УДК 622.831.1

А.Н. Шашенко, д-р. техн. наук, проф.,
В.Н. Журавлев, канд. техн. наук,
М.С. Дубицкая

Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г. Днепропетровск, Украина, e-mail: shashenkoa@nmu.org.ua, machula.mariya@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОГИБАЮЩЕЙ ВИБРОАКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА НЕОДНОРОДНОГО ПОРОДНОГО МАССИВА

A.N. Shashenko, Dr. Sci. (Tech.), Professor,
V.N. Zhuravlev, Cand. Sci. (Tech.),
M.S. Dubitskaya

State Higher Educational Institution "National Mining University", Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: shashenkoa@nmu.org.ua, machula.mariya@mail.ru

MATHEMATICAL MODEL OF THE ENVELOPE OF VIBROACOUSTIC SOUNDING OF HETEROGENEOUS ROCK MASSIF

Цель. Разработка эффективной методики прогноза структурных неоднородностей в породном массиве путем анализа его напряженно-деформированного состояния.

Методика. На основе теории сигналов рассмотрено первое приближение процесса информационной модуляции зондирующего сигнала неоднородностями дисперсионной среды.

Результат. Проведён анализ математической модели модуляции полной фазы огибающей волнового пакета, распространяющегося в неоднородном породном массиве. Обосновано применение метода низкочастотного эквивалента в задаче исследования информационного расстояния между функциями полной фазы, несущей информацию о дисперсионных свойствах исследуемого массива. На основе предложенной модели обосновано, что волновой пакет проходит через структурно-неоднородный породный массив с одинаковой скоростью без его искажения в процессе перемещения. Однако реальные измерения показывают, что искажение волнового пакета все же имеет место, и расстояние, на котором это можно не учитывать, требует последующего обоснования.

Научная новизна. Впервые предложена и обоснована математическая модель распространения акустического волнового пакета в диспергирующей породной среде, основанная на волновых функциях Грина, позволяющая прогнозировать параметры структурных неоднородностей массива.

Практическая значимость. Разработанное математическое описание модели распространения волнового пакета в диспергирующей породной среде дает возможность последующего более глубокого анализа и обоснования, что, в свою очередь, позволит усовершенствовать методику прогноза геологических нарушений в углепородном массиве. Этот результат наиболее востребован в условиях отработки угольных пластов, опасных по внезапным выбросам угля и газа – природного явления, причины которого до конца не установлены. Его следствием, как правило, являются человеческие жертвы, поскольку оно носит труднопрогнозируемый катастрофический характер.

Ключевые слова: *волновой пакет, дисперсионные свойства, модуляция, узкополосый сигнал, полная фаза*

Актуальность. Прогноз напряженно-деформированного состояния породных массивов и их структурных особенностей имеет решающее значение для эффективной и безопасной добычи полезных ископаемых. Подземная разработка месторождений полезных ископаемых провоцирует техногенное воздействие на весь породный массив. Оно проявляется в перераспределении опорного давления и может привести к полному или частичному разрушению породного массива на отдельных участках, которые выделяются физическими свойствами и/или геологическим строением.

Состояние вопроса. Попытки решения задачи прогноза состояния породного массива при ведении горных работ были самые разные, например, шахтная сейсморазведка [1], метод акустической томографии RockVision3d™ [2, 3], использовании георадаров, описанных ещё Ф. Крауфордом, и др. В шахтных условиях наиболее широко применяется сейсмоакустический метод прогноза состояния и свойств породного массива. По оценкам специалистов [1] средний уровень его достоверности не превышает 60%. Отсюда можно сделать вывод о том, что в настоящее время отсутствуют надежные методики прогноза состояния породных массивов, а их совершенствование является чрезвычайно актуальной задачей.

Введение. Изначально будем исходить из того, что наиболее информативным из всех видов известных методов прогноза является акустический метод. Он основан на том, что породный массив – это неоднородная по своей структуре и свойствам природная среда. Любая неоднородность в нем, тем или иным образом, влияет на прохождение энергии акустического зондирующего сигнала (изменяется скорость, происходит поглощение энергии, отражение и преломление волн на структурных неоднородностях). Из теории геолокации следует, что, инициируя на входе массива сигнал с известными параметрами, можно, анализируя форму виброакустического сигнала, регистрируемого на выходе из массива, получить информацию о дисперсионных свойствах среды линии связи, расположенной между источником и приемником сигнала.

