

УДК 621.85.01

Н.А. Лубенец, канд. техн. наук, доц.

Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г. Днепропетровск, Украина

## ФОРМА СЕЧЕНИЯ ГИБКОГО ТЕЛА ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ПО НЕПОДВИЖНОМУ БЛОКУ

N.A. Lubenets, Cand. Sci. (Tech.)

State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine

## SECTIONAL SHAPE OF A FLEXIBLE BODY SLIDING OVER A FIXED BLOCK

**Цель.** Вывод результатов решения классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку с учетом формы сечения реального объемного гибкого тела.

**Методика.** Определяют место положения нейтрального слоя реального объемного гибкого тела с произвольной формой сечения, удлинение которого отвечает усилию продольного натяжения, и осуществляют решение задачи о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку с учетом формы сечения реального объемного гибкого тела.

**Результаты.** Установлен радиус кривизны нейтрального слоя гибкого тела вдоль линии контакта с блоком, удлинение которого адекватно усилию продольного натяжения – слоя, по которому действует равнодействующая усилия натяжения гибкого тела. Составлено дифференциальное уравнение равновесия силы трения, усилия натяжения гибкого тела и получено новое решение классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку.

**Научная новизна.** Впервые обоснована количественная модель реального объемного гибкого тела, включающая определение радиуса кривизны нейтрального слоя, по которому действует равнодействующая усилия натяжения, и выведены результаты решения классической задачи Эйлера о скольжении по неподвижному блоку, которое учитывает закон сохранения механической энергии и современные знания о трении твердых тел.

**Практическая значимость.** Количественно вносится поправка к новому решению задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку с учетом формы сечения реального гибкого тела. Полученные знания обогащают представления о трении объемных гибких тел.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, блок, натяжение, сечение гибкого тела, трение, коэффициент трения, сохранение энергии, средняя линия, угол обхвата

**Постановка проблемы.** Различными исследователями были предприняты попытки учета влияния геометрических размеров гибкого тела в решении задачи о его скольжении по неподвижному блоку. Однако они не принесли ожидаемого результата, отчасти, из-за недостаточного обоснования модели гибкого тела и ошибочного общего метода решения классической задачи Эйлера [1]. Поэтому, до недавнего времени в мире было принято известное решение Эйлера в задаче о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку (закон трения гибких тел Эйлера, уравнение трения гибких тел Эйлера или формула Эйлера), из-

вестное с 1775 года, причем оно не подвергалась сомнению.

Однако решение Эйлера на сегодняшний день не является достаточно точным, поскольку оно не отвечает принципу сохранения механической энергии, современным знаниям о трении твердых тел и не учитывает влияние формы сечения гибкого тела.

**Нерешенная проблема.** При решении известной задачи учеными принималась модель объемного гибкого тела, когда при обхвате блока гибким телом его внешние и внутренние слои растягиваются и сжимаются относительно средней линии.

Используемая модель при расчете логична. Однако она требует количественного обоснования в связи с тем,

что в практике используются различные гибкие тяговые органы, например, трос, конвейерная лента, клиновой ремень и т. д., которые имеют различную конструкцию, форму поперечного сечения и свойства конструкционных материалов.

Следовательно, для правильного вывода результатов решения задачи Эйлера о скольжении реального гибкого тела по неподвижному блоку, прежде всего, необходимо обосновать модель гибкого тела, учитывающую форму сечения, конструкцию и свойства конструкционных материалов.

**Цель работы.** Вывод результатов решения классической задачи Эйлера о скольжении реального гибкого тела по неподвижному блоку с учетом формы сечения реального гибкого тела.

**Изложение основного материала.** Для обоснования расчетной модели и последующего решения задачи Эйлера в первую очередь установим влияние формы сечения реального объемного кольцеобразного замкнутого гибкого тела, ограничивающего различную фигуру в некоторой плоскости, на его периметр.

