

separate the burnout areas from the image background have been shown. The algorithm for vectorizing the thermogram images to highlight burnout areas on the filtered image has been developed. The neural networks choice to solve the problem for thermogram image recognition of the lining objects has been substantiated. The thermogram image processing results of the moved mixers and wagon with liquid iron to determine their technical condition have been described.

Originality. The thermogram image processing method of the lining objects for thermal control which based on a combination of the neural networks and classical image pro-

cessing methods and which allows diagnosing the lining objects condition (determining burnout areas) has been developed.

Practical value. The practical value of these results is that the provisions of this scientific work allowed carrying out technical diagnostics of the lining objects by determining their lining burnout areas.

Keywords: *image processing, filtering, vectorization, thermogram, neural networks, lining objects*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук А.І. Песчанським. Дата надходження рукопису 04.12.13.

УДК 681.2.083

**В.Я. Копп, д-р техн. наук, проф.,
А.И. Балакин, канд. техн. наук,
М.В. Замоленов, канд. техн. наук**

Севастопольский национальный технический университет,
г.Севастополь, АР Крым, e-mail: lehaba@rambler.ru

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ УСЕЧЕННОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**V.Ya Kopp, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A.I. Balakin, Cand. Sci. (Tech.),
M.V. Zamoryonov, Cand. Sci. (Tech.)**

Sevastopol National Technical University, Sevastopol, Crimea,
e-mail: lehaba@rambler.ru

ANALYSIS OF THE TRUNCATED NORMAL DISTRIBUTION APPLICABILITY FOR SELECTION OF THE MULTIPLE MEASUREMENTS OPTIMAL NUMBER

Цель. Обеспечение точности контрольно-измерительных операций в машиностроении путем оценки погрешности при использовании усеченного нормального распределения для определения оптимального числа многократных измерений.

Методика. На основании использования принципа максимума энтропии и вариационного исчисления получено аналитическое выражение для вида плотности распределения случайной величины, сосредоточенной на конечном интервале при условии, что на границах интервала значения плотности равны нулю. Полученный вид плотности в дальнейшем использовался для оценки погрешности, вносимой применением усеченного нормального распределения. При определении числа многократных измерений используется итерационная процедура.

Результаты. Проведенные исследования доказали возможность применимости усеченного нормального распределения для оценки числа многократных измерений. Расхождение результатов оценки требуемого числа измерений при использовании усеченного нормального распределения и арбитражного закона, полученного на основе исследований, составило меньше 0,5%.

Научная новизна. Сформулирована и доказана теорема, позволяющая определить вид плотности распределения, обеспечивающий максимум энтропии суммы двух случайных величин, сосредоточенных на конечных интервалах, при заданной суммарной дисперсии.

Практическая значимость. Показана возможность использования усеченного нормального распределения, что значительно упрощает обработку результатов многократных измерений.

Ключевые слова: *многократные измерения, максимум энтропии, плотность распределения, погрешность средства измерительной техники, граничные оценки*

Постановка проблемы. Проблема повышения качества продукции в машино- и приборостроении невозможна без обеспечения точности контрольно-измерительных операций, имеющих особое значение

при изготовлении прецизионных деталей, так как ошибки при разбраковке могут привести к отказу механизмов, содержащих данные изделия.

Следует заметить, что возможности измерительных приборов, нашедших наиболее широкое распространение в технике, практически исчерпаны. Поэтому воз-

можны два пути развития: либо заменить их на более дорогие, основанные, например, на новых принципах, либо использовать более эффективные методики их применения. Первый путь не всегда оправдан экономически, таким образом, повышенную актуальность приобретает второй путь, связанный с разработкой прогрессивных процессов измерений, одним из которых является процесс, основанный на использовании многократных измерений, позволяющий существенно повысить точность контрольных операций. Учитывая, что современные рыночные отношения диктуют частую смену продукции, ведущую к уменьшению объемов партий изделий и производительности в целом при значительном повышении требований к качеству, недостаток многократных измерений, заключающийся в снижении производительности, окупается их значительными преимуществами в точности.

Таким образом, одним из наиболее важных параметров многократных измерений является их количество.