Постановка задачи. Известно, что функция, описывающая гармоническую волну [4], распространяющуюся в бездисперсионной среде, записывается в виде

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t), \tag{1}$$

где $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}$– волновой вектор, ω– круговая частота. Анализ выражения (1) показывает, что можно ввести фазовую функцию $\phi(x,t)$ косинусоидальной бегущей волны, распространяющейся в положительном направлении оси OX, как аргумент волновой функции $\cos(\omega - kx)$

$$\phi(x,t) = \omega t - kx. \tag{2}$$

При анализе поведения гребня волны $(\cos[\phi(x,t)]) \to max$ или ее впадины $(\cos[\phi(x,t)] \to min)$, по мере увеличения времени t, необходимо переходить к большим значениям x так, чтобы за $\phi(x,t)$ была постоянной. Условие постоянства фазы с математической точки зрения означает, что полный дифференциал функции $\phi(x,t)$, имеющий вид

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx = \omega\, dt - kdx, \tag{3}$$

равен нулю. Приравнивая (3) нулю, находим условие постоянства фазы $\frac{dx}{dt} = v_f = \frac{\omega}{k}$, где v_f– фазовая скорость волны, которое дает связь между фазовой скоростью волны, частотой волны и волновым вектором в координате x. Параметры волнового вектора k (3) определяются свойствами $\gamma(x)$ среды распространения, таким образом $k = f[\gamma(x)]$.

В связи с тем, что искомые координаты x дисперсионных свойств геологической неоднородности с параметрами $\gamma(x)$ являются предметом геолокации, разработка физической и математической модели процесса информационного изменения параметров энергии зондирующего волнового пакета (1), который распространятся через породный массив с геологическими нарушениями $\gamma(x)$, является актуальной научной задачей.

Основная часть. Рассмотрим простейшую задачу описания параметров диспергирующего волнового пакета, локализованного в момент времени $t = 0$ в пространстве. Огибающая волнового пакета является функцией достаточно быстро стремящейся к нулю при $x \to \pm\infty$. Введем обозначение $f(x) = u(x,0)$. Условие «быстрого стремления функции к нулю» обеспечивает возможность ее разложения в ряд Фурье. Если функция $f(x)$ не периодическая по координате x, то суперпозиция составляющих ее функций непрерывна по переменной k, и выражается через интеграл Фурье $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}dk$, где $A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$. Каждая гармоническая составляющая в данном выражении определяет собственную гармоническую волну с частотой $\omega = \omega(k)$, т.е. каждая частотная составляющая бегущей волны распространяется со своей собственной фазовой скоростью $v_f = \frac{\omega(k)}{k}$. Искомая функция $u(x,t)$, описывающая бегущую волну, является суперпозицией гармонических бегущих волн. Это означает, что найти $u(x,t)$ можно заменой kx на $[kx - \omega(k)t]$ в каждой гармонической составляющей суперпозиции

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}dt. \tag{4}$$

Уточняя решение поставленной задачи, рассмотрим распространение энергии волнового пакета в диспергирующей среде в случае отсутствия поглощения, то есть учтём зависимость от частоты только действительной части волнового числа. В линейной среде сигнал (4) можно представить в виде суперпозиции плоских гармонических волн, при этом он будет обладать определенным частотным спектром. В диспергирующей среде фазовая скорость v_f различных частотных составляющих разная. С учетом диссипации процесс распространения описывается более сложным уравнением, и дисперсионное отношение тоже усложняется $k(\omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1 + i\frac{\gamma\omega}{c_0 c_0^2}\right)$, где c_0 - скорость звука в однородном породном массиве. Волновое число является комплексной величиной $k(\omega) = k'(\omega) - ik"(\omega)$, его вещественная часть определяет фазовую скорость $v_f = \frac{\omega(k)}{k}$, а мнимая определяет закон затухания амплитуды частотной составляющей $|u(x,t)| = u_0 e^{-k"x}$. Разность фаз между составляющими сигнала меняется, и, как следствие, меняется форма сигнала. При этом скорость распространения сигнала волнового пакета $u(x,t)$ будет отличаться от скорости распространения его частотных составляющих.

