

hit probability of these values into the region of feasibility surrounded by  $m$ -dimensional parallelepiped.

**Findings.** The obtained values of structural parameters are optimal with a probability of 0.95 under required durability and operating reliability, which provide tireless durability, twisting and flexing strength, inflexibility and vibration resistance. The structural parameters determined by information technologies meet the calculation results.

**Originality.** For the first time the IT-based optimization simulation model allows increasing of the planning process productivity in tens of times was created and offered.

**Practical value.** We recommend the simulation model for introduction into engineering and educational process

of higher technical educational establishments for design not only drives of scraper conveyers but drives of different machines. The programme development system C++ software package created on the base of the offered optimization simulation model to be used in Windows XP environment allows easy introduction of the shaft design process into engineering.

**Keywords:** *optimization, parameters of shaft, simulation model, durability of shaft*

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.О. Малащенком. Дата надходження рукопису 17.07.13.*

УДК 621.85.01

Н.А. Лубенец, канд. техн. наук, доц.

Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г.Днепропетровск, Украина,

## НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА О СКОЛЬЖЕНИИ ГИБКОГО ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОМУ БЛОКУ

N.A. Lubenets, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor

State Higher Educational Institution "National Mining University", Dnipropetrovsk, Ukraine

## NEW SOLUTION OF THE EULER PROBLEM ABOUT A FLEXIBLE BODY SLIDING OVER A FIXED BLOCK

**Цель.** Решение задачи о скольжении гибкого тела по блоку, которое учитывает принцип сохранения энергии и современные знания о трении.

**Методика.** Обосновывается система дифференциальных уравнений равновесия механической системы, которая описывает трение элементарного участка гибкого тела по неподвижному блоку, действующий закон трения тел, закон сохранения энергии. При решении устанавливается зависимость величины натяжения гибкого тела по линии контакта с блоком от угла сечения при трении, которая отвечает закону сохранения энергии.

**Результаты.** Решение описывает взаимосвязь угла обхвата, коэффициента трения гибкого тела по блоку, сил, приложенных к концам гибкого тела, его скорости движения и линейной массы между собой. Решение распространяется не только на скольжение тел, а и на их сцепление.

**Научная новизна.** Обоснована новая система дифференциальных уравнений равновесия механической системы при трении гибкого тела по блоку, которая содержит двухпараметрический закон трения тел, условие равновесия натяжения гибкого тела по линии контакта с блоком и приводится ее аналитическое решение. Установлены линейная зависимость величины натяжения гибкого тела по линии контакта с блоком, выражения для прямого вычисления коэффициента трения и нормальной реакции между телами, которые не зависят от фрикционных свойств тел, описывается весь диапазон возможных сил, которые могут быть приложены к концам гибкого тела при испытании.

**Практическая значимость.** Решение задачи преодолевает противоречия между накопившимися данными практики и известными решениями. Обеспечивается возможность при испытании задавать нормальную реакцию между телами и прямо определять их коэффициент трения. Полученные знания развивают математические методы решения системы дифференциальных уравнений, задач механики и физики, обогащают представления о трении гибких тел, способствуют прогрессу в научных исследованиях, образовании, машиностроении.

**Ключевые слова:** *дифференциальное уравнение, гибкое тело, блок, натяжение, нормальная реакция, трение, коэффициент трения, потенциальная энергия, сохранение энергии, удлинение, угол обхвата*

**Постановка проблемы.** Описание проблемы скольжения гибкого тела по неподвижному блоку известно больше двух столетий и берет начало с 1775 года после вывода Эйлера (из него вытекает закон трения

гибких тел Эйлера или формула Эйлера). Его решение, ставшее классическим, нашло всеобщее признание и до сегодняшнего дня во всем мире используется в образовании, научных исследованиях и машиностроении. При этом правильность его решения не подвергалась сомнению. Потому задача о трении гибкого тела по неподвижному блоку и не принадле-

жит к „задачам тысячелетия“, математическим проблемам, правильное решение которых не найдено за многие годы (пока решили только одну из этих семи задач: Григорий Перельман, который начал работать над ней со своим учителем-наставником профессором Ричардом Гамильтоном (США), доказал гипотезу Пуанкаре, известную около ста лет), хотя по значимости и актуальности она может соперничать с любой из известных.

Анализ известного решения задачи и данные практики наводят на критические размышления. Решение задачи, как известно, не описывает граничных условий трения гибкого тела, когда равно нулю меньшее усилие, приложенное к одному из его концов. По анализу данных Л.В. Андреева в реальном гибком теле – конвейерной ленте, сила трения между ней и барабаном, полученная экспериментально, до 30% выше в сравнении с расчетным значением.

Несмотря на это и многочисленные работы выдающихся ученых М. Кретца, М. Т. Уразбаева, Грастофа, М.К. Демьянова, Н.П. Петрова, Н.Е. Жуковского, О. Кеммерера, А. Фебера, А. Фридриха, Е.А. Иванова, В.А. Добровольского, Е.М. Гутьяра, Хамеля, М.В. Цепляева, В.С. Полякова, Е.Г. Глухарева, И.Г. Штокмана, П.М. Огибалова, А.Л. Рабиновича, М.Н. Федотова, Б.Л. Давыдова, Чжу-Ши-юй, Г.М. Баргенева, В.И. Чуканова, Л.В. Андреева, Л.И. Колчина, В.И. Моссаковского, А.Ю. Ишлинского и многих др. в области уточнения, взятого ими за основу вывода Эйлера в задаче о трении гибкого тела по неподвижному блоку, решение Эйлера по-прежнему считалось самым совершенным.