Можно предположить, что при отсутствии продольного натяжения объемного кольцеобразного замкнутого гибкого тела круглого сечения, произвольно расположенного на горизонтальной плоскости, его периметр по средней линии не зависит от формы фигуры, которую принимает гибкое тело. При наличии продольного натяжения, периметр кольцеобразного гибкого тела по средней линии изменяется, подчиняясь законам напряженно-деформированного состояния для линейно-деформируемого гибкого тела.

Приведем расчетную схему функционирования кольцеобразного гибкого тела в транспортной машине, например в конвейере. Расчетная схема ориентирована в вертикальной плоскости для того, чтобы исключить ошибку, обусловленную различным провисанием гибкого тела в набегающем и сбегающем с барабана участках в режиме тяги, рис. 1.

Расчетная схема исключает дополнительные локальные деформации гибкого тела в месте контакта с барабаном и не предусматривает проскальзывание между телами. Гибкое тело в пределах угла обхвата с барабаном принимает его форму (радиусы кривизны внутреннего и внешнего слоев гибкого тела соответствуют концентрическим окружностям, причем радиус кривизны внутреннего периметра равен радиусу барабана). При этом диаметр барабана приводной станции ( $d$ ) во много раз больше толщины сечения кольцеобразного гибкого тела ( $t$ ).

Построим математическую модель измерения периметра внутреннего слоя кольцеобразного гибкого тела методом обкатывания барабана. Метод измерения прост в реализации и нашел широкое применение при контроле геометрических размеров в машиностроении и производстве резинотехнических изделий. Сущность метода состоит в том, что измеряют длину внутреннего периметра кольца, обкатывая его барабаном за один оборот кольца. Один оборот кольца контролируют визуальной меткой на гибком теле.

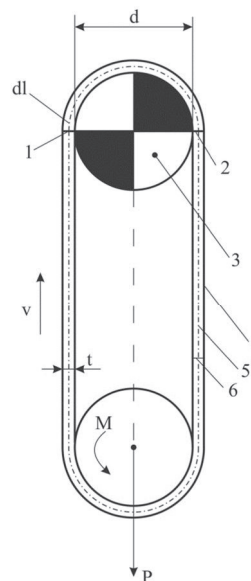


Рис. 1. Расчетная схема функционирования кольцеобразного гибкого тела в транспортной машине: 1 – сечение гибкого тела в точке набегающей; 2 – сечение гибкого тела в точке сбегающей; 3 – барабан приводной станции; 4 – гибкое тело; 5 – линия действия равнодействующей натяжения гибкого тела; 6 – визуальная метка на гибком теле;  $d$  – диаметр барабана;  $t$  – толщина кольцеобразного гибкого тела;  $dl$  – элементарный участок гибкого тела в точке набегающей на барабан;  $v$  – поступательная скорость движения гибкого тела;  $M$  – тормозной момент на оси барабана натяжной станции;  $P$  – усилие натяжения гибкого тела

При обкатывании кольцеобразного гибкого тела приводным барабаном, гибкое тело по нейтральному слою удлиняется, его наружные слои еще больше растягиваются, а внутренние сжимаются. Степень растяжения и сжатия внешнего и внутреннего слоев кольца зависит от конструкции и формы сечения гибкого тела, модулей упругости конструкционных материалов, из которых состоит кольцо, а также усилия продольного натяжения.

Полагая, что модули упругости изотропного гибкого тела из резины при растяжении и сжатии равны и пренебрегая неодинаковой поперечной деформацией наружного и внутреннего слоев, а сечение однородного кольцеобразного гибкого тела симметрично, можно прогнозировать, что нейтральный слой, по которому действует равнодействующая натяжения гибкого тела, будет совпадать со средней линией.