В случае отсутствия поглощения частота волны зависит только от действительной части волнового числа, а волновое уравнение для акустических волн имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - L(u) = 0;$$

$$L(u) = \frac{b}{c_0 c_0^2}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x^2}; \qquad (5)$$

$$c = c_0.$$

В решаемой задаче диспергирующая среда занимает полупространство $x > 0$, и на ее границе задан входной сигнал $u(x = 0, t) = u_0(t)$, который имеет частотный спектр (4). Получаем решение уравнения (5) через поле на границе

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t')G(x, t - t')dt', \qquad (6)$$

где $G(x, t - t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega(t-t') - k(\omega)x]}$ – функция Грина.

В диспергирующей среде функция Грина точно рассчитывается в редких случаях, так как закон дисперсии $\gamma(x)$ может быть очень сложным.

Для определения математической модели функции $k(\omega)$ уточним математическую модель зондирующего сигнала $u(x,t)$ в случае инициализации его процессом детонации взрывчатого вещества.

Известно, что процесс одномерной детонации, распространяющейся с постоянной скоростью D, можно считать стационарным, рассматривая его в системе координат, движущейся с той же скоростью. В этой системе взрывчатое вещество (ВВ) входит во фронт волны, раскладывается и выходит из зоны реакции со скоростью, уменьшенной на величину U, равную скорости газообразных продуктов взрыва.

В случае одномерного потока закон сохранения массы

$$\rho_0 D = \rho_1 (D - U), \qquad (7)$$

импульса

$$\rho_0 D^2 + P_0 = \rho_1 (D - U)^2 + P_1, \qquad (8)$$

энергии

$$E_0 + \frac{1}{2}D^2 + P_0 V_0 = Q + E_1 + \frac{1}{2}(D - U)^2 + P_1 V_1, \quad (9)$$

уравнения состояния

$$P = P(V_1; E_1) \qquad (10)$$

и условие Чепмена-Жуге

$$D = C + U \qquad (11)$$

образуют систему уравнений, из которой определяется как скорость детонации D, так и состояние реагирующего ВВ.

В уравнениях (7) – (11) введены такие обозначения: $\rho = {}^1/_V$ – плотность ВВ до и после взрыва (отвечает индексам „0“ и „1“); P_0 и P_1 – давление (конечное давление P_1 отвечает условию Чепмена-Жуге); Q – теплота реакции; E_0 и E_1 – удельные внутренние энергии.

Отметим, что при $\mathrm{P}_1 \gg \mathrm{P}_0$, $\mathrm{E}_1 \gg \mathrm{E}_0$ и сложении уравнений (7) и (8) получим

$$P_1 = \rho_0 D U. \qquad (12)$$

Сумма уравнений (7), (8) и (9) дает

$$Q + E_1 = 0{,}5 P_1 (V_0 - V_1). \qquad (13)$$

Давление детонационной волны в точке Чепмена-Жуге рассчитывается по формуле

$$\mathrm{P} = \frac{\rho_0 D^2}{k+1}, \qquad (14)$$

где k – показатель политропы продуктов взрыва. Здесь скорость детонации выражена в м/с, а плотность – в кг/м^3.

Таким образом, для оценки скорости детонации можно воспользоваться формулой

$$D_{\mathrm{H}} = D_{\mathrm{ET}}\sqrt{\frac{Q_{\mathrm{H}}}{Q_{\mathrm{ET}}}}, \qquad (15)$$

где D_H и D_{ET} – скорости детонации нового и эталонного ВВ соответственно; Q_H и Q_{ET} – теплота взрыва нового и эталонного ВВ.

В качестве эталона, например, можно использовать аммонит №6 ЖВ, который имеет теплоту взрыва (энергию) 4315,7 кДж/кг и скорость детонации 3600 м/с при плотности зарядки 1000 кг/м^3.
Скорость детонации (м/с) при других плотностях зарядки определяется по формуле

$$D = D_{ET} + 3500(\rho_0 - 1). \qquad (16)$$

Таким образом, если использовать ВВ амонит-Т19, у которого плотность зарядки патрона 1,1–1,2 г/см^3, масса патрона 250г, скорость детонации можно оценить параметром 3600–4300 м/с, она будет колебаться в зависимости от плотности зарядки патрона. При средней плотности зарядки патрона, скорость детонации будет около 4 км/с, а интервал времени его сгорания, при длине 0,1 м, будет равен около $\tau_0 \approx 400$ мкс.

