

# ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНІ КОМПЛЕКСИ ТА СИСТЕМИ

УДК 621.313.33:629.423.24

Д.О. Кулагін, канд. техн. наук, доц.

Запорізький національний технічний університет,  
м.Запоріжжя, Україна, e-mail: nemix123@rambler.ru

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЯГОВОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ НАСИЧЕННЯ МАГНІТНИХ КІЛ

D.O. Kulagin, Cand. Sci. (Tech.), Assoc. Prof.

Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhya,  
Ukraine, e-mail: nemix123@rambler.ru

## THE MATHEMATICAL MODEL OF ASYNCHRONOUS TRACTION MOTOR TAKING INTO ACCOUNT THE SATURATION OF MAGNETIC CIRCUITS

**Мета.** Розробка математичної моделі тягової асинхронної машини в  $(d, q)$  системі координат з урахуванням насичення магнітних кіл.

**Методика.** У роботі використаний метод динамічних індуктивностей, який поєднано з використанням системного дослідження властивостей тягового асинхронного двигуна.

**Результати.** Створена аналітична модель магнітних кіл асинхронного тягового двигуна, в якій врахована дія тангенціальної та радіальної динамічних індуктивностей. На основі цього побудовано тензор динамічних індуктивностей насиченої машини, за яким було записане в  $(d, q)$  системі координат рівняння роторних та статорних кіл асинхронного тягового двигуна з урахуванням насичення. Обґрунтоване використання методу динамічних індуктивностей при побудові математичної моделі тягового асинхронного двигуна, що дозволило врахувати насичення головного магнітного шляху для режимів з широким діапазоном зміни потоку взаємоіндукції між статором та ротором, насичення шляхів потоків розсіювання для режимів, що характеризуються значними струмами контурів машини, взаємоіндукцію, зумовлену процесами насичення між взаємно перпендикулярними контурами машини, а також сумісне насичення робочим потоком та потоками розсіювання для режимів, що характеризуються значною величиною робочого потоку та великими значеннями струмів контурів машини. Дані режими є характерними для тягових асинхронних машин з огляду на режими роботи тягового електрорухомого складу залізниць.

**Наукова новизна.** Враховано зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що є актуальною задачею з огляду на таку зміну в широкому діапазоні робочих режимів тягового електрорухомого складу залізниць.

**Практична значимість.** Створена математична модель дозволяє враховувати зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що є необхідним для побудови адекватних систем керування приводами, та систем автоведення тягового електрорухомого складу залізниць.

**Ключові слова:** *тягова асинхронна машина, насичення, магнітне коло, рівняння стану*

**Постановка проблеми.** У залежності від багатьох обставин, для встановлення оптимальних режимів ведення електрорухомого складу залізниць на похилих профілях залізничного шляху з метою досягнення кутів швидкостей обертання тягових двигунів вище за номінальну, при оптимізації енергетичних характеристик тягової електропедачі в залежності від навантаження на тягову передачу, та при оптимізації динамічних характеристик електрорухомого складу залізниць, машиніст або система автоведення поїзда повинні переводити тягові двигуни в зону роботи зі зниженим значенням модуля вектора потокозчеплення ротора. При такій

зміні режимів роботи необхідним є врахування в математичній моделі системи керування тяговою електропередачею зміни параметрів тягового двигуна, що пов'язана з ефектом насичення магнітної системи асинхронної машини (Фільд Р.В.) [1–4].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Для врахування насичення магнітних кіл на практиці використовують наступні відомі методи:

1. Метод статистичних індуктивностей [2–5], в якому нелінійність кола намагнічування враховується статистичною залежністю між потокозчепленням та струмом намагнічування, що задається за допомогою таблиці або аналітичної апроксимації

$$\vec{\psi}_s = L_m(i_\mu)\vec{i}_\mu, \quad (1)$$

де  $\vec{\psi}_s$  – узагальнений вектор головного (або в повітряному зазорі) потокозчеплення тягового асинхронного двигуна;  $\vec{i}_\mu$  – узагальнений вектор струму намагнічування тягового асинхронного двигуна;  $L_m$  – еквівалентна взаємна індуктивність від головного магнітного поля, що зчеплене з кожною фазною обмоткою машини, яка створюється сумісно дією струмів усіх трьох фазних статорних обмоток машини.

2. Метод динамічних індуктивностей (Фильц Р.В.) [6, 7], що дозволяє врахувати:

- насичення головного магнітного шляху для режимів з широким діапазоном зміни потоку взаємодукації між статором та ротором;
- насичення шляхів потоків розсіювання для режимів, що характеризуються значними струмами контурів машини;
- взаємодукацію, зумовлену процесами насичення між взаємно перпендикулярними контурами машини;
- сумісне насичення робочим потоком та потоками розсіювання для режимів, що характеризуються значною величиною робочого потоку та великими значеннями струмів контурів машини.