Выделение нерешенной проблемы. Вопросам повышения точности измерений в машино- и приборостроении посвящено большое количество работ следующих авторов: Браславского Д.А., Кемпинского М.М., Короткова В.П., Тайца Б.А., Полишко С.П., Рудзита Я.А., Новицкого П.В., Зографа И.А., Орнатского П.П., Гаврилова Л.Н., Бородачева Н.А. Однако ряд вопросов, связанных с методами расчета числа многократных измерений, например, таких как определение вида плотности распределения погрешности, остается открытым.

Анализ последних исследований. При оценке точностных свойств измерительных приборов из паспортных данных известно значение предельной погрешности во всём диапазоне измерения. При этом необходимо учитывать, что в пределах допустимых значений измеряемой величины точность средств измерений должна изменяться. Так в области середины поля допуска она может быть меньше, а по мере приближения к границам должна увеличиваться, чтобы уменьшить вероятность выхода за эти границы воспроизводимой величины. Вследствие того, что прибор имеет погрешность, при его показаниях, соответствующих предельным или близким к ним значениям измеряемой величины, ограниченной допуском, нельзя достоверно утверждать, что воспроизводимая величина находится в пределах этого допуска. Поэтому, чтобы получить достоверную информацию о том, что измеряемая величина находится в допустимых пределах, необходимо уменьшить поле допуска этой величины на значение удвоенной предельной погрешности прибора. Однако это значительно сужает область допустимых значений, что усложняет в целом технологический процесс. Увеличение числа многократных измерений практически устраняет указанный недостаток, тем самым повышая точность результата измерения. Однако использование данного метода приводит к увеличению времени измерения, что оказывает влияние на производительность производственных систем в целом. Поэтому необходимо

определять минимально необходимое число измерений, обеспечивающих заданную точность. Определить необходимое число измерений можно на основе анализа дифференциальной энтропии [1]. Одной из основных сложностей при этом является определение вида плотности распределения погрешности измерения, базирующееся на принципе максимума энтропии Джейнса.

Выделение нерешенной ранее части проблемы. В работе [1] предлагается определять необходимое число многократных измерений на основе анализа дифференциальной энтропии. В источниках [1] и [2] приведена и доказана теорема, согласно которой максимальную дифференциальную энтропию случайной величины, сосредоточенной на конечном интервале, обеспечивает композиционный закон, который для случая, когда ее дисперсия удовлетворяет соотношению

$$\sigma^2 < \frac{(b-a)^2}{12},$$

где a и b предельные значения случайной величины, является усеченным нормальным законом. Собственно говоря, результатами теоремы можно пользоваться для определения минимально необходимого числа измерений, обеспечивающего требуемую точность. Алгоритм следующий. Расчет ведется итерационно с учетом того, что, в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности, дисперсия среднего значения при многократных измерениях уменьшается в n раз, а его математическое ожидание и пределы изменения случайной величины не изменяются. Задаются дисперсия и пределы. Определяются параметры усеченного нормального закона и, исходя из этого, находится доверительная вероятность результата измерений. Если она неудовлетворительна, то дисперсия уменьшается и ищется новое значение числа измерений. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет обеспечена заданная доверительная вероятность.

Однако полученные результаты могут давать несколько завышенную оценку числа измерений. Это вызвано следующим обстоятельством: известно, что сумма двух усеченных законов дает вид плотности, которая имеет нулевые значения на границах интервала, внутри которого сосредоточена случайная величина, что не соответствует усеченному нормальному закону.

Формулирование цели работы. Целью работы является оценка погрешности при использовании усеченного нормального распределения для определения оптимального числа многократных измерений.

Изложение основного материала. Постановка задачи: необходимо определить в общем виде плотности распределения случайной величины (СВ) $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, являющейся суммой двух независимых СВ α_1 и α_2 , сосредоточенных на конечных интервалах, обеспечивающей максимум ее неопределенности, причем дисперсию СВ γ обозначим d_γ .

