formation. We have got the possibility to compensate the temperature drift of sensors by means of the known algorithmic methods and method of feed-back.

Practical value. The essential improvement of inclinometer output values accuracy substantially influences the determination of boring instrument position during geological exploration.

Keywords: *primary transducer, temperature drift, sensor of temperature, algorithmic method, drill string, experimental plant, magnetic field, heating set*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.Г.Заренбіним. Дата надходження рукопису 05.11.12.

УДК: 621.01, 621.09

П.Я. Пукач канд. фіз.-мат. наук, доц.,
І.В. Кузьо, д-р техн. наук, проф.

Національний університет „Львівська політехніка“, м. Львів, Україна, e-mail: ppukach@i.ua

НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ НАПІВНЕОБМЕЖЕНОГО КАНАТА З УРАХУВАННЯМ ОПОРУ

P.Ya. Pukach, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
I.V. Kuzio, Dr. Sci. (Tech.), Professor

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine, e-mail: ppukach@i.ua

NONLINEAR TRANSVERSE VIBRATIONS OF SEMIINFINITE CABLE WITH CONSIDERATION PAID TO RESISTANCE

Мета. Метою роботи є дослідження розв'язку задачі про нелінійні поперечні коливання пружного довгомірного тіла під дією сил опору в необмеженій області. Такі задачі мають прикладне застосування в різних технічних системах – коливаннях трубопроводів, залізничних колій, довгих мостів, електричних ліній, оптичних волокон. Необмеженість області створює додаткові принципові проблеми при дослідженні задачі. Для розглянутих у цій статті моделей нелінійних коливань не існує загальних аналітичних методик визначення динамічних характеристик коливального процесу.

Методика якісного вивчення коливань напівнеобмеженого каната під дією сил опору базується на загальних принципах теорії нелінійних крайових задач – методі монотонності та методі Гальоркіна.

Результати. Пропонується за допомогою якісних методів теорії нелінійних крайових задач отримати умови коректності розв’язку задачі (існування та єдиність розв’язку). У роботі для вказаних нелінійних коливальних систем отримано умови коректності розв’язку математичної моделі – достатні умови існування та єдиності у класі локально інтегровних функцій.

Наукова новизна. Полягає в узагальненні методики вивчення нелінійних задач на новий клас коливальних систем у необмеженій області, обгрунтуванні коректності розв’язку вказаної математичної моделі, що має практичне застосування в реальних технічних коливальних системах.

Практична значимість. Запропонована методика дозволяє не лише обгрунтувати коректність розв'язку моделі, але дає також можливість при її дослідженні застосовувати різноманітні наближені методи.

Ключові слова: *математична модель, нелінійні коливання, нелінійна крайова задача, метод Гальоркіна, метод монотонності, необмежена область*

Актуальність проблеми. Дослідження нелінійних коливальних і хвильових явищ у пружних стрижневих конструкціях при дії різного роду збурень (силових, інерційних, кінематичних) складає одну із класичних проблем теоретичної та технічної механіки. Активізація теоретичних досліджень у цьому напрямі зумовлена логікою розвитку основ динаміки деформованих систем, інтересами найрізноманітніших практичних застосувань у будівництві та промисловості, зокрема, у машинобудуванні.

Проблеми вивчення впливу параметрів системи на коливання в достатній мірі досліджені у випадку лінійних коливальних систем. Такі ситуації моделюються лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними [1]. Асимптотичні методи нелінійної механіки дозволили дослідити також широкий клас механічних коливальних систем для випадку квазілінійної залежності амплітуди коливань від пружних сил та сил опору [2, 3]. У випадку нелінійного закону пружності матеріалу, суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від пружних сил та сил опору задача пов’язана з принциповими математичними трудностями, оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв’язування такого класу задач. Тому не існує загальних методик визначення амплітудно-частотних характеристик коливального процесу. З іншого боку, якісні методи загальної теорії нелінійних крайових задач дають змогу для широкого класу згаданих вище коливальних систем отримати результати коректності розв’язку задачі (мова йде про існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних). Вказана методика дозволяє обгрунтувати коректність розв’язку моделі та дає змогу в подальшому при її дослідженні застосовувати різноманітні наближені методи. Таким чином, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними.