**Нерешенная проблема.** Известные решения учений отвечают системе дифференциальных уравнений равновесия элементарного участка гибкого тела  $dl$  при его скольжении по блоку и закону трения тел Амонтона, предложенной Эйлером, рис. 1.

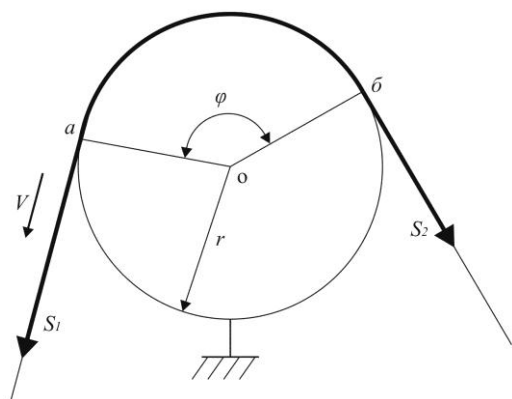


Рис. 1. Расчетная схема скольжения гибкого тела по блоку:  $S_2, S_1$  – усилия натяжения в набегающей и сбегающей с блока ветвях гибкого тела;  $r$  – радиус блока;  $\varphi$  – угол обхвата блока гибким телом;  $v$  – направление скольжения гибкого тела

Для идеальной нити – невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой (гибкого тела)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_y = 0 \Rightarrow dN = Sda - dC \\ \sum_{i=1}^n F_x = 0 \Rightarrow dS = dF \\ dF = \mu dN \end{cases},$$

где  $F_x, F_y$  – проекция сил, приложенных к концам элементарного участка, на ось  $x$  и  $y$ ;  $S(\alpha)$  – усилие натяжения гибкого тела в заданном сечении;  $dC$  – центробежная сила элементарного участка;  $dN$  – нормальная реакция между элементарным участком гибкого тела и блоком;  $da$  – приращение угла на элементарном участке гибкого тела;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения между элементарным участком гибкого тела и блоком.

Откуда решением системы дифференциальных уравнений было

$$\begin{aligned} F &= \mu dN = \mu(S - qv^2)da; \\ \frac{dS}{S - qv^2} &= \mu d\alpha; \\ \int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S - qv^2} &= \int_0^\varphi \mu d\alpha; \\ \ln \frac{S_1 - qv^2}{S_2 - qv^2} &= \mu\varphi, \end{aligned}$$

где  $S_1$  – натяжение в сбегающей с блока ветви идеальной нити;  $S_2$  – натяжение в набегающей ветви идеальной нити;  $\varphi$  – угол обхвата барабана идеальной нитью.

Однако такое решение на сегодняшний день не является правильным, поскольку оно не отвечает принципу сохранения энергии и современным представлениям о трении. Поэтому уточнения, полученные многими учеными на протяжении двух столетий, принявших за основу вывод Эйлера, не отвечают этим современным знаниям [1]. Эйлер просто не знал, что в природе действуют законы о трении и сохранении энергии, которые стали известны миру после выводов ученого.

Знания о трении тел развивались (изменялись) в мире от прямой пропорциональности между силой трения и нормальной реакцией между ними (введены Леонардо да Винчи и Амонтоном и были приняты до 1979 г.) до двухпараметрической линейной зависимости между ними (введены Кулоном в 1979 г. и господствуют до настоящего времени).

Очевидно, задачу о трении гибких тел необходимо решить с учетом изменившихся и полученных знаний о трении тел и сохранении энергии.

Вместе с тем, уже была решена эта задача, где используется принцип сохранения энергии и современные знания о трении [2]. Однако это решение не выглядит концептуальным, отчасти, от того, что оно не содержит достаточного обоснования в использовании современных знаний о трении и сохранении энергии, и до конца не осознано.

Следовательно, исчерпывающее обоснованное решение задачи о скольжении гибкого тела по блоку является актуальной проблемой, которое трудно переоценить, и имеет большое научное и практическое значение.

**Цель работы.** Целью работы является обоснование нового решения задачи о трении гибкого тела о неподвижный блок, которое учитывает современные знания о сохранении энергии и трении тел.

**Результаты исследований.** Одной из причин сошедшего положения, по нашему мнению, является использование учеными, взявшими за основу вывод Эйлера, представлений Леонардо да Винчи и Амонтона о трении (закона о прямой пропорциональности между силой трения и нормальной реакцией между ними) [1]. Согласно этому закону, коэффициент трения не зависит от нормальной реакции между телами. В условиях развития знаний о трении (сейчас господствует в науке впервые введенная Кулоном двухпараметрическая линейная зависимость между силой трения и нормальной реакцией между телами, к которой приводятся другие аналогичные версии) общепризнано, что коэффициент трения зависит от нормальной реакции между телами. Поэтому известные решения не являются корректными, поскольку коэффициент трения в различных сечениях контакта гибкого тела с блоком определяется его натяжением и поступать с ним как с постоянной величиной при интегрировании (выносить его за знак интеграла) неправильно.

Итак, Кулон впервые установил, что сила трения и нормальная реакция между телами достаточно хорошо увязаны между собой двухпараметрической линейной зависимостью, которая может быть представлена и с помощью коэффициента трения, введенного Амонтоном (Леонардо да-Винчи)

$$F = F_c + tg\beta N = \left( \frac{F_c}{N} + tg\beta \right) N = \mu N,$$

где  $F$  – сила трения между телами;  $F_c$  – сила трения между телами при нормальной реакции, равной нулю;  $N$  – нормальная реакция между телами;  $tg\beta$  – тангенс угла наклона зависимости силы трения от нормальной реакции  $F = F(N)$ ;  $\mu(N)$  – коэффициент трения между гибким телом и блоком, зависящий от нормальной реакции.