Плотность этой величины имеет вид

$$p_{\Sigma}(x) = \int_{-a}^b p_2(x-y)p_1(y)dy \cdot$$

Если искать плотность $p_{\Sigma}(x)$ как решение вариационной задачи

$$p_{\Sigma}(x) \rightarrow \max \left\{ H_{\text{оуп}} = - \int_{-2a}^{2b} [p_{\Sigma}(x) \ln(p_{\Sigma}(x))] dx \right\}$$

при ограничениях

$$\int_{-2a}^{2b} p_{\Sigma}(x) dx = 1;$$

$$\int_{-2a}^{2b} x^2 p_{\Sigma}(x) dx = d_{\gamma},$$

то ее решением будет усеченный нормальный закон вида $p_{\Sigma}(x) = e^{\lambda_1 - 1} e^{-x^2 \lambda_2}$, где постоянные λ_1, λ_2 определяются из приведенных выше ограничений. Однако данное решение не удовлетворяет поставленной задаче, т.к. не выполняется условие $p_{\Sigma}(-2a) = p_{\Sigma}(2b) = 0$. Поэтому необходимо сначала поставить задачу в более общем виде.

Найти плотности распределения $p_1(x), p_2(x)$, обеспечивающие максимум функционала

$$p_1(x), p_2(x) \rightarrow \max \left\{ H_{\text{оуп}} = - \int_{-2a}^{2b} \left[\int_{-a}^b p_2(x-y)p_1(y) dy \right] \cdot \right. \quad (1)$$

$$\left. \cdot \ln \left[\int_{-a}^b p_2(x-y)p_1(y) dy \right] \right\},$$

при ограничениях

$$\int_{-a}^b p_1(y) dy = 1; \quad (2)$$

$$\int_{-a}^b y^2 \cdot p_1(y) dy = d_1; \quad (3)$$

$$\int_{-a}^b p_2(y) dy = 1; \quad (4)$$

$$\int_{-a}^b y^2 \cdot p_2(y) dy = d_2. \quad (5)$$

Вид функционала (1) автоматически обеспечивает выполнение условий $p_{\Sigma}(-2a) = p_{\Sigma}(2b) = 0$.

Поставленная выше задача является вариационной задачей с изопериметрическими ограничениями. В отличие от классической постановки, в данной задаче

пределы интегрирования функционала и ограничений не совпадают. Для приведения ее к классическому виду будем решать задачу не относительно суммы двух СВ α_1 и α_2 , а относительно СВ $\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. В этом случае функционал (1) будет иметь вид

$$p_1(x), p_2(x) \rightarrow \max \left\{ H_{\text{оуп}} = - \int_{-a}^b \left[\int_{-a}^b 2 \cdot p_2(2x-y)p_1(y) dy \cdot \right. \right. \quad (6)$$

$$\left. \left. \cdot \ln \left[\int_{-a}^b 2 \cdot p_2(2x-y)p_1(y) dy \right] \right] dx \right\}.$$

При этом ограничения (2)–(5) остаются без изменений, а энтропия H_{β} СВ β будет равна

$$H_{\beta} = H_{\gamma} - \ln 2,$$

где H_{γ} – энтропия СВ γ .

Необходимо отметить, что т.к. СВ γ имеет излом, вследствие того, что СВ α_1 и α_2 сосредоточены на конечном интервале $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^b 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy = \\ & = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy = \\ & = \begin{cases} \int_{-a}^{2x+a} 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right] \\ \int_{2x-b}^b 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right] \end{cases}, \end{aligned}$$

где $\psi(x) = \begin{cases} -a, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right]; \\ 2x-b, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right]; \end{cases}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \in \left[-a, \frac{b-a}{2}\right]; \\ b, & x \in \left[\frac{b-a}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи используем уравнение Эйлера. Причем функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi = & - \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy \cdot \\ & \cdot \ln \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2 p_2(2x-y)p_1(y) dy \right) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 x^2 p_1(x) + \cdot \quad (7) \\ & + \lambda_3 p_2(x) + \lambda_4 x^2 p_2(x) \end{aligned}$$

Хотя функция Φ имеет излом, использование уравнение Эйлера справедливо, так как функционал не содержит производных искомых функций и, следовательно, условие Вейерштрасса-Эрдмана выполняется.