Ця стаття присвячена якісному вивченню математичної моделі нелінійних коливань напівнеобмеженого каната під дією нелінійних вінклерівських сил опору. Подібні задачі виникають у різноманітних технічних застосуваннях, наприклад, коливаннях трубопроводів на (нелінійній) пружній основі, залізничних колій, довгих мостів, туго натягнутих електричних ліній, оптичних волокон, вбудованих у нелінійно пружні тіла тощо [4–6]. Необмеженість області створює додаткові принципові проблеми при дослідженні моделі. Зокрема, задачі для нелінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta |u|^{\rho-2} u = f\,;$$
$$\rho > 2\,, \alpha\,,$$

де β – деякі функції (сталі) в необмежених областях розглядали, зокрема, у роботах [7–8]. На даний час якісні результати щодо коректності розв'язків згаданих вище математичних моделей вдалося отримати лише для доволі вузького класу задач у необмежених областях. Таким чином, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними.

Постановка задачі. У статті наведено методику якісного дослідження математичної моделі нелінійних коливань пружного напівнеобмеженого каната за умови лінійного (змінного за просторовою змінною) закону пружності та нелінійної вінклерівської сили. У найпростішій постановці модель описується змішаною задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + g\left(x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) = f(x,t) \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x)\,; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \quad (3)$$

та крайовою умовою

$$u(0,t) = 0 \quad (4)$$

в області $Q = (0,+\infty) \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$.

Всюди надалі в цій роботі позначатимемо $Q_{R,\tau} = (0,R) \times (0,\tau)$, $Q_\tau = (0,+\infty) \times (0,\tau)$ для довільних $R > 0$, $\tau \in (0,T]$. Використовуватимемо такі функціональні простори

$$H_0^1(0,R) = \left\{ u \in H^1(0,R) : u\big|_{x=0} = u\big|_{x=R} = 0 \right\};$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(0,R)} = \int_0^R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\,;$$

$$H^1_{0,loc}(0,+\infty) = \left\{ u \in H^1(0,R) \text{ для довільного } R > 1,\ u(0,t) = 0 \right\};$$

$$H^2_{0,loc}(0,+\infty) = \left\{ u : u \in H^2(0,R) \cap H_0^1(0,R) \text{ для довільного } R > 1 \right\};$$

$$L^r_{loc}(0,+\infty) = \left\{ u : u \in L^r(0,R) \text{ для довільного } R > 1 \right\};$$

$$L^r_{loc}(\overline{Q}) = \left\{ u \in L^r(Q_{R,T}) \text{ для довільного } R > 1 \right\};$$
$$r \in (1,+\infty)\,.$$

Мета роботи. Рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу. Відомо [9], що для лінійних рівнянь вказаного типу розв'язок залежить від початкових умов і правої частини лише в обмеженій області – всередині характеристичної області. Крім того, на самій характеристиці виконуються співвідношення для функціонала енергії системи [9]. Метою цієї статті є використання такого факту при дослідженні розв'язку задачі (1–4) в необмеженій області для певного класу нелінійних коливальних систем та отримання умов коректності розв'язку математичної моделі – достатніх умов існування та єдиності у класі локально інтегрованих функцій.

Розв'язком задачі (1–4) називаємо функцію u , що задовольняє включення

$$\begin{aligned} & u \in C([0;T]; H^1_{0,loc}(0,+\infty)); \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0;T]; L^2_{loc}(0,+\infty)) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}); \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0;T); H^1_{0,loc}(0,+\infty)); \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty((0;T); L^2_{loc}(0,+\infty)), \end{aligned} \quad (5)$$

умови (2–4) та рівняння (1) в сенсі розподілів.