Таким образом, математическую модель зондирующего сигнала $u(x,t)$ можно представить в виде трапецеидального импульса, фронт которого определяется фронтом взрывной волны, а длительность – скоростью детонации определенной массы ВВ. Фронт сигнала определяет максимальную частоту высокочастотных составляющих, а его длительность – минимальную частоту низкочастотных составляющих, т.е. ширину спектра (4) – полосу частот линии связи источник энергии сигнала-приемник, а давление детонационной волны (14) её динамический диапазон. С учётом того, что амплитуды составляющих волнового пакета уменьшаются по экспоненциальному закону (с увеличением частоты) и скорость диссипации высокочастотных составляющих выше, чем низкочастотных, можно представить испытательный сигнал в виде квазимонохроматического сигнала с узким частотным спектром

$$\Delta\omega = (\omega - \omega_0), \frac{\Delta\omega}{\omega_0} < 1, \omega_0 = 1/\tau_0.$$

Для волнового пакета $u_0(x,t)$ в (4) и в (6) может быть записано в виде

$$u_0(x,t) = A_0(t_1 = \mu t)e^{i\omega_0 t}, \quad (17)$$

где A_0 – комплексная, медленно меняющаяся амплитуда, то есть $\left|\frac{dA_0}{dt}\right| << \omega_0|A_0|$, а $\mu \sim \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$. Для волнового пакета выражение (4) может быть упрощено, так как требуется знать не полный закон дисперсии, а поведение k(ω) в окрестности точки ω_0. Запишем $k(\omega)$ как $k(\omega) = k(\omega_0 + [\omega - \omega_0])$. Так как $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, то в пределах спектральной линии излучения $k(\omega)$ можно разложить в ряд по $(\omega - \omega_0)$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + \left(\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2 + \cdots \quad (18)$$

Подставим (17) и (18) в (6). Тогда поле волнового пакета имеет вид

$$u(x,t) = A(x,t)e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)x)}, \quad (19)$$

где

$$A(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_0(t')dt' \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{i\left[(t-t') - -\left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} x\right](\omega-\omega_0) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right)_{\omega_0} x(\omega-\omega_0)^2 + \cdots\right\}d\omega$$

– огибающая сигнала волнового пакета. Учет различных членов в (18) соответствует различным приближениям теории дисперсии. В первом приближении теории дисперсии учитываются только первые два члена в разложении (18)

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0).$$

Волновое поле

$$u \sim e^{i\left[\omega t - k(\omega_0)x - \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega-\omega_0)x\right]} = = e^{i\left[\omega t - k(\omega_0)x - \frac{x}{v_{\text{гр}}}(\omega-\omega_0)\right]},$$

так как

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0),$$

то

$$u \sim e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)x} e^{i(\omega-\omega_0)\left(t - \frac{x}{v_{\text{гр}}}\right)},$$

где первый сомножитель описывает волновые процессы на несущей частоте. Чтобы построить произвольный сигнал, нужно взять интеграл по всем спектральным составляющим с учётом того, что каждая спектральная составляющая должна иметь свою амплитуду. Тогда

$$u(x,t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)x)} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i(\omega-\omega_0)\left(t-\frac{x}{v_{\text{гр}}}\right)}d\omega$$

или

$$u(x,t) = A(x,t)e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)x)},$$

где

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i(\omega-\omega_0)\left(t-\frac{x}{v_{\text{гр}}}\right)}d\omega$$

- комплексная амплитуда сигнала или огибающая волнового пакета. Следовательно, $A(x,t)$ зависит только от $t - \frac{x}{v_{\text{гр}}}$

$$A(x,t) = A_0\left(t - \frac{x}{v_{\text{гр}}}\right), \quad (20)$$

где $A_0(x,t) = A(x=0,t)$ – граничное условие.

Выводы. Установлено, что в самом общем случае огибающая волнового пакета, проходящего через структурно неоднородный породный массив, распространяется с групповой скоростью и не искажается в процессе распространения. Данный вывод адекватен для огибающей волнового пакета в первом приближении теории дисперсии. Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что расстояние, на котором ещё можно не учитывать это искажение, зависит от длительности сигнала T_0 и дисперсии групповой скорости. В связи с ограниченным объемом публикации, дальнейший анализ математической модели модуляции полной фазы огибающей волнового пакета, распространяющегося в неоднородном породном массиве, продолжим в следующей статье.

Список литературы / References

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов – Донецк: ООО „АЛАН“, 2003. – 312 с.

Antsyferov, A.V. (2003), *Teoriya i praktika seysmorazvedki* [Theory and Practice of Seismic Prospecting], OOO “ALAN”, Donetsk, Ukraine.