Поэтому измеряемый периметр кольцеобразного гибкого тела круглого сечения по средней линии за один цикл измерения (один оборот кольца) будет равен (единицы измерения выбраны в системе СИ)

$$l_{cp} = (d + t) \cdot \pi \cdot n,$$

где  $l_{cp}$  – периметр кольцеобразного гибкого тела по средней линии;  $d$  – диаметр барабана;  $n$  – количество

оборотов барабана за один оборот кольцеобразного гибкого тела;  $t$  – толщина кольцеобразного гибкого тела.

Однако, действительный периметр кольцеобразного гибкого тела по средней линии (периметр неподвижного кольца, расположенного горизонтально) отличается от измеренного периметра, так как сказывается удлинение гибкого тела от усилия его натяжения и собственного веса. В точке набегания на барабан наблюдается сцепление уже удлиненного вследствие натяжения гибкого тела, относительно которого сечение указанного тела неподвижно. В других точках линии контакта – происходит смещение сечения гибкого тела или изменение его положения относительно барабана в пределах угла покоя за счет деформации сдвига материала гибкого тела [2].

Следовательно, для определения периметра кольцеобразного гибкого тела по средней линии необходимо учесть удлинение, которое накапливается за один оборот кольца и зависит от натяжения гибкого тела в точке набегания на барабан.

Итак, при обкатывании гибкого тела по барабану его элементарный участок в точке набегания на барабан, входящий в контакт с поверхностью барабана (будучи удлиненным), перемещается синхронно с барабаном. Затем, в пределах линии контакта с барабаном, за счет уменьшения натяжения, гибкое тело сжимается и его сечение смещается относительно барабана в сторону противоположную движению кольца.

Поэтому удлинение элементарного участка линейно-деформируемого гибкого тела в точке набегания по средней линии, в соответствии с законом Гука, будет равно

$$\Delta dl_{\text{нб}} = \frac{\sigma \cdot dl}{E} = \frac{S_1 + qgl_0}{E \cdot F} dl = \frac{S_1 + qg \frac{l_{\text{нб}} - (d+t) \cdot \pi}{2}}{E \cdot F} dl = \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot g \cdot (d+t) \cdot \pi \cdot (n-1)}{2 \cdot F \cdot E} \cdot dl,$$

где  $\Delta dl_{\text{cp}}$  – удлинение элементарного участка гибкого тела по средней линии;  $\sigma$  – продольное напряжение в гибком теле;  $dl$  – элементарный участок гибкого тела в точке набегания на барабан;  $E$  – модуль Юнга материала гибкого тела;  $S_1$  – усилие натяжения гибкого тела в точке набегания;  $F$  – площадь сечения гибкого тела;  $q$  – линейная масса гибкого тела;  $l_0$  – длина участка набегания гибкого тела;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Следовательно, удлинение гибкого тела по средней линии за один оборот кольца, соответственно, составляет

$$\Delta l_{\text{cp}} = \int \Delta dl_{\text{cp}} = \int_0^{l_{\text{cp}}} \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot g \cdot (d+t) \cdot \pi \cdot (n-1)}{2 \cdot F \cdot E} dl = \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot g \cdot (d+t) \cdot \pi \cdot (n-1)}{2 \cdot F \cdot E} \times \int_0^{l_{\text{cp}}} dl = \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot g \cdot (d+t) \cdot \pi \cdot (n-1)}{2 \cdot F \cdot E} \cdot l \int_0^{(d+t)\pi \cdot n} = \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot g \cdot (d+t)^2 \cdot \pi^2 \cdot (n-1) \cdot n}{2FE}.$$

Тогда периметр измеряемого кольцеобразного гибкого тела по средней линии за один цикл измерения (оборот кольцеобразного гибкого тела) будет равен

$$L_{\text{нб}} = l_{\text{нб}} - \Delta l_{\text{нб}} = (d+t) \cdot \pi \cdot n - \frac{2 \cdot S_1 + q \cdot (d+t)^2 \cdot \pi^2 \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot F \cdot E}.$$

Экспериментальное подтверждение метода измерения периметра кольцеобразного гибкого тела методом обкатывания барабана осуществляли устройством для измерения диаметра кольцеобразного резинового кольца круглого сечения, рис. 2.