Позначимо $r = \min\{2, p'\}$, де $p' = p/(p-1)$, $s = \max\{2, 2p-2\}$. Стосовно природи нелінійних вінклерівських сил припускаємо, що:

(G) функція $g(x,\xi)$ – вимірна за x і неперервна за ξ, причому для довільних $\xi, s \in R$ і майже всіх $x \in (0,+\infty)$ маємо $|g(x,\xi)| \le g_1 |\xi|^{p-1}$; $p > 2$, $g_1 = const > 0$;
$(g(x,\xi) - g(x,s))(\xi - s) \ge g_0 |\xi - s|^p$; $g_0 = const > 0$.

Основний результат цієї роботи: якщо функція $a(x) > a_0 > 0$ належить до простору $C([0,+\infty))$, виконується умова **(G)**,

$$f \in L^r_{loc}(\overline{Q})\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2_{loc}(\overline{Q});$$

$$u_0 \in H^2_{0,loc}((0,+\infty))\,;$$

$$u_1 \in L^s_{loc}(0,+\infty) \cap H^1_{0,loc}(0,+\infty)\,,$$

то існує єдиний розв'язок u задачі (1–4).

Методика розв'язування задачі. Виберемо довільне фіксоване число $R > 1$. Розглянемо допоміжну задачу в області $Q_{R,T}$ для рівняння (1) з правою частиною f^R і умовами

$$u(0,t) = u(R,t) = 0\,; \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0^R(x)\,; \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1^R(x)\,, \tag{7}$$

де $u_0^R(x) = u_0(x)\zeta_R(x),\ u_1^R(x) = u_1(x)\zeta_R(x),$ $\zeta_R \in C^2(\mathrm{R}),\ 0 \le \zeta_R(x) \le 1,\ \zeta_R(x) = 1$ при $x \le R-1,$ $\zeta_R(x) = 0$ при $x \ge R,\ \ f^R(x,t) = f(x,t)$ при $(x,t) \in Q_{R,T},\ \ f^R(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q \setminus Q_{R,T}$.

Дослідження розв'язку допоміжної задачі (6–7) проводимо за відомою схемою [10]. Для цього розглядаємо в області $Q_{R,T}$ послідовність гальоркінських наближень

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)\,,$$

де $N = 1,2,...$, $\{\varphi_k\}$ – ортонормована в $L^2(0,R)$ система лінійно незалежних елементів простору $H^2(0,R) \cap H_0^1(0,R) \cap L^s(0,R)$ таких, що лінійні комбінації $\{\varphi_k\}$ щільні у цьому просторі. Далі стандартними методами загальної теорії нелінійних крайових задач можна отримати, що

$$u^{N_k} \to u^R \quad \textit{слабко в} \quad L^2((0;T); H_0^1(0,R));$$

$$u^{N_k} \to u^R \quad \textit{слабко в} \quad L^2((0;T); H_0^1(0,R));$$

$$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u^R}{\partial t} \quad \textit{слабко в} \quad L^2((0;T); H_0^1(0,R))\,;$$

$$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u^R}{\partial t} \quad \textit{слабко в} \quad L^p(Q_{R,T})\,;$$

$$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u^R}{\partial t} \quad *\textit{слабко в} \quad L^\infty((0;T); H_0^1(0,R));$$

$$\frac{\partial u^2 u^{N_k}}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 u^R}{\partial t^2} *\textit{слабко} \quad \textit{в}\ L^\infty((0;T); L^2(0,R))\,;$$

$$\frac{\partial u^2 u^{N_k}}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 u^R}{\partial t^2} \quad \textit{слабко в} \quad L^2((0;T); L^2(0,R))\,;$$

$$g\left(x, \frac{\partial u^{N_k}(x,t)}{\partial t}\right) \to g\left(x, \frac{\partial u^R(x,t)}{\partial t}\right) \textit{слабко в}\ L^{p'}(Q_{R,T})$$