2. Шашенко А.Н. Механика горных пород: Учебник для ВУЗов / А.Н. Шашенко, В.П. Пустовойтенко – К.: Новий друк, 2004. – 400 с.

Shashenko, A.N. and Pustovoytenko, V.P. (2004), *Mekhanika gornykh porod* [Mechanics of Rock], Tutorial for high school, Novyy druk, Kiev, Ukraine.

3. Neil, D.M., Hanna, K. and Descour, J.M. (1999), "RockVision3d™ seismic tomography applications in bump-prone coal mines", *Mine Planning and Equipment Selection 1999 & Mine Environmental and Economical Issues 1999*, Dnipripetrovsk, NMUU of Ukraine, pp. 509–520.

4. Соболєв В.В. Технологія та безпека виконання вибухови робіт. Практикум: Навч. посібник / Соболєв В.В., Усик І.І., Терещук Р.М. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 114 с.

Sobolyev, V.V., Usyk, I.I. and Tereshchuk, R.M. (2006), *Tekhnilohiia ta bezpeka vykonannia vybukhovykh robit* [Technology and safety blasting operations. Workshop] Textbook, NMU, Dnipropetrovsk, Ukraine.

Мета. Розробка ефективної методики прогнозу структурних неоднорідностей у породному масиві шляхом аналізу його напружено-деформованого стану.

Методика. На основі теорії сигналів розглянуто перше наближення процесу інформаційної модуляції зондуючого сигналу неоднорідностями дисперсійного середовища.

Результат. Проведено аналіз математичної моделі модуляції повної фази обвідної хвильового пакету, що поширюється в неоднорідному породному масиві. Обґрунтовано застосування методу низькочастотного еквівалента в задачі дослідження інформаційної відстані між функціями повної фази, що несе інформацію щодо дисперсійних властивостей досліджуваного масиву. На основі запропонованої моделі обґрунтовано, що хвильовий пакет проходить через структурно-неоднорідний породний масив з однаковою швидкістю без його спотворення в процесі переміщення. Однак реальні виміри показують, що спотворення хвильового пакету все ж має місце, і відстань, на якій це можна не враховувати, вимагає подальшого обґрунтування.

Наукова новизна. Уперше запропоновано та обґрунтовано математичну модель поширення акустичного хвильового пакету в дисперсійному породному середовищі, засновану на хвильових функціях Гріна, що дозволяє прогнозувати параметри структурних неоднорідностей масиву.

Практична значимість. Розроблений математичний опис моделі розповсюдження хвильового пакета в дисперсійному породному середовищі дає можливість подальшого більш глибокого аналізу та обґрунтування, що, у свою чергу, дозволить удосконалити методику прогнозу геологічних порушень у вуглепородному масиві. Цей результат найбільш затребуваний в умовах відпрацювання вугільних пластів, небезпечних за раптовими викидами вугілля та газу – природного явища, причини якого до кінця не встановлені. Його наслідком, як правило, є людські жертви, оскільки воно носить важкопрогнозований катастрофічний характер.

Ключові слова: *хвильовий пакет, дисперсійні властивості, модуляція, вузькополосий сигнал, повна фаза*

Purpose. To develop an effective method of prediction of structural heterogeneities in rock massif by analyzing its strain-stress state.

Methodology. Based on the theory of signals the process of the probing signal information modulation in heterogeneities of dispersion medium has been considered in the first approximation.

Findings. The mathematical model of modulation of total phase of the wave packet envelope propagating in an inhomogeneous rock massif has been analyzed. We have substantiated the method of low-frequency equivalent application to solve the problem of informational distance between the functions of the total phase, which carry information about the dispersion properties of the studied massif. On the base of the proposed model we have proved, that the wave packet passes through structurally heterogeneous rock massif with uniform speed without distortion in the process of movement. However, the actual measurements show that the distortion of the wave packet occurs, and we should substantiate the distance at which it can be ignored.

Originality. We have suggested the mathematical model of the acoustic wave packet propagation in the dispersive rock medium, based on the wave functions of Green, which allows us to predict parameters of the structural heterogeneities in massif.

Practical value. The developed mathematical description of the wave packet spread model in a dispersive rock medium allows us to do subsequent deep analysis and justification, which in turn will improve the technique of the forecast of geological faults in rock and coal massif. This result is most demanded in mining of outburst-prone coal beds.

Keywords: *wave packet, dispersion properties, modulation, narrowband signal, full phase*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук М.М. Довбнічем. Дата надходження рукопису 19.10.12.