Останній метод, за дослідженнями авторів (Фильц Р.В.) [6, 7], дозволяє у зручній формі описати динаміку асинхронної машини та врахувати значну кількість процесів, що відбуваються у двигуні при насиченні. Далі, з огляду на це, будемо використовувати саме його.

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Для роторів тягових електричних машин змінного струму, за відомим дослідженням К.П. Ковача та И. Раца, часто є характерною електрична або магнітна несиметричність, тобто різна магнітна провідність у двох взаємно перпендикулярних напрямках – повздовжній ( $d$ ) та поперечній ( $q$ ) осях. Відповідно до цього розрізняють нерівні одне одному повні опори роторних обмоток у повздовжній та поперечній осях.

Напрямок повздовжньої осі  $d$  приймається за дійсну вісь, а напрямок поперечної  $q$  осі – за уявну вісь.

Існуючі моделі асинхронних машин потребують додаткових складних перетворень для отримання повної математичної моделі у проєкціях узагальнених векторів на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  або громіздких розрахунків, пов'язаних зі знаходженням зворотних матриць при використанні моделей у фазових координатах.

**Формулювання мети роботи.** Створення математичної моделі тягової асинхронної машини в  $(d, q)$  системі координат з урахуванням насичення магнітних кіл.

**Викладення основного матеріалу.** Система диференціальних рівнянь, у координатах  $(d, q)$ , жорстко пов'язана з ротором тягового асинхронного двигуна (рівняння Парка), має вигляд [8]

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} \\ u_{rd} = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} \\ u_{rq} = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} \end{cases}, \quad (2)$$

де  $u_{sd}, u_{sq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора статорної напруги  $\vec{U}_s$  тягового асинхронного двигуна;  $u_{rd}, u_{rq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора роторної напруги  $\vec{U}_r$  двигуна;  $r_{rd}, r_{rq}$  – відповідні значення опорів роторних обмоток за напрямками системи координат  $(d, q)$ ;  $r_{sd}, r_{sq}$  – відповідні значення опорів статорних обмоток за напрямками системи координат  $(d, q)$ ;  $i_{sd}, i_{sq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора статорного струму  $\vec{i}_s$  тягового асинхронного двигуна;  $i_{rd}, i_{rq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора роторного струму  $\vec{i}_r$  тягового асинхронного двигуна;  $\psi_{rd}, \psi_{rq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора потокозчеплення ротора  $\vec{\psi}_r$  двигуна;  $\psi_{sd}, \psi_{sq}$  – проєкції на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  узагальненого вектора потокозчеплення статора  $\vec{\psi}_s$  двигуна;  $\frac{d}{dt}$  – оператор диференціювання за часом;  $\omega_r$  – відносна кутова швидкість, що визначається як

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

Системи координат ротора та статора переміщуються одна відносно одної, причому кут  $\theta$  є кутом між осями та саме він визначає значення  $\omega_r$  [8].

Проєкції векторів потокозчеплення статора  $\vec{\psi}_s$  та потокозчеплення ротора  $\vec{\psi}_r$  двигуна на відповідні осі системи координат  $(d, q)$  можна визначити [4]

$$\begin{cases} \psi_{sd} = i_{sd} \cdot L_{\sigma s} + i_{rd} \cdot L_m \\ \psi_{sq} = i_{sq} \cdot L_{\sigma s} + i_{rq} \cdot L_m \\ \psi_{rd} = i_{sd} \cdot L_m + i_{rd} \cdot L_{\sigma r} \\ \psi_{rq} = i_{sq} \cdot L_m + i_{rq} \cdot L_{\sigma r} \end{cases}. \quad (4)$$

У системі (4) величини  $L_{\sigma s}, L_{\sigma r}$  та  $L_{\sigma s}, L_{\sigma r}$  є власними індуктивностями, а величина  $L_m$  – взаємною індуктивністю статора й ротора.

Для системи (4) складемо еквівалентну схему електромагнітних контурів тягового асинхронного двигуна (рис. 1).

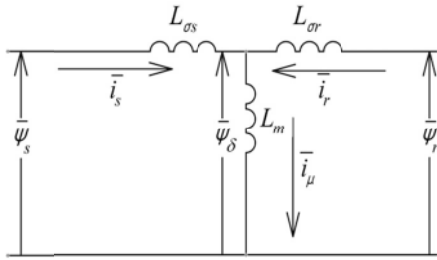


Рис. 1. Еквівалентна схема електромагнітних контурів тягового асинхронного двигуна

Аналогічно із роботами [6,7] врахуємо також втрати, що виникають у сталі, увівши до системи (2) величину узагальнюючого опору  $r_\mu$ , еквівалентного тому, що спричиняє втрати у сталі реального двигуна при проходженні по даному опору відповідних проекцій узагальненого вектора струму намагнічування  $\vec{i}_\mu$  на осі системи координат  $(d, q)$

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_\mu \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_\mu \\ u_{rd} = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} \\ u_{rq} = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} \end{cases} \quad (5)$$