при $N_k \to \infty$. Аналогічно до [10] одержуємо $u^R \in C([0,T]; H_0^1(0,R)), \dfrac{\partial u^R}{\partial t} \in C([0,T]; L^2(0,R))$ і функція u^R задовольняє умови (7). З отриманих вище збіжностей можна визначити, що для функції u^R правильна тотожність

$$\int\limits_{Q_{R,\tau}} \left[\frac{\partial^2 u^R(x,t)}{\partial t^2} v + a(x)\frac{\partial u^R(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right] dxdt + \\ + \int\limits_{Q_{R,\tau}} \left[g\left(x, \frac{\partial u^R(x,t)}{\partial t}\right)v - f^R(x,t)v\right] dxdt = 0 \tag{8}$$

для всіх $v \in L^2((0,T); H_0^1(0,R)) \cap L^p(Q_{R,T})$ і всіх $\tau \in (0,T]$. Таким чином, з (8) випливає, що u^R є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{u(x,t)}{\partial x}\right) + g\left(x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = f^R(x,t) \tag{9}$$

в області $Q_{R,T}$ у сенсі розподілів. Крім того, функція u^R задовольняє умови (7) і включення

$$\frac{\partial u^R}{\partial t} \in L^2((0;T); H_0^1(0,R)) \cap L^p(Q_{R,T});$$

$$\frac{\partial^2 u^R}{\partial t^2} \in L^\infty((0;T); L^2(0,R))\,.$$

Продовжимо функцію u^R нулем на область $Q \setminus Q_{R,T}$ і збережемо для неї те ж позначення. Нехай R приймає значення m із множини $N \setminus \{1\}$. Тоді одержимо послідовність функцій $\{u^m\}$. Нехай $R_0 > 1$ – довільне фіксоване число. Розглянемо множину

$$\mathrm{B}_{R_0} = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 : x < R_0, t = T\}.$$

Позначимо $\mathrm{B}_{R_0,Q} = \mathrm{B}_{R_0} \cap \overline{Q}$. Побудуємо характеристичну область рівняння (1) з вершиною в довільній точці (x_0, T) множини $\mathrm{B}_{R_0,Q}$. Нехай характеристика задається рівнянням $\omega(x,t) = 0$ на площині. Відомо [9], що функція ω є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a(x)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0\,.$$

Позначимо $\mathrm{K}_{R_0}(x_0,T) = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2, \omega(x,t) \le 0\}$ – характеристична область з вершиною в довільній точці (x_0, T)

$$D_{R_0}^\tau = \left(\bigcup_{(x_0,T) \in \mathrm{B}_{R_0,Q}} \mathrm{K}_{R_0}(x_0,T)\right) \cap Q_\tau,\ \tau \in (0,T]\,.$$

Відзначимо, що границя області $D_{R_0}^\tau$ складається з відрізка $\Omega_0^{R_0}$ прямої $\{t = 0\}$, з відрізка $\Omega_\tau^{R_0}$ прямої

$\{t=\tau\}$, з відрізка $S_{R_0}^{\tau}$ бічної поверхні S_τ і з частини характеристики $\Sigma_{R_0}^{\tau}$ рівняння (1). Існує таке $m_{R_0} \in \mathrm{N}$, що $D_{R_0}^{T} \subset Q_{m_{R_0},T}$. Покажемо, що для всіх $m > m_{R_0}+1$ майже всюди в $D_{R_0}^{T}$ правильна рівність $u^m(x,t) = u^{m_{R_0}+1}(x,t)$. Для цього запишемо рівняння (9) для функцій $u^{m_{R_0}+1}$ і u^m, віднімемо від другого рівняння перше, помножимо різницю на функцію $\frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}}{\partial t}$ і проінтегруємо результат по області $D_{R_0}^{\tau}$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \left[\left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{m_{R_0}+1}}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}}{\partial t} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{m_{R_0}+1}}{\partial x^2} \right) \right) \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}}{\partial t} \right) \right] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \left(g\left(x, \frac{\partial u^m(x,t)}{\partial t} \right) - g\left(x, \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}(x,t)}{\partial t} \right) \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}}{\partial t} \right) dxdt = 0. \qquad (10)$$

