, у тому числі й майбутніх учителів-математиків. У зв'язку з вищезазначеним сучасний учитель математики має володіти не лише фундаментальними знаннями з предмета, але й комплексом конкретних засобів професійної діяльності щодо застосування набутих знань та умінь у галузі навчально-виховної, соціально-педагогічної, культурно-освітньої, науково-методичної, організаційно-управлінської діяльності.

Питаннями фахової підготовки майбутніх учителів математики в різні часи займалися відомі науковці та методисти: О. Астряб, В. Бевз, М. Віленкін, Б. Гнєденко, В. Гусєв, Б. Ерднієв, М. Жалдак, Ю. Колягін, К. Лебединцев, Г. Луканкін, М. Метельський, О. Мордкович, І. Новик, М. Потоцький, З. Слєпкань, Н. Стефанова, А. Столяр, Р. Черкасов, Л. Фрідман, І. Шиманський, М. Шкіль, Н. Шунда.

У працях зазначених авторів докладно проаналізовано дидактичні проблеми, які існували у відповідні часи, зроблено конкретні пропозиції і рекомендації щодо поліпшення професійної підготовки вчителів математики.

На сучасному етапі окремі аспекти проблеми підготовки майбутніх учителів математики в Україні досліджують відомі математики, педагоги і методисти: М. Бурда, Н. Морзе, В. Моторіна, С. Семенець, О. Скафа, С. Скворцова, О. Співаковський, Н. Тарасенкова, Ю. Триус, В. Швець.

Загальновідомо, що через специфіку педагогічної освіти математична підготовка фахівців у педагогічних вищих навчальних закладах повинна відрізнятися від відповідної підготовки в класичних і технічних університетах. Майбутній учитель математики повинен отримати фундаментальну математичну підготовку, яка забезпечить йому дієві знання, професійні компетенції, що виходять за межі курсу математики, яка вивчається в школі.

Безперечно, що така підготовка не повинна здійснюватися відірвано від майбутньої професійної діяльності майбутнього вчителя.

Дослідження проблеми навчання математичних дисциплін у педагогічному навчальному закладі з урахуванням професійно-педагогічної спрямованості навчання й вимог, що висуваються до майбутньої педагогічної діяльності, здійснюється в двох основних напрямах.

Частина дослідників педагогічну діяльність у навчанні майбутніх учителів математики ототожнює з детальним висвітленням у вузівському викладанні основ шкільного курсу математики. Другий напрям наукових праць із зазначеної теми полягає в об'єднанні та збалансованості математичної й методичної підготовок студентів педагогічного закладу. Цієї точки зору дотримуються Г. Михалін, А. Мордкович, В. Моторіна, З. Слепкань, О. Співаковський, Н. Тарасенкова, М. Якубовські.

З огляду на те, що педагогічна діяльність за своєю природою має творчий характер, з метою формування та розвитку психолого-педагогічної готовності майбутнього педагога професійного навчання до формування професійної мобільності, необхідно у процесі підготовки у вищому навчальному закладі формувати такі професійні значущі якості педагога: креативність, творчі вміння, вміння розв'язувати математичні та фізичні задачі, застосовувати активні методи навчання, уміння аналізувати результати власної діяльності. Водночас, слід зазначити, що педагог фізико-математичних дисциплін повинен виявляти інтерес до викладання матеріалу і сам займати активну позицію щодо пошуку нових ресурсів свого власного розвитку та мислення.

Важливе місце у професійній підготовці вчителів математики відводиться курсу математичного аналізу. Окремі дисертаційні дослідження присвячені професійно спрямованому викладанню деяких тем з цього курсу. Так, наприклад, Т. А. Корєшкова досліджує шляхи формування професійно значущих знань і вмінь у вчителя математики при викладанні розділу "Інтегральне числення функції однієї змінної". У дисертаційному дослідженні Х.А. Гербекова виявлені можливості і резерви курсу диференціальних рівнянь у здійсненні професійно спрямованого навчання майбутніх учителів математики і на їх основі розроблені конкретні рекомендації з викладання цього курсу. А.Є.Мухін досліджує проблему реалізації професійно спрямованого навчання шляхом розробки та використання на практичних заняттях з математичного аналізу системи вправ із тих розділів цього курсу, які вивчаються в школі.