Считая p_1 независимой переменной, берем производную от выражения (7) и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1(x)} = - \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)dy \cdot \left[\ln \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy \right) + 1 \right] + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0.$$

Решая уравнение относительно

$$p_{\Sigma_{cp}}(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy, \quad (8)$$

получаем

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_1}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_2 x^2}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)dy}}.$$

Учитывая, что $\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)dy = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(y)dy$, то

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_1}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_2 x^2}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(y)dy}}. \quad (9)$$

Аналогично, дифференцируя выражение (7) по p_2 , получаем

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_2(2x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_3}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_1(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_4 x^2}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} 2p_1(y)dy}}. \quad (10)$$

При этом плотность распределения $p_{\Sigma_{cp}}(x)$ (8) СВ β обеспечивает экстремум функционала (6). Если увеличить СВ β в два раза, соответственно изменив ее плотность, то новое выражение плотности будет обеспечивать экстремум функционала (1). При этом энтропия СВ β увеличится на константу, равную $\ln(2)$. Соответственно, необходимо изменить и правые части выражений (9) и (10). После преобразования выражения (9) и (10) примут вид

$$p_{\Sigma}(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_1}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_2 x^2}{4 \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(y)dy}}; \quad (11)$$

$$p_{\Sigma}(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_3}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_1(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_4 x^2}{4 \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_1(y)dy}}. \quad (12)$$

$$\text{Причем } \psi(x) = \begin{cases} -a, & x \in [-2a, b-a]; \\ x-b, & x \in [b-a, 2b]; \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} x+a, & x \in [-2a, b-a]; \\ b, & x \in [b-a, 2b]; \end{cases}$$

Получить точное решение системы функциональных интегральных уравнений первого рода (11) и (12) в общем виде относительно $p_1(y)$ и $p_2(y)$ крайне сложно. Однако, исследовав полученные зависимости можно указать частные решения, которые могут иметь определенное прикладное значение, например при проведении многократных измерений.

Приравняв правые части выражений (11) и (12), получаем

$$e^{\frac{\lambda_1}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_2 x^2}{4 \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(y)dy}} = e^{\frac{\lambda_3}{\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_1(y)dy} - 1} \cdot e^{\frac{\lambda_4 x^2}{4 \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_1(y)dy}}.$$

Очевидным условием для получения одного из возможных решений является равенство

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_1(y)dy = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} p_2(y)dy, \quad (13)$$

что, естественно, может быть выполнено при $p_1(y) = p_2(y)$.

Упростим исходную задачу и сформулируем ее следующим образом: при заданной плотности распределения $p_2(y)$ найти плотность распределения $p_{\Sigma}(x)$, обеспечивающую максимум функционала (1), при ограничениях

$$\int_{-a}^b p_2(x-y)p_1(y)dy = 1; \quad (14)$$

$$\int_{-a}^b y^2 p_2(x-y)p_1(y)dy = d_{\gamma}. \quad (15)$$

Ее решение найти можно.

Предположим, что α_2 имеет усеченный нормальный закон распределения, обеспечивающий ей, как доказано в [1], максимум энтропии

$$p_{\Sigma}(y) = e^{\lambda'_1 - 1} e^{-x^2 \lambda'_2}, \quad (16)$$

где λ'_1, λ'_2 определяются из условий (4), (5).

Подставляя в (11) выражение (16), получим плотность распределения суммы двух функций $p_{\Sigma}(x)$, обеспечивающую максимум функционала (1).

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} p_2(x-y)p_1(y)dy = \frac{\lambda_1}{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} e^{\lambda_1 y - 1} e^{y^2 \lambda_2} dy} - 1 \cdot \frac{\lambda_2 x^2}{4 \cdot \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} e^{\lambda_1 y - 1} e^{y^2 \lambda_2} dy} \cdot e^{-\psi(x)} \quad (17)$$

Для определения множителей Лагранжа λ_1, λ_2 в выражении (17), необходимо подставить его в ограничения (14), (15) и решить полученную систему уравнений относительно λ_1, λ_2 .

Отметим, что решение уравнения Эйлера является необходимым условием экстремума функционала (1).

Проверка достаточного условия не проводилась, поэтому глобальный экстремум не гарантирован.

Результаты моделирования приведены на рис. 1, где кривой 1 соответствует плотность распределения p_{Σ} СВ γ .