Оскільки $f^m(x,t) = f^{m_{R_0}+1}(x,t)$ в області $D_{R_0}^{T}$. Крім того,

$$u_0^m(x) = u_0^{m_{R_0}+1}(x) = u_0(x);$$
$$u_1^m(x) = u_1^{m_{R_0}+1}(x) = u_1(x);$$
$$x \in (0, R_0).$$

Перетворення та оцінки доданків рівності (10), що використовують властивість невід'ємності функціонала енергії на характеристиці [9], разом з урахуванням нерівності

$$\int\limits_{D_{R_0}^{\tau}} \left(g\left(x, \frac{\partial u^m(x,t)}{\partial t} \right) - g\left(x, \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}(x,t)}{\partial t} \right) \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}}{\partial t} \right) dxdt \ge 0$$

дають змогу зробити висновок, що

$$\int\limits_0^{R_0} \left(\frac{\partial u^m(x,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}(x,\tau)}{\partial t} \right)^2 dx +$$
$$+ a_0 \int\limits_0^{R_0} \left(\frac{\partial u^m(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u^{m_{R_0}+1}(x,\tau)}{\partial x} \right)^2 dx \le 0, \tau \in [0,T]. \qquad (11)$$

Нехай тепер R_0 приймає значення з множини $\mathrm{N} \setminus \{1\}$. Визначимо функцію u в такий спосіб

$$u(x,t) = u^{m_k+1}(x,t), (x,t) \in D_k^T; \ k = 2,3,4,\ldots.$$

Ця функція є розв'язком задачі (1–4), що задовольняє (5).

Для обгрунтування єдиності розв'язку припускаємо існування двох розв'язків $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1–4). Тоді, вибираючи довільну область $D_{R_0}^{T}$, одержимо рівність вигляду (11), з якої випливає, що $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ в $D_{R_0}^{T}$. На підставі довільності R_0 одержимо $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ в Q.

Висновки. Обгрунтовано коректність розв'язку в математичній моделі нелінійних поперечних коливань напівнеобмеженого каната під дією сил опору – отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку. Вказана методика дозволяє обгрунтувати коректність розв'язку моделі також й у складніших випадках – коливань під дією комбінованих нелінійних сил пружності та опору. Отримані якісні результати показують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна та в подальшому при дослідженні динамічних характеристик розв'язків дають можливість застосовувати різноманітні наближені методи.

Список літератури / References

1. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.

Yerofeyev, V.I., Kazhayev, V.V., Semerikova, N.P., (2002), *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost* [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Non-linearity], Fizmatlit, Moscow, Russia.

2. Сокіл Б І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.02.09 „Динаміка та міцність машин“ / Б.І. Сокіл; // Національний ун-т „Львівська політехніка“. – Львів, 2001. – 36 с.

Sokil, B.I., (2001), “Nonlinear vibrations of mechanical systems and analytical methods for their research”, Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, Dynamics and strength of machines, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine.

3. Сокіл Б.І. Дослідження нелінійних коливань стрічок конвеєрів / Б.І. Сокіл // Оптимізація виробничих процесів і технологічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – № 394. – С. 101–104.

Sokil, B.I., (2000), "The study of nonlinear oscillations of conveyor belts", *Optymizaciya vyrobnychykh procesiv i tehnologichnyy control u mashunobuduvanni ta pruladobuduvanni*, issue 394, pp. 101–104.