Отсюда коэффициент трения зависит от нормальной реакции между телами и равен

$$\mu = \left( \frac{F_c}{N} + tg\beta \right) = \mu(N).$$

Для элементарного участка гибкого тела закон трения Кулона выражается соответственно

$$\begin{aligned} dF &= \frac{F_c}{r\phi} dl + tg\beta dN = \frac{F_c}{r\phi} r d\alpha + tg\beta dN = \\ &= \frac{F_c}{\phi} d\alpha + tg\beta dN. \end{aligned}$$

Поэтому система уравнений равновесия элементарного участка идеальной нити с учетом представлений Кулона о трении, может представляться так

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Fy = 0 \Rightarrow dN = Sda - dC = Sda - qv^2 da \\ \sum_{i=1}^n Fx = 0 \Rightarrow dS = dF \\ dF = \frac{F_c}{\phi} da + tg\beta dN \end{cases}$$

Решением задачи будет следующее

$$dS = \frac{F_c}{\phi} da + tg\beta(S - qv^2) da = \left( \frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S - qv^2) \right) da;$$

$$\frac{dS}{\frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S - qv^2)} = d\alpha;$$

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{\frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S - qv^2)} = \int_0^{\varphi} d\alpha;$$

$$\ln \frac{\frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S_1 - qv^2)}{\frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S_2 - qv^2)} = tg\beta\varphi.$$

Однако такое решение включает параметры трения  $F_c$  и  $tg\beta$ , введенные Кулоном, что не принято и весьма неудобно (аналогичное решение без учета гравитационных сил получено А.Ю. Ишлинским). Кроме того, оно не учитывает принцип сохранения энергии гибкого тела.

Рассмотрим второй фактор, влияющий на расчетные параметры трения гибкого тела по блоку – механическую энергию. В замкнутой механической системе суммарная энергия, включающая потенциальную и кинетическую энергии, остается неизменной.

Пренебрегая тепловой энергией, выделяемой при трении, полная энергия гибкого тела, включающая кинетическую и потенциальную энергии, при прочих равных условиях испытания одинакова. Кинетическая энергия одного гибкого тела (в предельном случае идеальной нити – невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой) с различными фрикционными свойствами (может достигаться смачиванием) при одной скорости испытания одна и та же. Следовательно, одинаковой будет и потенциальная энергия гибкого тела с различными фрикционными свойствами, которая, в общем случае, определяется заданным усилием натяжения и его деформацией. Из чего следует то, что удлинение гибкого тела с различными фрикционными свойствами при заданном усилии натяжения и прочих равных условиях испытания одинаковое. Поэтому условиями сохранения энергии будут следующие

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial(\Delta l)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial \mu} = 0 \end{cases},$$

где  $\mathcal{E}_n$  – потенциальная энергия натянутого гибкого тела;  $\Delta l$  – удлинение гибкого тела;  $S_1(\mu) + S_2(\mu)$  – заданное суммарное значение усилия натяжения гибкого тела, приложенное к концам гибкого тела.

Согласно закону Гука, суммарное удлинение линейно-деформированного гибкого тела в набегающей и сбегавшей с барабана ветви с различными фрикционными свойствами величина постоянная. Отсюда удлинение гибкого тела, контактирующего с блоком, и его потенциальная энергия также величины постоянные. Поэтому потенциальная энергия гибкого тела, контактирующего с блоком, составляет

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nk} &= \int_0^{\Delta l_k} \frac{1}{2} S_\delta d(\Delta l_k) = \int_0^{\Delta l_k} \frac{1}{2} S_2 d(\Delta l_k) = \\ &= \int_0^{\Delta l_k} \frac{1}{2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} d(\Delta l_k) = \frac{S_1 + S_2}{4} \Delta l_k - const, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}_{nk}$  – потенциальная энергия гибкого тела, контактирующего с блоком;  $S_\delta$  – заданное действительное значение усилия, приложенного к гибкому телу;  $S_2$  – заданное суммарное значение усилия, приложенное к концам гибкого тела;  $\Delta l_k$  – удлинение участка гибкого тела, контактирующего с блоком.

Удлинение линейно-деформированного участка гибкого тела, контактирующего с блоком, соответственно, будет таким

$$\Delta l_k = \frac{1}{E} \int_a^{\bar{b}} \sigma(l, \mu) dl = \frac{1}{E} \int_a^{\bar{b}} \frac{S(l, \mu)}{F} dl = \frac{r}{EF} \int_0^{\phi} S(\alpha, \mu) d\alpha - const,$$

где  $E$  – модуль Юнга гибкого тела;  $F$  – площадь сечения гибкого тела;  $\sigma(l, \mu)$ ,  $\sigma(\alpha, \mu)$  – зависимости продольного напряжения в гибком теле от длины линии контакта (угла сечения) и коэффициента трения;  $a$  и  $\bar{b}$  – начало и конец гибкого тела, контактирующего с блоком.

Следовательно, потенциальная энергия гибкого линейно-деформированного тела, контактирующего с блоком, составляет

$$\mathcal{E}_{nk} = \frac{S_1 + S_2}{4} \Delta l_k = \frac{S_1 + S_2}{4} \frac{r}{EF} \int_0^{\phi} S(\alpha, \mu) d\alpha - const.$$

Анализ входящего в выражение интеграла  $\int_0^{\phi} S(\alpha, \mu) d\alpha$  показывает, что он также есть величина постоянная для заданного натяжения линейно-деформируемого гибкого тела с различными фрикционными свойствами при скольжении или сцеплении.