За припущення Фільца Р.В. та [7], що модуль вектора потокозчеплення в повітряному зазорі  $\psi_\delta$  залежить тільки від величини результуючої магніторушійної сили (МРС), або від пропорційного їй модуля вектора струму намагнічування  $i_\mu$ , при виході на нелінійну ділянку кривої намагнічування приріст струму намагнічування  $\Delta i_\mu$  по одній осі системи координат, це призводить до відповідного прирощення потокозчеплення  $\Delta \psi_\delta$  по всіх осях системи. Як наслідок, виникає потреба введення до системи динамічних індуктивностей по осях системи та елементів зі взаємною індуктивністю між осями, що залежать від приросту модулів векторів потокозчеплення  $\Delta \psi_\delta$  та струму намагнічування  $\Delta i_\mu$ , значень самих модулів векторів  $\psi_\delta$  та  $i_\mu$ , кута, що визначається взаємним розташуванням проекцій узагальненого вектора намагнічуючого струму на відповідні вісі  $\eta_\mu = \arctg\left(\frac{i_{\mu d}}{i_{\mu q}}\right)$ .

У відповідності до вказаного припущення можна записати

$$i_\mu = \sqrt{i_{\mu d}^2 + i_{\mu q}^2} = \sqrt{(i_{sd} + i_{rd})^2 + (i_{sq} + i_{rq})^2}. \quad (6)$$

Похідна вектора робочого потокозчеплення на основі роботи Фільца Р.В.

$$\frac{d\vec{\psi}_\delta}{dt} = \frac{d\vec{\psi}_\delta}{d\vec{i}_\mu} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = L^\delta \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = \begin{bmatrix} L_d^\delta & M_{dq}^\delta \\ M_{qd}^\delta & L_q^\delta \end{bmatrix} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt}, \quad (7)$$

де  $L^\delta$  – тензор динамічних індуктивностей насиченої машини, який за своїм математичним змістом є оператором, що, діючи на нескінченно мале прирощення вектора намагнічуючого струму  $\vec{i}_\mu$ , перетворює його у відповідне прирощення вектора робочого потокозчеплення  $\vec{\psi}_\delta$ .

У відповідності до дослідження Фільца Р.В. приймаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\psi}_\delta}{dt} &= \frac{d\vec{\psi}_\delta}{d\vec{i}_\mu} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = L^\delta \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt} = \\ &= \begin{bmatrix} L_d^\delta & M_{dq}^\delta \\ M_{qd}^\delta & L_q^\delta \end{bmatrix} \cdot \frac{d\vec{i}_\mu}{dt}, \end{aligned} \quad (8)$$

де динамічний коефіцієнт взаємоіндукції між осями при зміні струму по осі  $d$

$$\begin{aligned} M_{qd}^\delta &= \lim_{\Delta i_{\mu d} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta q}}{\Delta i_{\mu d}} = \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu d}} = \\ &= \left( \frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin \eta_\mu \cdot \cos \eta_\mu = \\ &= 0,5 \cdot \left( \frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin 2\eta_\mu = M^\delta, \end{aligned} \quad (9)$$

динамічний коефіцієнт самоіндукції контуру по осі  $d$

$$\begin{aligned} L_d^\delta &= \lim_{\Delta i_{\mu d} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta d}}{\Delta i_{\mu d}} = \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu d}} = \\ &= \frac{d\psi_\delta}{dt} \cdot \cos^2 \eta_\mu + \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \cdot \sin^2 \eta_\mu, \end{aligned} \quad (10)$$

динамічний коефіцієнт взаємоіндукції між осями при зміні струму по осі  $q$

$$\begin{aligned} M_{dq}^\delta &= \lim_{\Delta i_{\mu q} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta d}}{\Delta i_{\mu q}} = \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu q}} = \\ &= \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu d}} = \left( \frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin \eta_\mu \cdot \cos \eta_\mu = \\ &= 0,5 \cdot \left( \frac{d\psi_\delta}{dt} - \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \right) \cdot \sin 2\eta_\mu = M^\delta, \end{aligned} \quad (11)$$

динамічний коефіцієнт самоіндукції контуру по осі  $q$

$$\begin{aligned} L_q^\delta &= \lim_{\Delta i_{\mu q} \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_{\delta q}}{\Delta i_{\mu q}} = \frac{\partial \psi_{\delta q}}{\partial i_{\mu q}} = \\ &= \frac{d\psi_\delta}{dt} \cdot \sin^2 \eta_\mu + \frac{\psi_\delta}{i_\mu} \cdot \cos^2 \eta_\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Для проєкцій узагальненого вектора потокозчеплення на осі системи координат  $(d,q)$  мають місце співвідношення