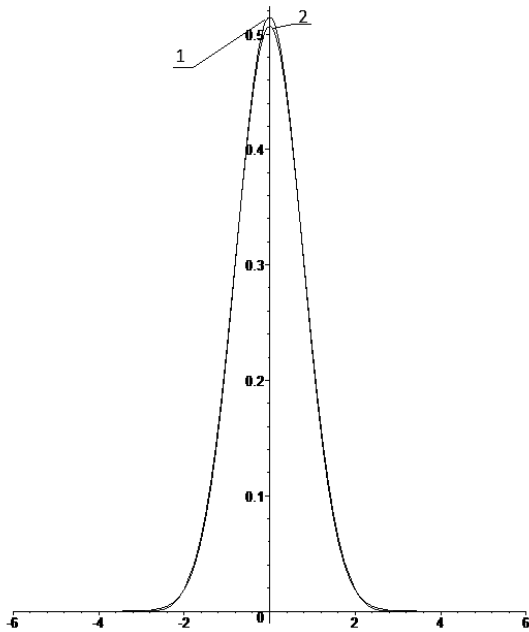


Рис. 1. Вид плотности распределения: 1 – плотность распределения p_{Σ} СВ γ ; 2 – плотность полученного закона

Сравним полученный вид закона распределения p_{Σ} с законом распределения суммы двух СВ, имеющих одинаковые нормальные усеченные законы распределения. Отметим, что данное решение соответствует условию (13). Вид закона представлен на рис. 1 кривой 2. Численное решение показало, что с точностью до 4 знака после запятой значения энтропий совпадают.

На рис. 2 представлен график зависимости значений энтропии композиции двух СВ α_1 и α_2 от дисперсии d_1 при заданной дисперсии d_{γ} .

Анализируя зависимость, представленную на рис. 2, можно сказать, что энтропия композиции двух СВ α_1 и α_2 имеет максимальное значение при $d_1 = d_2$.

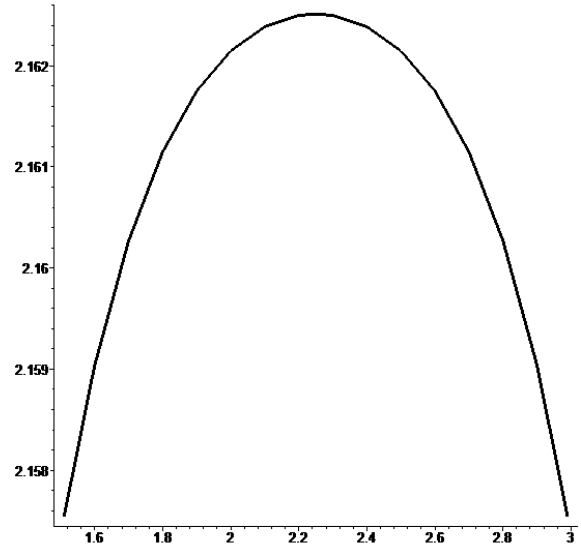


Рис. 2. Зависимость значений энтропии композиции двух СВ α_1 и α_2 от дисперсии d_1 при заданной d_{γ}

При исследовании выражений (11), (12), на первый взгляд, кажется, что в них присутствует противоречие: для того, чтобы в правой части обеспечить условие $p_{\Sigma}(-2a) = p_{\Sigma}(2b) = 0$, необходимо, чтобы показатель экспоненты был равен $-\infty$. Однако никакого противоречия нет, так как коэффициент при x^2 отрицательный, а значение интеграла при $x = -2a$, $x = 2b$ равны

$$\int_{-2a}^{2a} p_2(y)dy = 0; \quad \int_{2b}^{2b} p_2(y)dy = 0;$$

$$\int_{-2a}^{2a} p_1(y)dy = 0; \quad \int_{2b}^{2b} p_1(y)dy = 0.$$

Можно указать еще один подход к решению поставленной задачи для случая, когда СВ α_1, α_2 сосредоточены на разных интервалах, а в качестве известной функции принимается функция, достаточно близкая к δ -функции, существующая на интервале, близким к нулю. Известно, что

$$p_1(x) = \int_{-2a}^{2b} p_1(y)\delta(x-y)dy.$$

Результаты моделирования при известной функции $p_2(x)$, близкой к δ -функции, у которой дисперсия и пределы близки к нулю, приведены на рис. 3. На этом же рисунке приведен вид усеченного нормального закона, обеспечивающего максимальную энтропию. Чем ближе указанная функция к δ -функции, тем ближе кривая 1 к кривой 2.