Если представить нерастяжимое гибкое тело как линейно-деформируемое, модуль Юнга которого стремится к бесконечности, то можно прогнозировать, что для нерастяжимой нити (идеальной нити) указанный выше интеграл также величина постоянная.

Поэтому можно обобщить и сформулировать необходимое условие равновесия натяжения гибкого тела вдоль линии контакта при трении по блоку, которое отвечает закону сохранения энергии

$$\frac{\partial \int_0^{\phi} S(a) da}{\partial \mu} = 0.$$

Для корректности проиллюстрируем тезис о том, что в известном решении Эйлера в задаче о скольжении гибкого тела по блоку не соблюдается закон сохранения энергии, о чем упоминалось ранее. Согласно ему, зависимость натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком угла отсечения в полярной системе координат описывается показательной функцией

$$S(\alpha) = S_2 e^{\mu \alpha},$$

где  $S(a)$  – натяжение идеальной нити в заданном сечении;  $e$  – основание натурального логарифма;  $a$  – угол сечения идеальной нити.

Для решения задачи Эйлера потенциальная энергия гибкого тела и его удлинение зависят от коэффициента трения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nk} &= \frac{S_1 + S_2}{4} \cdot \frac{r}{EF} \int_0^{\phi} S_2(\mu) e^{\mu \alpha} d\alpha = \frac{S_1 + S_2}{4} \times \\ &\times \frac{r}{EF} \cdot \frac{S_2(\mu)}{\mu} (e^{\mu \phi} - 1) = \mathcal{E}_{nk}(\mu) = var; \\ \Delta l_k &= \frac{r}{EF} \frac{S_2(\mu)}{\mu} (e^{\mu \phi} - 1) = \Delta l_k(\mu) = var. \end{aligned}$$

Частная производная рассматриваемого интеграла по коэффициенту трения  $\mu$  также от него зависит и не равна 0.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \int_0^{\phi} S(\alpha, \mu) d\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \int_0^{\phi} S_2(\mu) e^{\mu \alpha} d\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{S_2(\mu)}{\mu} (e^{\mu \phi} - 1) \right) \neq 0.$$

Поэтому для известного решения Эйлером задачи не соблюдается условие равновесия натяжения гибкого тела вдоль линии контакта при трении по блоку (закон сохранения энергии).

Кроме того, нормальная реакция между телами определяется выражением

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\phi} (S(\alpha) - qv^2) d\alpha = \int_0^{\phi} (S_2 e^{\mu \alpha} - qv^2) d\alpha = \left( \frac{S_2}{\mu} e^{\mu \alpha} - qv^2 \right) \Big|_0^{\phi} = \\ &= \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu \phi} - 1) - \phi qv^2 = N(\mu) = var. \end{aligned}$$

Из чего следует, что нормальная реакция, рассчитанная по решению Эйлера, также зависит от коэффициента трения тел, который в общем случае неизвестен, и свидетельствует о невозможности количественно обеспечить заданную нормальную реакцию между гибким телом и блоком при испытании.

Следовательно, дифференциальные уравнения равновесия сил, описывающих трение элементарного участка гибкого тела по неподвижному блоку, равновесия моментов, закона трения тел и условия равновесия натяжения гибкого тела вдоль линии контакта при трении по блоку представляется системой

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Fy = 0 \Rightarrow dN = Sda - dC = Sda - qv^2 da \\ \sum_{i=1}^m M_0 = 0 \Rightarrow \rho dS = r dF \\ dF = \frac{F_c}{\phi} da + tg\beta dN \\ \frac{\partial(\int_0^{\phi} S(a, \mu) da)}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

где  $\rho$  – радиус условной (нейтральной) продольной линии гибкого тела, по которой действует равнодействующая усилия натяжения.

Промежуточным решением трех первых уравнений системы для гибкого тела с нулевой толщиной будет

$$\begin{aligned} dS &= \frac{F_c}{\phi} da + tg\beta(S - qv^2) d\alpha; \\ \int_{S_2}^{S_1} dS &= \int_0^{\phi} (\frac{F_c}{\phi} + tg\beta(S - qv^2)) d\alpha; \\ S_1 - S_2 &= F_c + tg\beta \int_0^{\phi} (S - qv^2) d\alpha = F_c + tg\beta (\int_0^{\phi} S da - qv^2 \phi). \end{aligned}$$

Дальнейшее решение системы уравнений сводится к нахождению интеграла  $\int_0^{\phi} S(a, \mu) da$  (площади фигуры, ограниченной функцией  $S(a)$  в пределах угла обхвата блока гибким телом) для заданного предварительного натяжения гибкого тела с различными фрикционными свойствами (коэффициентом трения) при скольжении или сцеплении.

Из последнего уравнения системы следует, что единственно возможный характер подинтегральной непрерывной гладкой монотонно возрастающей без перегибов функции  $S(a, \mu)$ , описывающей зависимость величины натяжения гибкого тела от угла сечения и коэффициента трения во всем диапазоне сил, приложенных к его концам, согласно закону сохранения энергии, это прямая линия

$$S(a, \mu) = k(\mu)\alpha + b(\mu),$$

где  $k(\mu)$ ,  $b(\mu)$  – параметры двухпараметрической линейной функции, которые определяются из граничных условий.

Приводим графики зависимостей натяжения гибкого тела ( $S(a)$ ) от угла сечения ( $a$ ) и фрикционных свойств тел ( $F_c tg\beta$ ) при заданном суммарном усилии натяжения  $S_1(\mu) + S_2(\mu) = const$ , рис. 2.