4. Ghayesh, M.H., (2010), "Parametric vibrations and stability of an axially accelerating string guided by a non-linear elastic foundation", *Int. J. Non-Lin. Mech.*, Vol. 45, pp. 382–394.

5. Demeio, L. and Lenci, S., (2007), "Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 49, pp. 203–215.

6. Demeio, L. and Lenci, S., (2008), "Second-order solutions for the dynamics of a semi–infinite cable on a unilateral substrate", *J. Sound Vibr.*, Vol. 315, pp. 414–432.

7. Lavrenyuk, S.P. and Pukach, P.Ya., (2007), "Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables", *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 59, no.11, pp. 1708–1718.

8. Пукач П.Я. Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами/ П.Я. Пукач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004 – № 4. – Т.47. – С. 149–154.

Pukach, P.Ya., (2004), "Mixed problem in unbounded domain for weakly nonlinear hyperbolic equation with growing coefficients", *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polya*, vol. 47, no. 4, pp. 149–154.

9. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / Олейник О.А. – М.: Бином, 2005. – 60 с.

Oleynik, O.A., (2005), *Lekcii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations], Binom, Moscow, Russia.

10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач/ Лионс Ж.-Л.; Перев. с англ. под ред. О.А. Олейник – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 587 с.

Lions, J.L. (2002), *Nekotorye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach* [Some Methods For Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Translated by O.A. Oleynik, Editorial URSS, Moscow, Russia.

Цель. Целью работы является исследование решения задачи о нелинейных поперечные колебаниях упругого длинномерного тела под действием сил сопротивления в неограниченной области. Такие задачи имеют прикладное применение в различных технических системах – колебаниях трубопроводов, железнодорожных путей, длинных мостов, электрических линий, оптических волокон. Неограниченность области создает дополнительные принципиальные проблемы при исследовании задачи. Для рассматриваемых в этой статье моделей нелинейных колебаний не существует общих аналитических методик определения динамических характеристик колебательного процесса.

Методика качественного изучения колебаний полунеограниченного каната под воздействием сил сопротивления базируется на общих принципах теории нелинейных краевых задач – методе монотонности и методе Галеркина.

Результаты. Предлагается с помощью качественных методов теории нелинейных краевых задач получить условия корректности решения задачи (существование и единственность решения). В работе для указанных нелинейных колебательных систем получены условия корректности решения математической модели – достаточные условия существования и единственности в классе локально интегрируемых функций.

Научная новизна. Заключается в обобщении методики изучения нелинейных задач на новый класс колебательных систем в неограниченной области, обосновании корректности решения указанной математической модели, которая имеет практическое применение в реальных технических колебательных системах.

Практическая значимость. Предложенная методика позволяет не только обосновать корректность решения модели, но и дает возможность при ее исследовании применять различные приближенные методы.

Ключевые слова: *математическая модель, нелинейные колебания, нелинейная краевая задача, метод Галеркина, метод монотонности, неограниченная область*

Purpose. To study the methods of solution of the problem of nonlinear transverse vibrations of elastic long-length body under the force of resistance in unbounded domain. Such problems have applications in various technical systems, for example, vibration of pipelines, railways, long bridges, electric lines, optical fibres. The unboundedness of the area creates more fundamental difficulties in the study of the problem. For the models of nonlinear oscillations under consideration there are no general analytical techniques of determination of the dynamic characteristics of the oscillation process.

Methodology. The qualitative study of semi-infinite cable vibrations under the forces of resistance is based on the general principles of the theory of nonlinear boundary value problems, the method of monotony and Galerkin method.

Findings. We have suggested using qualitative methods of the theory of nonlinear boundary value problems to obtain the problem solution correctness conditions (existence and uniqueness of the solution). The required conditions of the correctness of the solution have been obtained for the mathematical models of nonlinear systems (sufficient conditions of the existence and uniqueness in the class of locally integrable functions).