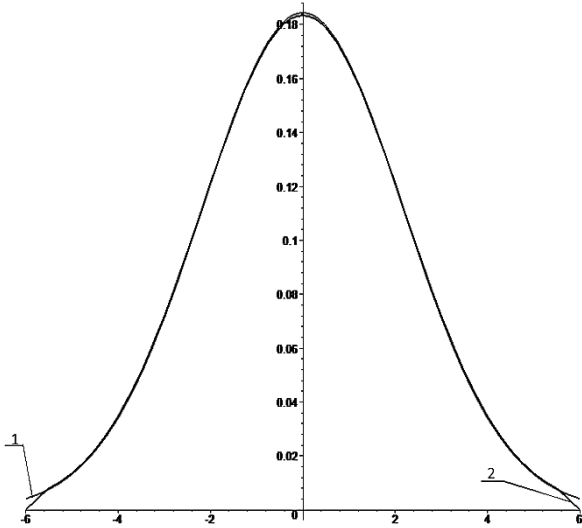


Рис. 3. Вид плотности распределения: 1 – усеченного нормального закона $p_1(x)$; 2 – свертки закона $p_1(x)$ и функции $p_2(x)$, близкой к δ -функции

Выводы и перспективы развития направления. Результаты исследований позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Необходимые условия максимума энтропии суммы двух СВ, сосредоточенных на конечных интервалах, имеющих одинаковые границы, при заданной дисперсии суммы d_γ обеспечиваются плотностями распределения слагаемых СВ, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\psi(x)}^{x} p_2(x-y)p_1(y)dy = e^{\frac{\lambda_{1i}}{\psi(x)} - 1} \cdot e^{-\frac{\lambda_{2i}x^2}{4 \int_{\psi(x)}^{x} p_i(y)dy}},$$

($i = 1, 2$),

где $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}$ – константы, определяемые из выражений

$$\int_{-a}^b p_2(x-y)p_1(y)dy = 1;$$

$$\int_{-a}^b y^2 p_2(x-y)p_1(y)dy = d_\gamma,$$

а пределы интегрирования имеют вид

$$\psi(x) = \begin{cases} -a, & x \in [-2a, b-a], \\ x-b, & x \in [b-a, 2b] \end{cases},$$

$$\phi(x) = \begin{cases} x+a, & x \in [-2a, b-a] \\ b, & x \in [b-a, 2b] \end{cases}.$$

Следствие. Необходимые условия максимума энтропии достигаются при выполнении условий

$$p_1(y) = p_2(y); \lambda_{11} = \lambda_{12}; \lambda_{21} = \lambda_{22}.$$

Сформулированная теорема позволяет определить вид плотности распределения, обеспечивающий максимум энтропии суммы двух случайных величин, сосредоточенных на конечных интервалах, при заданной суммарной дисперсии. Произведенная оценка применимости усеченного закона распределения показала возможность его использования, что значительно упрощает обработку результатов.

В дальнейшем планируется найти максимум энтропии для случая, когда функции $p_1(y), p_2(y)$ сосредоточены на интервалах с разными границами. Основная сложность данной задачи заключается в том, что пределы интегрирования ограничений не совпадают с пределами интегрирования функционала. Предлагается следующий подход, который может использоваться при решении поставленной задачи: неизвестную функцию, например $p_1(y)$, представить как сумму двух функций $p_1(y) = p_1'(y) + p_2'(y)$, причем дисперсия функции $p_2'(y)$ стремится к нулю, интервал существования функции $p_1'(y)$ $\left[-a + \frac{\delta}{2}, b - \frac{\delta}{2}\right]$, а функции $p_2'(y)$ $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$. В этом случае функцию $p_1(y)$ можно интегрировать в пределах $[-2a, 2b]$, соответствующих пределам функционала (1), причем функция Лагранжа в точках $x = -a$ и $x = b$ не даст скачка, что позволяет использовать уравнение Эйлера. Чем меньше δ , тем точнее результат. Окончательное решение может быть получено предельным переходом при $\delta \rightarrow 0$.