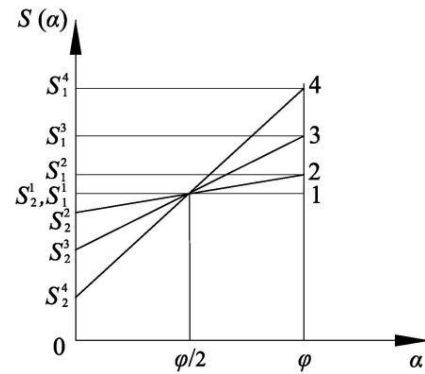


Рис. 2. Зависимость величины натяжения гибкого тела ( $S(a)$ ) от угла сечения ( $a$ ) и фрикционных свойств тел ( $F_c tg\beta$ ) при заданном суммарном усилии натяжения  $S_1(\mu) + S_2(\mu) = const$ :  
 1 – для гибкого тела, когда  $F_c = 0$  и  $tg\beta_1 = 0$ ;  
 2 – для гибкого тела, когда  $F_c > 0$  и  $tg\beta_2 = 0$ ;  
 3 – для гибкого тела, когда  $F_c > 0$  и  $tg\beta_3 > 0$ ;  
 4 – для гибкого тела, когда  $F_c > 0$  и  $tg\beta_4 > tg\beta_3$

Зависимость величины натяжения гибкого тела  $S(a, \mu)$  от угла сечения в граничном случае, когда параметр трения  $F_c > 0$ , а  $tg\beta_2 = 0$  (рис. 2, зависимость 2), определяется только силами межмолекулярного взаимодействия пары трения, которые, в соответствии с законом Кулона, пропорциональны длине линии контакта

$$S(a, \mu) |_{F_c > 0, tg\beta_2 = 0} = S_2^2(\mu) + \frac{F_c}{r\phi} ra = S_2^2(\mu) + \frac{S_1^2(\mu) - S_2^2(\mu)}{\phi} a,$$

где  $S_1^2(\mu), S_2^2(\mu)$  – натяжение гибкого тела в точке набегания и сбегания при  $tg\beta_2 = 0$  (рис. 1, зависимость 2).

В случае, когда нулю равны параметры трения  $F_c$  и  $tg\beta_0$  (рис. 2, зависимость 1), натяжение гибкого тела не изменяется – прямая параллельна оси абсцисс ( $a$ )

$$\begin{aligned} S(a, \mu) |_{F_c = 0, tg\beta_1 = 0} &= S_1^1(\mu) + \frac{S_1^1(\mu) + S_2^1(\mu)}{\phi} a = S_1^1(\mu) = \\ &= \frac{S_1^1(\mu) + S_2^1(\mu)}{2}, \end{aligned}$$

где  $S_1^1, S_2^1$  – натяжение гибкого тела в точке набегания и сбегания при  $F_c = 0$  и  $tg\beta_1 = 0$  (рис. 1, зависимость 1).

В общем случае, рассуждая от противного, соблюдение закона сохранения энергии предполагает то, что для оставшихся случаев реальных свойств гибкого тела (зависимости 3 и 4, рис. 2), когда пара-

метры трения Кулона  $F_c$  и  $tg\beta$  различны и не равны нулю, их зависимости величины натяжения также должны иметь линейный характер.

Таким образом, обоснована альтернативная зависимость величины натяжения гибкого тела от угла сечения по длине линии контакта при трении по неподвижному блоку под действием сил, приложенных к ее концам. Она, как следует из закона сохранения энергии, представляет собой линейную функцию, параметры которой определяются условиями ее натяжения, фрикционными свойствами пары трения и углом обхвата блока гибким телом

$$S(\alpha) = k(a, \mu)a + b(\mu) = \frac{S_1(\mu) - S_2(\mu)}{\varphi} \alpha + S_2(\mu),$$

где  $b(\mu)$  – меньшее усилие натяжения гибкого тела;  $k(\mu)$  – тангенс угла наклона прямой линии.

Теперь, после установления зависимости величины натяжения гибкого тела от угла сечения в пределах контакта с блоком, дальнейшее решение альтернативной системы дифференциальных уравнений равновесия, описывающих трение гибкого тела по блоку, не представляет труда.

Так, согласно [2], при использовании параметров трения  $F_c$  и  $tg\beta$ , введенных Кулоном, решением будет иметь вид

$$S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \left( \varphi \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right) = F_c + tg\beta N.$$

При использовании коэффициента трения, введенного Амонтоном (Леонардо-да-Винчи),

$$S_1 - S_2 = \left( \frac{F_c}{N} + tg\beta \right) N = \mu(N)N = \mu(N)\varphi \left( \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right)$$

или

$$\frac{2(S_1 - S_2)}{S_1 + S_2 - 2qv^2} = \varphi\mu - const.$$

Новое решение задачи с учетом поперечных размеров гибкого тела, соответственно, будет таким

$$\frac{2\rho(S_1 - S_2)}{r(S_1 + S_2 - 2qv^2)} = \varphi\mu - const.$$

Подтвердим соблюдение принципа сохранения энергии для нового решения задачи. Потенциальная энергия гибкого тела и его удлинение в зоне контакта с блоком для него являются постоянной величиной

$$\mathcal{E}_{нк} = \frac{S_1 + S_2}{4} \cdot \frac{r}{EF} \cdot \int_0^\phi S(\alpha, \mu) d\alpha = \frac{S_1 + S_2}{4} \cdot \frac{r}{EF} \times$$

$$\times \int_0^\phi \left( S_2(\mu) + \frac{S_1(\mu) - S_2(\mu)}{\varphi} a \right) da = \frac{(S_1 + S_2)^2}{8} \cdot \frac{r}{EF} \cdot \phi - const;$$

$$\Delta l_k = \frac{r}{EF} \cdot \int_0^\phi S(\alpha, \mu) d\alpha = \frac{r}{EF} \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \phi - const.$$