Originality. We have generalized the methods of study of nonlinear problems for new class of oscillation systems in unbounded domains. We have substantiated the correctness of the solution of specified mathematical model, which has practical applications in real engineering oscillation systems.

Practical value. The technique allows proving the correctness of the model solution, and gives the opportunity to apply various approximate methods.

Keywords: *mathematical model, nonlinear vibrations, nonlinear boundary value problem, Galerkin method, method of monotony, unbounded domain*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук Б.І. Соколом. Дата надходження рукопису 14.12.12.

УДК 624:620.193

А.П. Иванова, канд. техн. наук, доц.

Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г. Днепропетровск, Украина, e-mail: shivatro@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

A.P. Ivanova, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor

State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: shivatro@yandex.ru

RESEARCH OF LONGEVITY OF THE CENTRALLY COMPRESSED BARS WITH CHANGING GEOMETRICAL CHARACTERISTICS

Цель. Повышение надежности, ремонтопригодности и долговечности металлических стержневых конструкций, а также снижение их материалоемкости.

Методика. Основу исследований составляет обработка и анализ результатов обследования технического состояния стержневых металлоконструкций, изучение проблем деформирования конструкций, работающих в агрессивных средах. Оценка долговечности стержней, составляющих такие конструкции, усложняется необходимостью определения момента инерции и положения главных центральных осей, которые будут со временем меняться под действием коррозии. В работе использована математическая модель коррозионного износа, которая учитывает эти изменения.

Результаты. В реальных конструкциях выход из строя какого-либо элемента может произойти не только в результате достижения напряжений в нем предельно допустимых значений, но и в результате потери устойчивости в том случае, если стержень работает на сжатие.

Рассмотрена задача оптимального проектирования стержневых элементов различных профилей с изменяющимися вследствие коррозии геометрическими характеристиками. Исследовано влияние параметров агрессивной среды и уровня нагружения на поперечные размеры сжатых стержней. Графически проиллюстрирована зависимость срока службы сжатых стержней от их длины для различных уровней нагружения.

Научная новизна. Полученные в работе формулы позволяют учитывать изменение положения центра тяжести, ориентации главных осей и минимальных моментов инерции стержней. Исследовано влияние длины сжатых стержней различного профиля на их срок службы, а именно – какие ограничения вступают в силу – по прочности, по устойчивости или действуют оба ограничения.

Практическая значимость. Получено значение параметра поврежденности, соответствующее моменту исчерпания несущей способности для сжатых стержней.

Ключевые слова: *долговечность сжатых стержней, коррозионный износ, напряжение, параметр поврежденности, устойчивость, прочность, момент инерции*

Актуальность работы. Многоэлементные стержневые конструкции (мосты, копры, эстакады) широко распространены в современном строительстве. Проблемам деформирования [1] и оптимального [2] проектирования таких конструкций посвящено достаточно большое количество работ [3]. Однако вопросы повышения надежности, ремонтопригодности, снижения материалоемкости именно стержневых конструкций не теряют своей актуальности.

Оценка долговечности сжатых стержней в значительной степени усложняется необходимостью определения минимального момента инерции и положения главных центральных осей сечения, которые будут изменяться с течением времени, например, под воздействием коррозии.

Постановка задачи. В том случае, когда на стержень действуют сжимающие нагрузки, большое влияние на его срок службы оказывают момент инерции поперечного сечения и длина стержня.

В реальных конструкциях выход из строя какого-либо элемента может произойти не только в результате достижения напряжением в нем предельно допустимых значений, но и в результате потери устойчивости в том случае, если стержень работает на сжатие (рис.1).

Результаты исследований. Рассмотрим стержень круглого сечения (форма наиболее устойчивая к коррозии).

В качестве модели коррозионного износа принимаем [4]

$$\frac{dh}{dt} = -\nu_0 \cdot \left[1 + k\sigma\right],$$

где h – изменяющийся с течением времени геометрический параметр (например, радиус круга);