Незважаючи на наявність значної кількості публікацій, окремих дисертаційних досліджень, в яких у тій чи іншій мірі розглядалася проблема професійної спрямованості викладання математичного аналізу майбутнім учителям математики, необхідно зазначити, що ряд аспектів цієї проблеми виявилися не повністю розкритими, окремі аспекти потребують подальшої розробки з урахуванням змін, які відбуваються в сучасній школі, та більш високих вимог до професійної підготовки вчителів.

Одним з важливих питань при викладанні математичного аналізу є питання дослідження екстремумів функцій. У теорії дослідження функцій задача на відшукання екстремальних значень не містить ніяких додаткових умов стосовно змінних і такі задачі належать до задач відшукання *безумовного екстремуму* функції. Локальний та глобальний екстремуми визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції. Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку *умовного екстремуму* функції [4–5]. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови. Відшукання умовного екстремуму – значно більш складна задача, ніж визначення безумовного екстремуму. Тому зазвичай пошук умовного екстремуму зводять до відшукання безумовного екстремуму шляхом еквівалентної заміни вихідного функціоналу разом з обмеженнями на деякий, спеціальним чином підібраний, функціонал, безумовний екстремум якого збігається з умовним екстремумом вихідного функціоналу [6].

Дослідження питання стосовно умовного екстремуму для відображень розглядалося в роботах [4–6]. В даній статті результати стосуються існування умовного екстремуму функціоналу в гільбертовому просторі.

Зупинімося більш детально на питанні дослідження умов існування умовного локального екстремуму в гільбертовому просторі.

Необхідна умова умовного локального екстремуму

Нехай $f(x,y): X\times Y \to R^1$, де X – нормований простір, а Y – простір Гільберта; $g(x,y): X\times Y \to Y$. Точка $(x_0,y_0)\in X\times Y$, що задовольняє рівняння $g(x_0,y_0)=0$ називається *точкою умовного локального максимуму* (*мінімуму*) відображення $f(x,y)$ при умові $g(x,y)=0$, якщо існує окіл $V\subset X\times Y$ точки (x_0,y_0) такий, що $\forall (x,y)\in V$, яка задовольняє умові $g(x,y)=0$, буде виконуватися нерівність $f(x,y) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0,y_0)$.

Теорема 1. Нехай $f(x,y): X\times Y \to R^1$, $g(x,y): X\times Y \to Y$ – неперервно-диференційовні у деякому околі точки $(x_0,y_0)\in X\times Y$ і лінійний оператор $g'_y(x_0,y_0)\in L(Y)$ має обернений. Якщо в точці (x_0,y_0) відображення $f(x,y)$ має умовний локальний екстремум, то існує вектор $\lambda\in Y$ такий, що мають місце співвідношення

$$f'_x(x_0,y_0)(x)+\left(g'_x(x_0,y_0)x,\lambda\right)_Y=0, \quad \forall x\in X$$

$$f'_y(x_0,y_0)(h)+\left(g'_y(x_0,y_0)h,\lambda\right)_Y=0, \ \forall h\in Y$$

($(\cdot,\cdot)_Y$ – скалярний добуток у гільбертовому просторі Y).

Доведення.

Для доведення нам знадобляться наступні дві властивості. В даній статті ми обмежимося їх формулюванням (подібні властивості відомі у курсі лінійної алгебри).

1. Якщо Y – гільбертовий простір, а $f(x): Y\to R^1$ – лінійний обмежений функціонал $\left(f\in L\left(Y,R^1\right)\right)$, то існує єдиний вектор $f\in Y$ такий, що $f(y)=(y,f)_Y$.

2. Нехай лінійний обмежений оператор $A: Y\to Y$, де Y – гільбертовий простір, має обернений. Тоді спряжений оператор $A^*: Y\to Y$, визначений співвідношенням $(Ax,y)_Y=\left(x,A^*y\right)$, $\forall x,y\in Y$, теж має обернений, $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$.

Повернемося до доведення теореми.