Частная производная интеграла  $\int_0^\phi S(\alpha, \mu) d\alpha$  по коэффициенту трения наоборот равна нулю

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \int_0^\phi S(\alpha, \mu) d\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{S_1(\mu) + S_2(\mu)}{2} \varphi \right) = 0.$$

Кроме того нормальная реакция между гибким телом и блоком, соответственно, составляет

$$N = \int_0^\phi (S(\alpha, \mu) - qv^2) d\alpha = \varphi \frac{S_1 + S_2}{2} - \int_0^\phi qv^2 da = \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \varphi.$$

Из чего следует, что для нового решения задачи соблюдается закон сохранения энергии (условие равновесия величины натяжения гибкого тела вдоль линии контакта). А нормальная реакция между гибким телом и блоком, соответственно, не зависит от фрикционных свойств тел и, следовательно, обеспечивается возможность количественно задавать ее при испытании и прямо определять коэффициент трения.

В табл. 1 приведены сравнительные расчетные данные оценки фрикционных свойств конвейерной ленты и барабана при скольжении (сухой/влажной) и сцеплении (сухой) конвейерной ленты согласно известным решениям задачи о трении гибкого тела по неподвижному блоку. Условия испытаний: ширина конвейерной ленты – 490 мм; толщина конвейерной ленты ( $h$ ) – 10 мм; погонная масса конвейерной ленты ( $q$ ) – 7,6 кг/м; суммарное усилие натяжения конвейерной ленты ( $S_1 + S_2$ ) – 311 кгГ; угол обхвата барабана конвейерной лентой ( $\varphi$ ) – 3,14 рад; радиус барабана ( $r$ ) – 0,112 м; скорость относительного движения ленты и барабана ( $v$ ) при скольжении (сцеплении) – 1 м/с (0 м/с).

Коэффициент трения гибкого тела и барабана (отношение силы трения к нормальной реакции между телами) впервые смогли определить прямо по новому решению задачи, который учитывал центробежные силы и толщину конвейерной ленты. За коэффициент трения при сцеплении (неполный коэффициент трения) принято отношение неполной силы трения к нормальной реакции между телами. Предельное значение коэффициента трения при сцеплении отвечает трению покоя и всегда больше коэффициента трения при скольжении. Расчетное значение коэффициента трения при скольжении по известному решению задачи для сухой ленты на 17% выше значения, определенного прямым методом по новому решению, что согласуется с данными практики.

Анализ данных эксперимента свидетельствует о том, что нормальная реакция между телами по новому решению определяется суммарным усилием предварительного натяжения гибкого тела, углом обхвата и не зависит от фрикционных свойств тел. Известное

решение, напротив, указывает на зависимость нормальной реакции между телами от фрикционных свойств тел, что не согласуется со здравым смыслом

и вызывает сомнение. Увеличение расчетной нормальной реакции между телами по новому решению задачи достигает 67%.

Таблица 1

Сравнительные расчетные данные оценки фрикционных свойств конвейерной ленты и барабана

№ п/п	Условия испытаний		Действительная сила трения, кГ	Расчетные параметры					
	Скорость отн. движения, в. м/с	Силы натяжения $S_1/S_2$ , кГ		Решение Эйлера			Новое решение		
				Нормальная реакция $(S_2 - qv^2)(e^{\mu\varphi} - 1)/\mu$	Сила трения $(S_2 - qv^2)(e^{\mu\varphi} - 1)$	Коэффициент трения $\ln((S_1 - qv^2)/(S_2 - qv^2))/l\varphi$	Нормальная реакция, кГ $\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2)/2$	Сила трения, кГ $\mu\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2)/2$	Коэффициент трения $2/(S_1 - S_2)/\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2)$
1	1	256/55	210	281,4	148,6	0,528	464,4	209,9	0,452
2	1	193/118	78,3	468,5	77,3	0,165	464,4	78,4	0,169
3	0	246/65	189,1	328,0	148,6	0,453	464,4	189,0	0,407
4	0	214/97	122,2	431,6	114,8	0,266	464,4	122,1	0,263
5	0	187/124	65,8	473,9	65,4	0,138	464,4	65,9	0,142

Кроме того, для угла обхвата барабана гибким телом, равного 3,14 рад, и фрикционных характеристик сухих гибких тел тяговое усилие (сила трения), реализуемое барабаном при скольжении, по новому решению задачи до 28% больше в сравнении с известным решением Эйлера (в расчетах силы трения был использован коэффициент трения, вычисленный прямым методом по новому решению задачи Эйлера). Это хорошо согласуется с известными данными Л.В. Андреева о расхождении расчетного тягового усилия по формуле Эйлера с действительными значениями, которое достигает 30%.

С уменьшением коэффициента трения гибкого тела при скольжении разница в реализуемом тяговом усилии для анализируемых решений монотонно уменьшается до нуля. И наоборот, увеличение коэффициента трения гибкого тела и барабана приводит к увеличению различия в реализуемых тяговых усилиях для различных решений задачи. Аналогичная закономерность наблюдается и при сцеплении. Вместе с тем, указанная зависимость для другого угла обхвата барабана гибким телом, наверное, будет другой.

В табл. 2 приведены прогнозные оценки угла обхвата ( $\varphi$ ) по задаче об уравнивании большой силы ( $Q$ ) маленькой ( $P$ ), которые приложены к концам нити с коэффициентом трения, равным 0,5, которая навита на неподвижный блок, для различных решений задачи о трении гибкого тела о неподвижный блок.