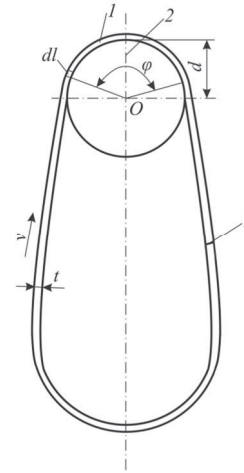


Рис. 2. Расчетная схема устройства для измерения диаметра кольцеобразного резинового кольца круглого сечения методом обкатывания барабана: 1 – резиновое кольцо; 2 – барабан; 3 – визуальная метка

При этом натяжение резинового кольца осуществлялось только за счет собственного веса. Один оборот измеряемого кольца контролировали с помощью визуальной метки и фоточувствительного элемента (на рис. 2 не показаны). Измерение толщины сечения кольца осуществляли толщиномером типа ТР-10.

Действительный диаметр кольца определяли прямым методом с использованием катетометра КМ-8 в соответствии с фундаментальным свойством выпуклой фигуры – периметр произвольной выпуклой фигуры равен произведению ее средней ширины на число  $\pi$ , а также с учетом влияния количества направлений измерения и коэффициента формы выпуклой фигуры на погрешность измерения. Измерение ширины кольца осуществляли в четырех направлениях (ширина фигуры – расстояние между параллельными линиями, заключающими выпуклую фигуру; угол между смежными направлениями измерения ширины фигуры равен числу  $\pi$ , деленному на количество направлений измерения). Перед измерением кольцу придавали форму, близкую к окружности (коэффициент формы такой выпуклой фигуры – отношение квадрата периметра фигуры к площади, которую она ограничивает, был близок к значению  $4\pi$ ) и наклеивали его на планшет.

Измерениям подвергались резиновые кольца круглого сечения в диапазоне от 100 до 500 мм, диаметр барабана составлял 80 мм. Угол обхвата барабана резиновым кольцом обеспечивался прижимными роликами (на рис. 2 не показаны) и составлял 120°. Результаты измерения диаметров резиновых колец при этом были занижены (присутствовала отрицательная систематическая ошибка) и погрешность измерения достигала 0,25%. Это обстоятельство объясняется превышением радиуса кривизны нейтрального слоя несжимаемого резинового кольца вдоль линии контакта с барабаном (коэффициент Пуассона резины близок к значению 0,5) над радиусом кривизны средней линии. Поэтому погрешность измерения диаметра кольца может быть уменьшена введением поправки.

Возможность практического использования построенной математической модели была реализована при создании прибора для измерения диаметров резиновых колец. Прибор был защищен авторскими свидетельствами СССР и удостоен бронзовой медали ВДНХ СССР в 1983 г.

Таким образом, исследованиями установлено, что при изгибе несжимаемого гибкого тела круглого сечения радиус кривизны нейтрального слоя больше радиуса кривизны средней линии, а при действии продольного натяжения – тело удлиняется вдоль нейтрального слоя, подчиняясь законам напряженно-деформированного состояния для линейно-деформируемого гибкого тела.

Однако, гибкие тяговые органы, как известно, имеют различную конструкцию, свойства конструктивных материалов и форму поперечного сечения. Поэтому, для них и подавно можно ожидать то, что при изгибе радиус кривизны нейтрального слоя не будет равен радиусу кривизны средней линии. Сформулируем общую закономерность для реального гибкого тягового органа произвольной конструкции и формы сечения.

При изгибе и продольном натяжении кольцеобразного гибкого тела произвольной конструкции и формы поперечного сечения радиус кривизны нейтрального слоя не равен радиусу кривизны средней линии, а удлинение по нейтральному слою (по которому действует равнодействующая усилия натяжения гибкого тела) подчиняется законам напряженно-деформированного состояния для линейно-деформируемого гибкого тела.