Розглянемо відображення

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+\left(g(x,y),\lambda\right)_Y: X\times Y\to R^1,$$

де $\lambda\in Y$ – довільний вектор. Оскільки $f(x,y): X\times Y\to R^1$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\in L\left(X\to R^1\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in L\left(Y\to R^1\right),$$

тобто лінійні неперервні функціонали на X та Y відповідно. Далі

$$\left(g(x+h_1,y),\lambda\right)_Y-\left(g(x,y),\lambda\right)_Y=$$
$$=\left(g(x+h_1,y)-g(x,y),\lambda\right)_Y=$$
$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)h_1+o(h_1),\lambda\right)_Y=$$
$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)h_1,\lambda\right)_Y+\left(o(h_1),\lambda\right)_Y,$$

оскільки $\left|\left(o(h_1),\lambda\right)_Y\right|\le\left\|o(h_1)\right\|_Y\left\|\lambda\right\|_Y$, то маємо, що $\left|\left(o(h_1),\lambda\right)_Y\right|=o(h_1)$, тобто відображення $\left(g(x,y),\lambda\right)_Y$ – диференційоване по *x* і

$$\left(\left(g(x,y),\lambda\right)_Y\right)'_x h_1=\left(\left(g'_x(x,y)h_1,\lambda\right)_Y\right)_X,$$

$$g'_x(x,y)\in L(X\to Y), \quad \forall h_1\in X.$$

Аналогічно

$$\left(\left(g(x,y),\lambda\right)_Y\right)'_y h_2=\left(g'_y(x,y)h_2,\lambda\right)_Y,$$

$$g'_y(x,y)\in L(X\to Y), \quad \forall h_2\in Y.$$

Отже, будемо мати

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)h_1=f'_X(x,y)h_1+\left(g'_X(x,y)h_1,\lambda\right)_Y, \quad \forall h_1\in X$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)h_2=f'_Y(x,y)h_2+\left(g'_Y(x,y)h_2,\lambda\right)_Y, \quad \forall h_2\in Y$$

Розглянемо вираз

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)h=f'_Y(x,y)h+\left(g'_Y(x,y)h,\lambda\right)_Y, \quad \forall h\in Y.$$

Перший доданок $f'_Y(x_0,y_0)h=f'_Y(x_0,y_0)(h)$: $:Y\to R^1$ – лінійний лінійний обмежений функціонал на Y та існує (згідно з властивістю 1) вектор $f_0\in Y$ такий, що $f'_Y(x_0,y_0)h=(h,f_0)_Y$. Отже, враховуючи означення спряженого оператора, маємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)h=(h,f_0)_Y+\left(h,\left(g'_Y(x_0,y_0)\right)^*\lambda\right)_Y \quad \forall h\in Y,$$

або

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)h=\left(h,f_0+\left(g'_Y(x_0,y_0)\right)^*\lambda\right)_Y \quad \forall h\in Y,$$

Покладемо $\lambda=-\left(\left(g'_Y(x_0,y_0)\right)^*\right)^{-1}f_0=$ $=-\left(\left(g'_Y(x_0,y_0)\right)^{-1}\right)^*f_0\in Y$, що існує згідно з властивістю 2 та умовами теореми, тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)h=0 \quad \forall h\in Y.$$

Отже, існує $\lambda\in Y$ такий, що

$$f'_Y(x_0,y_0)h+\left(g'_Y(x_0,y_0)h,\lambda\right)_Y=0, \quad \forall h\in Y.$$

Друге співвідношення умови теореми доведено. Покажемо справедливість першого співвідношення. Підставимо в $\varphi(x,y)$ замість λ його значення $\lambda=-\left(\left(g'_Y(x_0,y_0)\right)^{-1}\right)^*f_0\in Y$.

Оскільки відображення $g(x,y): X\times Y\to Y$ задовольняє всі умови теореми про неявне відображення у деякому колі точки (x_0,y_0), то існує окіл точки $x_0\in X$, в якому *y* явно виражається через x, тобто $y=q(x):X\to Y$, $g(x,q(x))=0$, $y_0=q(x_0)$. Розглянемо у даному околі функцію $G(x)=\varphi(x,q(x)):X\to R^1$. Якщо (x_0,y_0) – точка умовного локального екстремуму $f(x,y)$ при умові $g(x,y)=0$, то $x_0\in X$ – точка локального екстремуму і

$$\varphi(x,y=g(x))=G(x):X\to R^1$$

(оскільки $\varphi(x,y=q(x))=f(x,y=q(x))$). Таким чином, для функції $G(x)$ виконується необхідна умова екстремуму в точці x_0, тобто $dG(x_0)=0$, або

$$\begin{aligned}0&=d\varphi(x_0,q(x_0))=d\varphi(x_0,y_0)=\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)dy=\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)dx,\quad\forall dx\in X\end{aligned}$$

(в рівності врахували, що $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)h=0,\ \forall h\in Y$).