Анализ данных показал, что отличие прогнозных оценок уравнивания большой силы ( $Q$ ), например в 1000 Н, маленькой силой ( $P$ ), достигающей 20% от большой ( $P \geq$  в 200 Н), согласно рассматриваемым решениям задачи, не превышает 17%. Зато уравнивание заданной большой силы ( $Q$ ) несколько меньшими силами ( $P$ ), по прогнозу, согласно известному решению задачи, требует несоизмеримо большего увеличения угла обхвата. Не поддается, например, пониманию то, что для увеличения силы

трения всего на 0,2% от большой силы ( $Q$ ) с 998 до 1000 Н угол обхвата нитью блока необходимо увеличить в бесконечное число раз – с 12,43 до  $\infty$  рад. Это обстоятельство, в конечном счете, проявилось в ограниченном диапазоне применимости известного решения задачи о трении гибкого тела и получении неадекватных результатов на его границе (когда маленькая сила  $P$  находится в диапазоне от нуля до  $q \cdot v^2$  или в окрестности последнего).

Таблица 2

Прогнозные оценки угла обхвата нитью неподвижного блока для различных вариантов решений задачи Эйлера

№ п/п	Угол обхвата, $\varphi$ , рад.		Исходные данные		
	По формуле Эйлера $(\ln S_1/S_2)/\mu$	По альтернативному решению задачи Эйлера $2(S_1 - S_2)/\mu(S_1 + S_2)$	Большая сила, $S_1$ , Н	Маленькая сила, $S_2$ , Н	Сила трения, $F$ , Н
1	1,83	1,71	1000	400	600
2	2,41	2,15	1000	300	700
3	3,22	2,67	1000	200	800
4	4,61	3,27	1000	100	900
5	5,99	3,62	1000	50	950
6	7,82	3,84	1000	20	980
7	12,43	3,98	1000	2	998
8	17,03	3,9984	1000	0,2	999,8
9	21,64	3,9998	1000	0,02	999,08
10	$\rightarrow \infty$	4,0	1000	$\rightarrow 0$	1000
11	-	4,0	1000	0	1000

В целом результаты прогнозной оценки реализуемого тягового усилия, табл. 2, согласуются с данными табл. 1 для угла обхвата нитью неподвижного блока около  $3,14 \text{ рад}$ . С увеличением угла обхвата нитью неподвижного блока разница в реализуемом тяговом усилии (реализуемой силе трения) возрастает.

Полученные экспериментальные данные свидетельствуют в пользу правильности нового решения задачи о трении гибкого тела по неподвижному блоку.

**Выводы.** Обосновывается новая система дифференциальных уравнений равновесия механической системы, которая описывает трение элементарного участка гибкого тела по неподвижному блоку с учетом современных знаний о трении, принципа сохранения энергии, и осуществляется ее решение.

Решение описывает влияние факторов трения гибкого тела по блоку и условий проведения испытаний между собой, весь диапазон возможных сил, которые могут быть приложены к концам гибкого тела. Оно распространяется не только на скольжение тел, но и на сцепление.

Установлено линейное изменение натяжения гибкого тела в зоне контакта с блоком, выражения для прямого определения коэффициента трения и нормальной реакции между телами, которая не зависят от фрикционных свойств тел.

Новое решение задачи о трении гибкого тела по неподвижному блоку согласуется с данными практики, согласно которым обеспечивается возможность задавать нормальную реакцию между телами при испытании. Полученные знания развивают математические методы решения системы дифференциальных уравнений, задач механики и физики, обогащают представления о трении гибких тел, способствуют прогрессу в научных исследованиях, образовании, машиностроении.

#### Список літератури / References

1. Кирия Р.В. Применение метода возмущений Л. Прандтля к разрешению парадокса Н.Е Жуковского / Р.В. Кирия, Е.А. Стаховский // Системні технології. –2002. – № 4 (21). – С. 33–46.

Kiriya, R.V. and Stakhovsky, E.A. (2002), "The use of the perturbation method Prandtl to resolve the paradox N.E Zhukovsky", *Sistemni tehnologii*, Dnepropetrovsk, no. 4(21) pp. 33–46.

2. Лубенец Н.А. Влияние центробежных сил гибкого тела на реализацию тягового усилия трением / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – 2012. – № 5. – С. 28–33.

Lubenets, N.A. and Lubenets, T.N. (2012), "The influence of the centrifugal forces of a flexible body for the implementation of traction friction", *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universitetu*, no.5, pp. 28–33.

**Мета.** Розв'язання задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку, що враховує принцип збереження енергії та сучасні знання про тертя.

**Методика.** Обґрунтовується система диференціальних рівнянь рівноваги механічної системи, що описує

тертя елементарної ділянки гнучкого тіла по нерухомому блоку, діючий закон тертя тіл, закон збереження енергії. При розв'язанні встановлюється залежність величини натягування гнучкого тіла по лінії контакту з блоком при терті, що відповідає закону збереження енергії.

**Результати.** Розв'язання описує взаємозв'язок кута обхвату, коефіцієнта тертя гнучкого тіла по блоку, сил, що прикладені до кінців гнучкого тіла, його швидкості руху та лінійної маси між собою. Розв'язання поширене не тільки на ковзання тіл, а й на їх зчеплення.

**Наукова новизна.** Обґрунтована нова система диференціальних рівнянь рівноваги механічної системи при терті гнучкого тіла по блоку, що містить двопараметричний закон тертя тіл, умову рівноваги натягування гнучкого тіла по лінії контакту з блоком, і наводиться її аналітичне розв'язання. Встановлені лінійна залежність величини натягування гнучкого тіла по лінії контакту з блоком, вирази для прямого обчислення коефіцієнта тертя та нормальної реакції між тілами, що не залежать від фрикційних властивостей тіл, описується весь діапазон можливих сил, що можуть бути прикладені до кінців гнучкого тіла при випробуванні.