$$\psi_{sd} = \psi_{\sigma sd} + \psi_{\delta d}; \quad (13)$$

$$\psi_{sq} = \psi_{\sigma sq} + \psi_{\delta q}; \quad (14)$$

$$\psi_{rd} = \psi_{\sigma rd} + \psi_{\delta d}; \quad (15)$$

$$\psi_{rq} = \psi_{\sigma rq} + \psi_{\delta q}. \quad (16)$$

У рівняннях (13)–(16) через  $\psi_{\sigma s,r(d,q)}$  позначено відповідні проєкції узагальнених векторів потокозчеплення розсіювання статора та ротора, пов'язаних з дією сталих індуктивностей розсіювання обмоток статора  $L_{\sigma s}$  та ротора  $L_{\sigma r}$  відповідно. Тобто

$$\psi_{\sigma sd} = L_{\sigma s} \cdot i_{\sigma sd}; \quad (17)$$

$$\psi_{\sigma sq} = L_{\sigma s} \cdot i_{\sigma sq}; \quad (18)$$

$$\psi_{\sigma rd} = L_{\sigma r} \cdot i_{\sigma rd}; \quad (19)$$

$$\psi_{\sigma rq} = L_{\sigma r} \cdot i_{\sigma rq}. \quad (20)$$

Для проєкцій узагальненого вектора струму намагнічування  $\vec{i}_\mu$  на осі системи координат  $(d,q)$  мають місце співвідношення

$$i_{\mu d} = i_{sd} + i_{rd}; \quad (21)$$

$$i_{\mu q} = i_{sq} + i_{rq}. \quad (22)$$

Запишемо на основі системи (5) систему рівнянь, що визначає контури статора

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot r_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_\mu \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot r_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_\mu \end{cases} \quad (23)$$

та систему рівнянь, що визначає контури короткозамкненого ротора

$$\begin{cases} 0 = i_{rd} \cdot r_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} \\ 0 = i_{rq} \cdot r_{rq} + \frac{d\psi_{rq}}{dt} \end{cases} \quad (24)$$

Побудуємо схему заміщення тягового асинхронного двигуна, що відповідає отриманим рівнянням (23), (24) (рис. 2) на основі принципів, закладених у [4, 6].

Виконавши підстановку виразів (13)–(22) до системи рівнянь (23), отримаємо, здійснивши попередньо аналітичні перетворення

$$\begin{cases} u_{sd} = i_{sd} \cdot (r_{sd} + r_\mu) + L_{\sigma s} \frac{di_{sd}}{dt} + \\ + \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \omega_r \cdot L_{\sigma r} \cdot i_{rq} - \omega_r \cdot \psi_{\delta q} + i_{rd} \cdot r_\mu \\ u_{sq} = i_{sq} \cdot (r_{sq} + r_\mu) + L_{\sigma s} \frac{di_{sq}}{dt} + \\ + \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} + \omega_r \cdot L_{\sigma r} \cdot i_{rd} + \omega_r \cdot \psi_{\delta d} + i_{rq} \cdot r_\mu \end{cases} \quad (25)$$

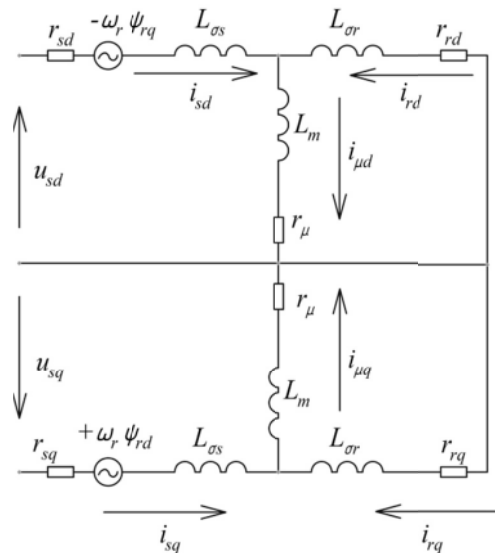


Рис. 2. Схема заміщення тягового асинхронного двигуна, відповідно до системи рівнянь (23), (24)

Виконавши підстановку виразів (13)–(22) до системи рівнянь (24), отримаємо, здійснивши попередньо аналітичні перетворення

$$\begin{cases} 0 = i_{rd} \cdot r_{rd} + L_{\sigma r} \frac{di_{rd}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} \\ 0 = i_{rq} \cdot r_{rq} + L_{\sigma r} \frac{di_{rq}}{dt} + \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} \end{cases} \quad (26)$$

Розглянемо проєкції узагальненого вектора струму намагнічування  $\vec{i}_\mu$  на осі системи координат  $(d,q)$

$$i_{\mu d} = i_\mu \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_\delta}; \quad (27)$$

$$i_{\mu q} = i_\mu \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_\delta}. \quad (28)$$

Модуль просторового вектора робочого потокозчеплення

$$\psi_\delta = \sqrt{\psi_{\delta d}^2 + \psi_{\delta q}^2}. \quad (29)$$

Знайдемо диференціал за часом від виразів (21) та (22), використовуючи (27)–(29)

$$\frac{di_{\mu d}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu}; \quad (30)$$

$$\frac{di_{\mu q}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu}. \quad (31)$$