Оскільки вектор $dx\in X$ – довільний, то виконується рівність

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)x+\\&+\left(g'_Y(x_0,y_0)x,\lambda\right)_Y=0,\quad\forall x\in X.\end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Відображення $\varphi(x,y)=f(x,y)+(g(x,y),\lambda)_Y:$ $:X\times Y\to R^1$, де $\lambda\in Y$ – деякій вектор, будемо називати *функцією Лагранжа*.

Необхідна умова умовного локального екстремуму у точці $(x_0,y_0)\in X\times Y$ для відображення $f(x,y):X\times Y\to R^1$ при умові $g(x,y)=0$ у термінах функції Лагранжа буде мати вигляд:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0,\quad g(x_0,y_0)=0.$$

Приклад 1. Розглянемо випадок відображення $f:R^n\times R^m\to R^1$.

Нехай $X=R^n$, а $Y=R^m$; відображення

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n):R^n\times R^m\to R^1$$

і

$$\begin{aligned}&g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=\\&=(g_1(x_1,\dots,y_m),\dots,g_m(x_1,\dots,y_m)):R^n\times R^m\to R^m\end{aligned}$$

$(g_i(x_1,\dots,y_m):R^n\times R^m\to R^1,\quad i=1,\dots,m)$ – неперервно диференційовні.

Точка

$$(x_0,y_0)=\left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\in R^{n+m},$$

яка задовольняє рівняння $g_i\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0$ $(i=1,\dots,m)$, є точкою умовного локального максимуму (мінімуму). Якщо існує окіл $V\subset R^{n+m}$ цієї точки такий, що для будь якої точки $(x,y)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\in V$, яка задовольняє рівняння

$$g_i(x_1,\dots,y_m)=0\quad(i=1,\dots,m),$$

виконується нерівність

$$f\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\underset{(\le)}{\ge}f(x_1,\dots,y_m)\quad(i=1,\dots,m).$$

Із загальної теореми будемо мати необхідну умову умовного локального екстремуму у наступному вигляді.

Теорема 2. Нехай $f(x,y),g_i(x,y):R^{n+m}\to R^1$ $(i=1,\dots,m)$ – неперервно-диференційовні в околі точки $\left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\in R^{n+m}$. Якщо

$$\left|\frac{D(g_1,\dots,g_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\right|\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\ne 0$$

(тобто $g'_y(x_0,y_0)$) має обернений), то необхідною умовою того, що точка $\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ – умовний локальний екстремум $f(x_1,\dots,y_m)$ при умові

$$g(x_1,\dots,y_m)=(g_1(x_1,\dots,y_m),\dots,g_m(x_1,\dots,y_m))=0,$$

є існування m дійсних постійних $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ $(\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in R^m)$ таких, що

$$\begin{cases}f'(x_0,y_0)+\lambda_1 g'_1(x_0,y_0)+\dots+\lambda_m g'_m(x_0,y_0)=0\\ g(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)+\displaystyle\sum_{j=1}^m\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\ i=1,\dots,n\\ \dfrac{\partial f}{\partial y_k}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)+\displaystyle\sum_{j=1}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\ k=1,\dots,m\\ g_j\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\quad j=1,\dots,m\end{cases}$$

У термінах функції Лагранжа

$$\varphi(x_1,\dots,y_m)=f(x_1,\dots,y_m)+\sum_{j=1}^m\lambda_j g_j(x_1,\dots,y_m)$$

ці умови мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0 \\ g_1\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0,\dots,g_m\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0 \end{cases}$$

Безпосереднє доведення цього факту легко знайти [4, 5].