Список литературы / References

1. Информационно-измерительная техника и технологии / [Калашников В.И., Нефедов С.В., Путилин А.Б. и др.]; под ред. Г.Г. Ранеева. – М.: Высшая школа, 2002. – 454 с.
Kalashnikov, V.I., Nefedov, S.V., Putilin, A.B. and Raneyev, G.G. (2002), *Informatsyonno-izmeritel'naya tekhnika i tekhnologii* [Information and Measuring Equipment and Technology], Vysshaya Shkola, Moscow, Russia.
2. Анализ дифференциальной энтропии при технических измерениях в машино- и приборостроении / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.И. Балакин, О.В. Филипович // Труды Одесского политехнического университета: Научный и производственно-практический сборник по техническим и естественным наукам. – 2007. – Вып. 1(27). – С. 214–219.

Kopp, V.Ya., Skidan, A.A., Balakin, A.I. and Filipovich, O.V. (2007), "The analysis of differential entropy at technical measurements in mechanical engineering and instrument making", *Trudy Odesskogo Politehnicheskogo Universiteta: Nauchnyy i Proizvodstvenno-Prakticheskiy Sbornik po Tehnicheskim i Estestvennym Naukam*, issue 1 (27), pp. 214 – 219.

Мета. Забезпечення точності контрольно-вимірвальних операцій у машинобудуванні шляхом оцінки похибки при використанні усіченого нормального розподілу для визначення оптимального числа багаторазових вимірювань.

Методика. На підставі використання принципу максимуму ентропії та варіаційного числення отримано аналітичний вираз для виду щільності розподілу випадкової величини, зосередженої на кінцевому інтервалі за умови, що на кордонах інтервалу значення щільності дорівнюють нулю. Отриманий вид щільності надалі використовувався для оцінки похибки, що вноситься застосуванням усіченого нормального розподілу. При визначенні числа багаторазових вимірювань використовується ітераційна процедура.

Результати. Проведені дослідження довели можливість застосування усіченого нормального розподілу для оцінки числа багаторазових вимірювань. Розбіжність результатів оцінки необхідного числа вимірювань при використанні усіченого нормального розподілу та арбітражного закону, отриманого на основі досліджень, склала менше 0,5%.

Наукова новизна. Сформульована й доведена теорема дозволяє визначити вид щільності розподілу, що забезпечує максимум ентропії суми двох випадкових величин, зосереджених на кінцевих інтервалах, при заданій сумарній дисперсії.

Практична значимість. Показана можливість використання усіченого нормального розподілу, що значно спрощує обробку результатів багаторазових вимірювань.

Ключові слова: багаторазові вимірювання, максимум ентропії, щільність розподілу, похибка засобу вимірвальної техніки, граничні оцінки

Purpose. Ensuring the accuracy of measurement operations by estimating error when using the truncated normal distribution for determination of the optimal number of repeated measurements.

Methodology. On the basis of use of the principle of maximum of entropy and calculus of variations analytical expression for the form of appearances density of distribution of a random variable concentrated on a finite interval has been received provided that on borders of an interval the values of density are equal to zero. The resulting form of the density was subsequently used to estimate the error introduced by the use of the truncated normal distribution. An iterative procedure when determining the number of repeated measurements has been used.

Findings. The investigations have proved the applicability of the truncated normal distribution for estimating the number of repeated measurements. The discrepancy between the results of estimation of the required number of measurements using the truncated normal distribution and arbitration law, derived from investigations, was less than 0.5%.

Originality. We have formulated and proved the theorem which allows defining the type of density of the distribution, providing maximum of entropy of the sum of two random variables concentrated on final intervals given the set total dispersion.

Practical value. We have shown that it is possible to use the truncated normal distribution in order to simplify results processing considerably.

Keywords: repeated measurements, entropy maximum, distribution density, error of means of measuring equipment, boundary estimates

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.О. Гайським. Дата надходження рукопису 14.11.13.