У виразах (30), (31) значення похідних, на основі теорії диференціювання складних функцій, можна знайти як

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) = \frac{\psi_{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}}{\psi_{\delta}^2}; \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) = \frac{\psi_{\delta} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} - \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}}{\psi_{\delta}^2}. \quad (33)$$

Аналогічно до (8) запишемо для похідних у виразах (30), (31)

$$\frac{di_{\mu}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt}. \quad (34)$$

Виконаємо підстановку (32)–(34) у (30) та (31)

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu d}}{dt} &= \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \\ &+ \left( \frac{1}{\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} - \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}^2} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \right) \cdot i_{\mu}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu q}}{dt} &= \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \\ &+ \left( \frac{1}{\psi_{\delta}} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt} - \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}^2} \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \right) \cdot i_{\mu}. \end{aligned} \quad (36)$$

У роботі Фильца Р.В. введено поняття радіальної динамічної індуктивності, що дорівнює границі відношення прирощення модуля робочого потокозчеплення до прирощення намагнічуючого струму, якщо останнє прямує до нуля і напрямком його співпадає з напрямком намагнічуючого струму

$$L_{\rho}^{\delta} = \frac{d\psi_{\delta}}{di_{\mu}}. \quad (37)$$

Також у роботі Фильца Р.В. введено поняття тангенціальної динамічної індуктивності, що являє собою границю відношення прирощення робочого потокозчеплення до прирощення намагнічуючого струму, якщо останнє прямує до нуля таким чином, що модуль вектора намагнічуючого струму залишається незмінним

$$L_{\tau}^{\delta} = \frac{\psi_{\delta}}{i_{\mu}}. \quad (38)$$

У відповідності до дослідження Фильца Р.В. та виразів (8)–(12), (37) на рис. 3 надамо графічну інтерпретацію фізичного змісту радіальної динамічної індуктивності.

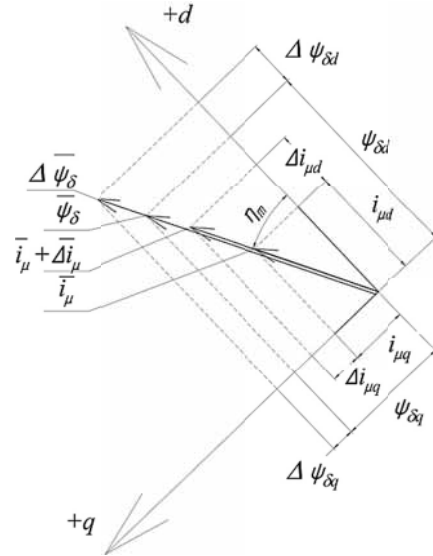


Рис. 3. Графічна інтерпретація фізичного змісту радіальної динамічної індуктивності

У відповідності до дослідження Фильца Р.В. та виразів (8)–(12), (38) на рис. 4 надамо графічну інтерпретацію фізичного змісту тангенціальної динамічної індуктивності.

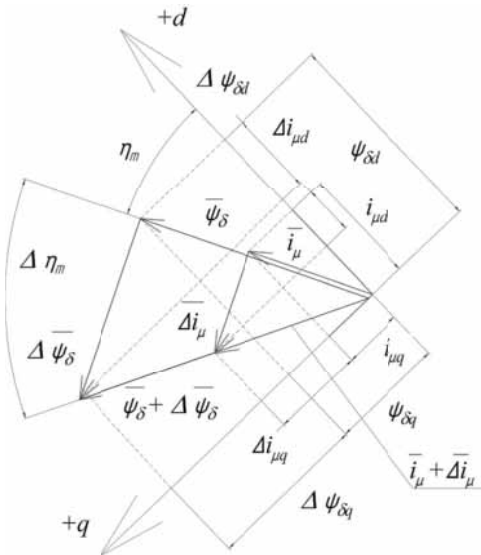


Рис. 4. Графічна інтерпретація фізичного змісту тангенціальної динамічної індуктивності

У роботах [6,7] запропоновано, для спрощення форми запису, використовувати величини, зворотні до радіальної динамічної індуктивності

$$Y_{\rho}^{\delta} = \frac{1}{L_{\rho}^{\delta}} = \frac{di_{\mu}}{d\psi_{\delta}} \quad (39)$$

та тангенціальної динамічної індуктивності

$$Y_{\tau}^{\circ} = \frac{1}{L_{\tau}^{\circ}} = \frac{i_{\mu}}{\psi_{\delta}}. \quad (40)$$

З урахуванням (39), (40), вирази (35), (36) можна записати

$$\frac{di_{\mu d}}{dt} = (Y_{\rho}^{\circ} - Y_{\tau}^{\circ}) \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + Y_{\tau}^{\circ} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt}; \quad (41)$$

$$\frac{di_{\mu q}}{dt} = (Y_{\rho}^{\circ} - Y_{\tau}^{\circ}) \cdot \frac{d\psi_{\delta}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + Y_{\tau}^{\circ} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}. \quad (42)$$