**Практична значимість.** Розв'язання задачі долає протиріччя між накопиченими даними практики та відомими рішеннями. Забезпечується можливість при випробуванні задавати нормальну реакцію між тілами й прямо визначати їх коефіцієнт тертя. Отримані знання розвивають математичні методи розв'язання системи диференціальних рівнянь, задач механіки та фізики, збагачують уявлення про тертя гнучких тіл, сприяють прогресу в наукових дослідженнях, освіті, машинобудуванні.

**Ключові слова:** диференціальні рівняння, гнучке тіло, блок, натягування, нормальна реакція, тертя, коефіцієнт тертя, потенційна енергія, збереження енергії, подовження, кут обхвату

**Purpose.** To solve the problem about a flexible body sliding over a fixed block taking into account the principle of conservation of energy and present knowledge about friction.

**Methodology.** We substantiate the system of differential equilibrium equations of a mechanical system describing friction of a flexible body surface element against a fixed block, friction law, and law of conservation of energy. The solution shows the dependence of the tension of the flexible body on the line of contact with the block under friction, which corresponds to the law of conservation of energy.

**Findings.** The solution describes the interrelations between the wrap angle, friction coefficient, flexibility at the body unit, the forces applied to the ends of the flexible body, its linear velocity and mass. The solution is applicable to sliding and cohesion of bodies.

**Originality.** We have justified the new system of differential equations of equilibrium of a mechanical system of a flexible body friction against a fixed block that contains the two-parameter friction law, condition of equilibrium tension of the flexible body on the line of contact with the block under friction and provides an analytic solution. The article



presents the linear dependence the dependence of the tension of the flexible body on the line of contact with the block under friction; the direct expressions for calculating the friction coefficient and the normal reaction between the bodies unaffected by the friction properties of bodies; describes the full range of possible forces that can be applied to the ends of the flexible body tested.

**Practical value.** The new solution overcomes the contradictions between the accumulated experimental data and earlier solutions. It allows us to specify the test normal reaction between the bodies and determine their coefficient

of friction directly. The knowledge obtained develops mathematical methods for solving systems of differential equations of mechanics and physics; it enriches representation of friction flexible bodies; and contributes to progress in research, education, and engineering.

**Keywords:** *differential equation, flexible body, block, tension, normal reaction, friction, coefficient of friction, potential energy, energy conservation, extension, wrap angle*

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.В. Процівом. Дата надходження рукопису 25.06.13.*

УДК 624.191.6

**К.С. Заболотный, д-р техн. наук, проф.,  
А.Л. Жупиев, А.А. Сирченко**

Государственное высшее учебное заведение “Национальный горный университет”, г.Днепропетровск, Украина, e-mail: kundul@rambler.ru

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОПРИВОДА ПОДЪЕМА МАНИПУЛЯТОРА ТОННЕЛЬНОГО УКЛАДЧИКА

**K.S. Zabolotnyy, Dr. Sci. (Tech.), Professor,  
A.L. Zhupiev, A.A. Sirchenko**

State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnipropetrovsk, Ukraine, e-mail: mmf@ua.fm

## DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC LIFT OF TUNNEL LINING MACHINE MANIPULATOR

**Цель.** Разработка математической модели для обоснования рациональных параметров привода поступательного перемещения манипулятора тоннельного укладчика.

**Методы.** Решение оптимизационных задач путем определения класса пробных функций, проведения расчета для некоторых функций из этого класса и доказательства единственности полученного решения; математическое моделирование с использованием методов расчета движения жидкости в гидравлических системах при ламинарном и турбулентном режимах.

**Результат.** Разработана математическая модель гидропривода манипулятора, позволяющая для любого закона движения блока найти закон управления перемещением золотника гидрораспределителя. Из проведенных исследований на математической модели следует, что в случае необходимости уменьшения опережения управляющего сигнала следует увеличивать площадь штоковой полости при заданном значении давления в магистрали.

**Научная новизна.** Доказано, что: при заданном ограничении величины ускорения подъем блока на определенную высоту быстрее всего осуществляется при П-образном законе движения; в случае необходимости уменьшить время опережения сигнала, управляющего перемещением золотника, по сравнению со временем изменения скорости движения блока, следует увеличивать площадь штоковой полости при заданном значении давления в магистрали.

**Практическая значимость.** Разработанная математическая модель гидропривода подъема, с использованием полученной методики ее применения, позволяет определить рациональные параметры манипулятора тоннельного укладчика для создания конкурентоспособных на мировом рынке тоннельных укладчиков, отличающихся уменьшенной массой, повышенной прочностью и долговечностью.

**Ключевые слова:** *манипулятор тоннельного укладчика, закон управления перемещением золотника, закон движения элемента обделки, гидропривод манипулятора, методы решения оптимизационных задач*

**Постановка проблемы.** В современных условиях возрастающей технологической конкуренции большое значение имеет сокращение сроков разработки новых конструкций машин, а также повышение их качества и надежности. В связи с этим оптимальное проектирование занимает одну из основных позиций при создании современных конкурентоспособных машин, в частности тоннельных укладчиков.

Создание математических моделей укладчиков и определение их рациональных параметров на основании проведения исследований современными методами является актуальной научной проблемой механики горных машин.

Решение этой проблемы возможно только при применении современных вычислительных методов.

**Анализ публикаций.** Первые работы, определяющие подход к решению данной проблемы, появились только в последние годы.