Достатня умова умовного локального екстремуму

Повернемося до загальної ситуації. Припустимо, що точка $(x_0,y_0)\in X\times Y$ задовольняє необхідним умовам умовного локального екстремуму у термінах функції Лагранжа. Якщо у функції Лагранжа $\varphi(x,y)$ замість $y\in Y$ підставити відображення $y=q(x):X\to Y$, яка існує згідно з теоремою про неявну функцію, то точка $x_0\in X$ для функції $\varphi(x,q(x))$ буде локальним екстремумом тоді і тільки тоді, коли точка (x_0,y_0) буде умовним локальним екстремумом для $f(x,y)$ при умові $g(x,y)=0$. У зв'язку з цим достатня умова умовного локального екстремуму в точці (x_0,y_0) в термінах функції Лагранжа має вигляд:

1. Якщо $\begin{cases} d^2\varphi(x_0,y_0)\ge 0 \\ dg(x_0,y_0)=0 \end{cases}$, то в (x_0,y_0) – умовний локальний мінімум.

2. Якщо $\begin{cases} d^2\varphi(x_0,y_0)\le 0 \\ dg(x_0,y_0)=0 \end{cases}$, то в (x_0,y_0) – умовний локальний максимум.

3. Якщо $\begin{cases} d^2\varphi(x_0,y_0) \\ dg(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ змінює знак в залежності від $dx\in X$, то в точці (x_0,y_0) немає екстремуму.

Доведення цих умов випливає з того, що достатньою умовою екстремуму в $x_0\in X$ для відображення $\varphi(x,q(x))$ є умова знакопостійності незалежно від dx форми $d^2\varphi(x_0,q(x_0))$ та рівності

$$d^2\varphi(x,q(x))=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,q(x))+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,q(x))q'(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,q(x))x(q'(x))^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,q(x))q''(x)\right)dx^2.$$

Підставляючи у рівність $x=x_0$ маємо

$$d^2\varphi(x_0,q(x_0))=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)q'(x_0)dxdx+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)(q'(x_0)dx)^2+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)q''(x_0)dx^2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2=d^2\varphi(x_0,y_0)$$

(ми врахували умову $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0$).

Отже, маємо достатньою умовою умовного екстремуму в (x_0,y_0) є знакопостійність форми $d^2\varphi(x_0,y_0)$ незалежно від $dx\in X$. Що стосується dy, що фігурує у формі $d^2\varphi(x_0,y_0)$, то його можна виразити через dx з рівності $dg(x_0,y_0)=0$.

Приклад 2. У випадку $f:R^n\times R^m\to R^1$ і $g:R^n\times R^m\to R^m$ достатня умова умовного екстремуму у точці $\left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ має вигляд:

1. $\begin{cases} d^2\varphi\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\ge 0 \\ dg_i\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0, \quad i=1,\dots,m \end{cases}$, то в $\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ – умовний локальний мінімум.

2. $\begin{cases} d^2\varphi\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)\le 0 \\ dg_i\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0, \quad i=1,\dots,m \end{cases}$, то в $\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ – умовний локальний максимум.

3. $d^2\varphi\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ змінює знак в залежності від $dx=(dx_1,\dots,dx_n)\in R^n$, (зауважимо, що $dy=(dy_1,\dots,dy_n)\in R^m$, що фігурує у формі $d^2\varphi\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$, можна виразити через dx з рівностей $dg_i\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)=0, \quad i=1,\dots,m$), то у точці $\left(x_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)}\right)$ немає екстремуму.

Використовуючи розглянуті в статті умови існування умовного локального екстремуму в гільбертовому просторі, можна отримати умови в R^n як частинний випадок даної ситуації.

Список використаних джерел

1. Скафа Е. И. Теоретико-методические основы формирования приемов эвристической деятельности при изучении математики в условиях внедрения современных технологий обучения : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Скафа Елена Ивановна ; Донецкий нац. ун-т. – Донецк, 2004. – 479 с.
2. Скворцова С. О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики // Електронний журнал „Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку". – 2010. – Вип. № 4. [http://www.intellect-invest.org.ua/ukr/pedagog_editions_e-magazine_pedagogical_science_vypuski_n4_2010_st_4/].
3. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : автореф. дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Ю. В. Триус ; Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2005. – 48 с.
4. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Р. Ус, З. Г. Шефтель. – К. : Вища Школа, 1990. – 600 с.
5. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – 648 с.
6. Зорич В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2002. – 476 с.
7. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Є. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – 326 с.