Это свойство позволяет определить местоположение нейтрального слоя гибкого тела с различной формой поперечного сечения и конструкцией при скольжении по блоку, а именно, установить кривизну нейтрального слоя, по которой действует равнодействующая усилия натяжения гибкого тела в области контакта с блоком.

Следовательно, при скольжении объемного гибкого тела по неподвижному блоку, момент силы трения на элементарном участке гибкого тела уравновешивается моментом от силы его натяжения

$$r \cdot dF + \rho \cdot S(\alpha) - \rho \cdot [S(\alpha) + dS] = 0,$$

где  $\rho$  – радиус нейтрального слоя гибкого тела скользящего по неподвижному блоку;  $r$  – радиус барабана;  $S(\alpha)$

– функция натяжения гибкого тела, заданная в полярной системе координат, от полярного угла  $\alpha$ ;  $dS$  – приращение усилия натяжения гибкого тела на элементарном участке гибкого тела;  $dF$  – приращение силы трения между элементарным участком гибкого тела и барабаном.

Откуда

$$r \cdot dF = \rho \cdot dS .$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений равновесия гибкого тела в области линии контакта при скольжении по блоку, отвечающая закону сохранения механической энергии, действующим представлениям Кулона о трении твердых тел, учитывающая форму сечения гибкого тела, представляется так [1]

$$\begin{cases} dN = Sda - qv^2 da \\ \rho dS = rdF \\ dF = \frac{F_c}{\varphi} da + tg\beta dN \\ \frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\partial (\int_0^{\varphi} S(a, \mu) da)}{\partial \mu} = 0 \end{cases} ,$$

где  $dN$  – приращение нормальной реакции между элементарным участком гибкого тела и барабаном;  $da$  – элементарный угол обхвата барабана, соответствующий элементарному участку гибкого тела длиной  $dl$ ;  $v$  – скорость движения гибкого тела;  $\mu$  – коэффициент скольжения между гибким телом и барабаном;  $F_c$  – сила трения между гибким телом и барабаном при нормальной реакции между телами равной нулю;  $tg\beta$  – тангенс угла наклона зависимости силы трения от нормальной реакции между телами.

Теперь осуществим вывод результатов решения поставленной задачи, учитывающих форму сечения гибкого тела.

Промежуточным решением трех первых уравнений равновесия полученной системы будет следующее

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{r} dS &= \frac{F_c}{\varphi} da + tg\beta(S - qv^2) d\alpha ; \\ \frac{\rho}{r} \int_{S_2}^{S_1} dS &= \int_0^{\varphi} (\frac{F_c}{\varphi} + tg\beta(S - qv^2)) d\alpha ; \\ \frac{\rho}{r} (S_1 - S_2) &= F_c + tg\beta \int_0^{\varphi} (S - qv^2) d\alpha = F_c + tg\beta (\int_0^{\varphi} S da - qv^2 \varphi). \end{aligned}$$

Из четвертого уравнения системы дифференциальных уравнений – условия равновесия натяжения гибкого тела в области контакта с блоком, отвечающего закону сохранения механической энергии при скольжении гибкого тела, следует, что натяжение гибкого тела в пределах линии контакта гибкого тела и блока может быть представлено линейной функцией [1]



$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2,$$

где  $S_1$  – натяжение в сбегающей с блока ветви гибкого тела;  $S_2$  – натяжение в набегающей ветви гибкого тела.