На основі (29), як для складної функції, можна записати

$$\frac{d\psi_{\delta}}{dt} = \frac{\psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}}. \quad (43)$$

Виконаємо підстановку (43) до (41), (42)

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu d}}{dt} &= (Y_{\rho}^{\circ} - Y_{\tau}^{\circ}) \times \\ &\times \left( \frac{\psi_{\delta d}^2 \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q} \cdot \psi_{\delta d} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}^2} \right) + Y_{\tau}^{\circ} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{\mu q}}{dt} &= (Y_{\rho}^{\circ} - Y_{\tau}^{\circ}) \times \\ &\times \left( \frac{\psi_{\delta d} \cdot \psi_{\delta q} \cdot \frac{d\psi_{\delta d}}{dt} + \psi_{\delta q}^2 \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}}{\psi_{\delta}^2} \right) + Y_{\tau}^{\circ} \cdot \frac{d\psi_{\delta q}}{dt}. \end{aligned} \quad (45)$$

З метою спрощення виконаємо перетворення в отриманій моделі, виключивши проєкції узагальненого вектора роторного струму на відповідні осі в системі (26). За (21), (22) маємо

$$i_{rd} = i_{\mu d} - i_{sd}; \quad (46)$$

$$i_{rq} = i_{\mu q} - i_{sq}. \quad (47)$$

Тоді, враховуючи (27), (28) та (39), (40), маємо

$$i_{rd} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} - i_{sd} = Y_{\tau}^{\circ} \cdot \psi_{\delta d} - i_{sd}; \quad (48)$$

$$i_{rq} = i_{\mu} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} - i_{sq} = Y_{\tau}^{\circ} \cdot \psi_{\delta q} - i_{sq}. \quad (49)$$

Для диференціалів проєкцій вектора роторного струму запишемо

$$\frac{di_{rd}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta d}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu} - \frac{di_{sd}}{dt}; \quad (50)$$

$$\frac{di_{rq}}{dt} = \frac{di_{\mu}}{dt} \cdot \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\psi_{\delta q}}{\psi_{\delta}} \right) \cdot i_{\mu} - \frac{di_{sq}}{dt}. \quad (51)$$

За аналогією з роботою Фильца Р.В., на основі виразів (4), (13)–(20), можна записати

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + \frac{\partial \psi_{\delta d}}{\partial i_{\mu d}} \cdot \frac{\partial i_{\mu d}}{\partial i_{sd}}, \quad (52)$$

що, з урахуванням (6), (9)–(12), дає

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sd}} = L_{\sigma s} + L_d^{\circ}. \quad (53)$$

Аналогічно можна записати

$$\frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{sq}} = L_{\sigma s} + L_q^{\circ}; \quad (54)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rd}} = L_{\sigma r} + L_d^{\circ}; \quad (55)$$

$$\frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{rq}} = L_{\sigma r} + L_q^{\circ}; \quad (56)$$

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{rd}} = L_d^{\circ}; \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{sd}} = L_d^{\circ}; \quad (58)$$

$$\frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{rq}} = L_q^{\circ}; \quad (59)$$

$$\frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{sq}} = L_q^{\circ}; \quad (60)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rd}} = L_{\sigma r} + L_d^{\circ}, \quad (61)$$

а з урахуванням (9), (11)

$$\frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{sq}} = \frac{\partial \psi_{sd}}{\partial i_{rq}} = \frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{sd}} = \frac{\partial \psi_{sq}}{\partial i_{rd}} = M^{\circ}; \quad (62)$$

$$\frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{sq}} = \frac{\partial \psi_{rd}}{\partial i_{rq}} = \frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{sd}} = \frac{\partial \psi_{rq}}{\partial i_{rd}} = M^{\circ}. \quad (63)$$

Останні два вирази підтверджують висновок Фільца Р.В. стосовно симетричності тензора  $L^\circ$  у (7), (8). Це пояснюється тим, що динамічні коефіцієнти взаємодукції між контурами  $d$  та  $q$  задовольняють теорему взаємності.

Таким чином, з усіх робочих динамічних параметрів машини достатньо знайти тільки три параметри  $L_d^\circ$ ,  $L_q^\circ$  та  $M^\circ$ , що є елементами тензора  $L^\circ$  у (7), (8).

На основі досліджень Фільца Р.В. можна записати

$$d\vec{\psi}_\delta = (L_d^\circ di_{\mu d} + M_{dq}^\circ di_{\mu q})\vec{d} + (L_q^\circ di_{\mu q} + M_{qd}^\circ di_{\mu d})\vec{q}, \quad (64)$$

або, враховуючи (62), (63),

$$d\vec{\psi}_\delta = L_d^\circ di_{\mu d}\vec{d} + M^\circ di_{\mu q}\vec{d} + L_q^\circ di_{\mu q}\vec{q} + M^\circ di_{\mu d}\vec{q}, \quad (65)$$

де  $\vec{d}$  та  $\vec{q}$  – одиничні вектори, що належать відповідним осям системи.