Reference

1. Skafa, E.I. (2004). Teoretiko-metodicheskie osnovi formirovania priemov evristicheskoi deiatelnosti pri izychenii matematiki v ysloviah vnedrenia sovremennih tehnologii obychenia [Teoretiko-methodical bases of formation of methods of heuristic activity at studying of mathematics in the conditions of introduction of modern technologies of training]. Extended abstract of candidate's thesis. Donensk [in Ukrainian].
2. Skvortsova, S.O. (2010). Formuvannia profesiynoi kompetentnosti v maybutnyogo vchitelia matematiki [Formation of professional competence in the future teacher of mathematics]. Retrieved from [http://www.intellect-invest.org.ua/ukr/pedagog_editions_e-magazine_pedagogical_science_vypuski_n4_2010_st_4/].
3. Triys, U.V. (2005). Komputerno-orientovani metodichni sistemi navchannia matematichnih discipline y vishih navchalnih zakladah [Computer-oriented methodical systems of teaching mathematical disciplines in higher educational establishments]. Kiev, 48 [in Ukrainian].
4. Berezanskiy, U.M. (1990). Funkcionalniy analiz [Functional Analysis]. Kiev, 600 [in Ukrainian].
5. Davidov, M.O. (9991). Kyrs matematichnogo analizy [Course of mathematical analysis]. Kiev, 648 [in Ukrainian].
6. Zorich, V.A. (2002). Matematicheskiy analiz [Mathematical analysis]. Moscow, 476 [in Russian].
7. Ilyin, V.A. (1982). Osnovi matematicheskogo analiza [The basis of mathematical analysis]. Moscow, 326 [in Russian].

Самойленко В. Г., Григорьева В. Б. Исследование условных экстремумов функционалов в гильбертовом пространстве в курсе математического анализа при подготовке будущих учителей-математиков

В статье рассматриваются некоторые методические особенности обучения будущих учителей-математиков математических дисциплин в педагогическом учебном заведении с учетом профессионально-педагогической направленности обучения и требований, предъявляемых к будущей педагогической деятельности. Учитывая важное место курса математического анализа в профессиональной подготовке учителей математики и значение теории исследования функций, рассмотрен вопрос исследования экстремумов функций, а именно вопрос исследования условных экстремумов функционала в гильбертовом пространстве. Используя рассмотренные в статье условия существования условного локального экстремума в гильбертовом пространстве, можно получить более известные и общие условия в R^n как частный случай данной ситуации.

Ключевые слова: линейный ограниченный функционал, линейный оператор, нормированное пространство, пространство Гильберта, условный экстремум.

Samoilenko V., Hryhorieva V. Investigation of conditional extremes of functionals in Hilbert space in the course of mathematical analysis in the preparation of future mathematics teachers

The problem of forming the professionalism of future mathematics teachers in the process of professional training is due to the dynamic transformations that take place in the political, social, economic spheres of our country in general and in the field of education in particular. A modern mathematics teacher must possess not only fundamental knowledge of the subject, but also a complex of concrete means of professional activity in applying the acquired knowledge and skills in the field of educational, educational, educational, educational, scientific, methodological, organizational and managerial activities. It is common knowledge that, due to the specifics of pedagogical education, the mathematical training of specialists in pedagogical higher educational institutions should differ from the corresponding training in the classical and technical universities. The future teacher of mathematics must receive basic mathematical training, which will provide him with effective knowledge, professional competences, beyond the bounds of the course of mathematics that is taught in school. In the article some methodical features of training of the future mathematics teachers of mathematical disciplines in a pedagogical educational institution are considered, taking into account the professional pedagogical orientation of education and the requirements for future pedagogical activity. Considering the important place in the course of mathematical analysis in the professional training of mathematics teachers and the importance of the theory of function research, the question of investigating extremes of functions, namely the study of conditional extreme of a functional in Hilbert space, is considered. Using the conditions for the existence of a conditional local extreme in a Hilbert space considered in the article, we can obtain more known and general conditions in R^n as a special case of this situation.

Key words: linear bounded functional, linear operator, normed space, Hilbert space, conditional extreme.

Стаття надійшла до редколегії 01.05.2018