Тоді згідно з (65), використавши (52)–(63), запишемо систему рівнянь (23), що визначає контури статора наступним чином

$$\left\{ \begin{aligned} u_{sd} &= i_{sd} \cdot r_{sd} + (L_{\sigma s} + L_d^\circ) \frac{di_{sd}}{dt} + M^\circ \frac{di_{sq}}{dt} + \\ &+ L_d^\circ \frac{di_{rd}}{dt} + M^\circ \frac{di_{rq}}{dt} - \omega_r \cdot \psi_{rq} + i_{\mu d} \cdot r_\mu \\ u_{sq} &= i_{sq} \cdot r_{sq} + (L_{\sigma s} + L_q^\circ) \frac{di_{sq}}{dt} + M^\circ \frac{di_{sd}}{dt} + \\ &+ L_q^\circ \frac{di_{rq}}{dt} + M^\circ \frac{di_{rd}}{dt} + \omega_r \cdot \psi_{rd} + i_{\mu q} \cdot r_\mu \end{aligned} \right. \quad (66)$$

та аналогічно систему рівнянь (24), що визначає контури короткозамкненого ротора

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= i_{rd} \cdot r_{rd} + L_d^\circ \frac{di_{sd}}{dt} + M^\circ \frac{di_{sq}}{dt} + \\ &+ (L_{\sigma r} + L_d^\circ) \frac{di_{rd}}{dt} + M^\circ \frac{di_{rq}}{dt} \\ 0 &= i_{rq} \cdot r_{rq} + L_q^\circ \frac{di_{sq}}{dt} + M^\circ \frac{di_{sd}}{dt} + \\ &+ (L_{\sigma r} + L_q^\circ) \frac{di_{rq}}{dt} + M^\circ \frac{di_{rd}}{dt} \end{aligned} \right. \quad (67)$$

Таким чином, отримано математичну модель у вигляді системи рівнянь (66), (67), в якій на основі методу динамічних індуктивностей враховано зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна у процесі його роботи в різних режимах, відповідно до широкого різноманіття режимів роботи тягової електропередачі електрорухомого складу залізниць.

### Висновки та перспективи розвитку напрямку.

Отримані результати є базовими при розробці та побудові адекватних систем керування приводами та систем автоведення тягового електрорухомого складу залізниць, адже дозволяють враховувати зміну магнітного стану тягового асинхронного двигуна, що надає можливість досить повно та адекватно реальним електромагнітним процесам описувати дані фізичні процеси та моделювати їх. Створена математична модель показує перспективність подальшого дослідження у цьому напрямі для отримання інших співвідношень для тягової асинхронної машини на основі отриманих рівнянь.

### Список літератури / References

1. Boldea, I. And Nasar, S.A. (2002), *Induction Machines Handbook*, CRC Press Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
2. Виноградов А.Б. Векторное управление электроприводами переменного тока / Виноградов А.Б. – ГОУВПО „Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина“. – Иваново, 2008. – 320 с.
3. Vinogradov, A.B. (2008), *Vektornoye upravleniye elektropriwodami peremennogo toka* [Vector Control of AC Electric Drives], GOUVPO “Ivanovskiy Gosudarstvennyy Energeticheskiy Universitet im. V.I. Lenina”, Ivanovo, Russia.
4. Мищенко В.А. Теория, способы и системы векторного и оптимального векторного управления электроприводами переменного тока: монография / Мищенко В.А. – М.: Издательство „Информэлектро“, 2002. – 168 с.
5. Mishchenko, V.A. (2002), *Teoriya, sposoby i sistemy vektornogo i optimalnogo vektornogo upravleniya elektropriwodami peremennogo toka* [Theory, Methods and Systems of the Vector and the Optimal Vector Control Electric Drives of an Alternating Current], Monograph, Informelektro, Moscow, Russia.
6. Пивняк Г.Г. Современные частотно-регулируемые асинхронные электроприводы с широтно-импульсной модуляцией / Г.Г. Пивняк, А.В. Волков – Днепрпетровск, 2006. – 421 с.
7. Pivnyak, G.G. and Volkov, A.V. (2006), *Sovremennye chastotnoreguliruyemye asinkhronnye elektroprirody s shyrotno-impulsnoy modulyatsiyey* [Modern Frequency-Controlled Asynchronous Electric Drives with Pulse-Width Modulation], Dnepropetrovsk, Ukraine.
8. Потапенко Е.М. Робастные алгоритмы векторного управления асинхронным приводом / Е.М. Потапенко, Е.Е. Потапенко. – Запорожье: ЗНТУ, 2009. – 353 с.
9. Potapenko, Ye.M. and Potapenko Ye.Ye. (2009), *Robastnye algoritmy vektornogo upravleniya asinkhronnym privodom* [Robust Algorithms for Vector Control Asynchronous Drive], ZNTU, Zaporozhe, Ukraine.
10. Беспалов Б.Я. Математическая модель асинхронного двигателя в обобщенной ортогональной системе координат / Б.Я. Беспалов, Ю.А. Мощинский,

А.П. Петров // Электричество. – 2002. – № 8. – С. 33–39.

Bespalov, V.Ya., Moshchinskiy, Yu.A. and Petrov, A.P. (2002), “Mathematical model of the induction motor in a generalized orthogonal coordinate system”, *Elektrichestvo*, no. 8, pp. 33–39.

7. Снегирев Д.А. Дифференциальные уравнения для исследования электромагнитных переходных процессов частотно-регулируемого асинхронного двигателя с учетом насыщения / Д.А. Снегирёв, А.В. Тикуннов // Электротехнические комплексы и системы управления. – 2006. – № 2. – С. 69–73.

Snegirev, D.A. and Tikunov, A.V. (2006), “Differential equations for research of electromagnetic transients of frequency-controlled asynchronous motor with taking into account the saturation”, *Elektrotehnicheskie Kompleksy i Sistemy Upravleniya*, no. 2, pp. 69–73.

8. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин / Копылов И.П. – М.: Высшая школа, 2001. – 327 с.

Kopylov, I.P. (2001), *Matemeticheskoye modelirovaniye elektricheskikh mashyn* [Mathematical Modelling of Electrical Machines], Vysshaya Shkola, Moscow, Russia.

**Цель.** Разработка математической модели тяговой асинхронной машины в  $(d, q)$  системе координат с учетом насыщения магнитных цепей.

**Методика.** В работе использован метод динамических индуктивностей, который объединен с использованием системного исследования свойств тягового асинхронного двигателя.

**Результаты.** Создана аналитическая модель магнитных цепей асинхронного тягового двигателя, в которой учтено действие тангенциальной и радиальной динамических индуктивностей. На основе этого построен тензор динамических индуктивностей насыщенной машины, по которому были записаны в  $(d, q)$  системе координат уравнения роторных и статорных цепей асинхронного тягового двигателя с учетом насыщения. Обосновано использование метода динамических индуктивностей при построении математической модели тягового асинхронного двигателя, что позволило учесть насыщение главного магнитного пути для режимов с широким диапазоном изменения потока взаимной индукции между статором и ротором, насыщение путей потоков рассеяния для режимов, которые характеризуются значительными токами контуров машины, взаимную индукцию, обусловленную процессами насыщения между взаимно перпендикулярными контурами машины, а также совместное насыщение рабочим потоком и потоками рассеяния для режимов, характеризующихся значительной величиной рабочего потока и большими значениями токов в контурах машины. Данные режимы являются характерными для тяговых асинхронных машин с учетом режима работы тягового электроподвижного состава железных дорог.

**Научная новизна.** Учтено изменение магнитного состояния тягового асинхронного двигателя, что яв-

ляется актуальной задачей, учитывая такое изменение в широком диапазоне рабочих режимов тягового электроподвижного состава железных дорог.

**Практическая значимость.** Созданная математическая модель позволяет учитывать изменение магнитного состояния тягового асинхронного двигателя, что является необходимым для построения адекватных систем управления приводами и систем автоведения тягового электроподвижного состава железных дорог.

**Ключевые слова:** тяговая асинхронная машина, насыщение, магнитное круг, уравнение состояния

**Purpose.** Development of mathematical model of asynchronous traction machines in  $(d, q)$  frame of axis with taking into account the saturation of magnetic circuits.

**Methodology.** In the paper, we used the method of dynamic inductances, which is connected with the use of a systematic study of properties of the traction motor.

**Findings.** We have designed the analytical model of magnetic circuit asynchronous traction motor which takes into account action of the tangential and radial dynamic inductances. Based on this we have built tensor dynamic inductances rich machine, which was recorded in  $(d, q)$  frame of axis of equations of rotor and stator circles asynchronous traction motor taking into account the saturation. We suggest the method of dynamic inductances for construction of mathematical models of traction asynchronous engine. This allows to take into account the saturation of the main magnetic path for the modes with a wide range of changes in the flow of mutual induction between the stator and the rotor; saturation flow path scattering modes that are characterized by large current circuits of the machine; induction caused by processes of saturation between mutually perpendicular to the contours of the machine; as well as the joint saturation worker thread and threads scattering modes that are characterized by the significant size of the workflow and large values of currents contours of the machine. These modes are specific to asynchronous traction machines with consideration of the operation mode of traction electric rolling stock of Railways.

**Originality.** We have considered variations in the magnetic state of traction induction motor, which is a topical issue in view of such a change in a wide range of operating modes of traction electric rolling stock of Railways.

**Practical value.** The mathematical model allows taking into account the change of the magnetic state of asynchronous traction motor. It is required for creation of adequate drives control systems and systems for driving traction electric rolling stock of Railways.

**Keywords:** asynchronous traction machine, saturation, magnetic circle, equations of state

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук П.Д. Андрієнком. Дата надходження рукопису 18.11.13.*