Отсюда промежуточный интеграл, указанный выше, и нормальная реакция между телами составляет [1]

$$\int_0^{\varphi} S(\alpha) \cdot d\alpha = \int_0^{\varphi} \left( \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2 \right) \cdot d\alpha = \left( \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \frac{\alpha^2}{2} + S_2 \cdot \alpha \right) \Big|_0^{\varphi} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2};$$

$$N = \int_0^N dN = \int_0^{\varphi} (S(a) - q \cdot v^2) \cdot da = \varphi \cdot \left( \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} \right).$$

Поэтому, при использовании параметров трения  $F_c$  и  $tg\beta$ , введенных Кулоном, решением приведенной системы дифференциальных уравнений будет такое

$$\frac{\rho}{r}(S_1 - S_2) = F_c + tg\beta \left( \varphi \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right) = F_c + tg\beta \cdot N = F.$$

В случае использования в выражении коэффициента трения, введенного Амонтоном (Леонардо да Винчи), получим

$$\frac{\rho}{r}(S_1 - S_2) = \left( \frac{F_c}{N} + tg\beta \right) N = \mu N = \mu \varphi \left( \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right)$$

или

$$\frac{2\rho(S_1 - S_2)}{r(S_1 + S_2 - 2qv^2)} = \varphi\mu - const.$$

В таблице приведена сравнительная оценка фрикционных свойств конвейерной ленты и барабана по известному и новому решению задачи Эйлера с учетом и без учета формы ее сечения при скольжении (сухой/влажной) и сцеплении (сухой). Условия испытаний таковы: ширина конвейерной ленты – 0,490 м; толщина конвейерной ленты ( $h$ ) – 0,010 м; погонная масса конвейерной ленты ( $q$ ) – 7,6 кг/м; суммарное усилие натяжения конвейерной ленты ( $S_1 + S_2$ ) – 3110 Н; угол обхвата барабана конвейерной лентой ( $\varphi$ ) – 3,14 рад; радиус барабана ( $r$ ) – 0,112 м; скорость относительного движения ленты и барабана ( $v$ ) при скольжении (сцеплении) – 1 м/с (0 м/с).

Анализ данных показал, что действительный коэффициент трения при скольжении впервые определяли прямым методом как отношение силы трения между лентой и барабаном к нормальной реакции между телами. Расчетное значение коэффициента трения конвейерной ленты по новому решению задачи до 17% ниже в сравнении с решением Эйлера и снижается при увлажнении и сцеплении пары трения. С учетом формы сечения ленты коэффициент трения по новому решению задачи Эйлера на 4% выше значения, определенного без ее учета. За действительный коэффициент трения при сцеплении принимали отношение неполной силы тре-

ния между лентой и барабаном к нормальной реакции между телами.

Таблица

Сравнительная оценка фрикционных свойств конвейерной ленты и барабана с учетом и без учета ее формы сечения

№	Условия испытаний	Скорость отн. движения, $v$ , м/с	Силы натяжения $S_1/S_2$ , Н	Действительная сила трения $F_{дв}$ , Н	Фрикционные характеристики					
					по решению Эйлера		по новому решению задачи (с учетом формы / без учета формы)			
					Нормальная реакция $N$ , Н ( $S_2 - qv^2$ ) ( $e^{\varphi\mu} - 1$ ) / $\mu$	Сила трения $F$ , Н ( $S_2 - qv^2$ ) ( $e^{\varphi\mu} - 1$ )	Фиктивный коэффициент трения $\mu'$ $\ln((S_1 - qv^2) / (S_2 - qv^2)) / \varphi$	Нормальная реакция $N$ , Н $\varphi (S_1 + S_2 - 2qv^2) / 2$	Сила трения $F$ , Н $r\mu\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2) / 2r / \mu\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2) / 2$	Коэффициент трения $\mu$ $2\rho(S_1 - S_2) / r\varphi (S_1 + S_2 - 2qv^2) / 2(S_1 - S_2) / \varphi (S_1 + S_2 - 2qv^2)$
1	1	2560/550	2100	3169	1372	0,528	4644	2099 / 2011	0,452 / 0,433	
2	1	1930/1180	783	4511	726	0,165	4644	784 / 748	0,169 / 0,161	
3	0	2460/650	1891	3536	1379	0,453	4644	1890 / 1811	0,407 / 0,390	
4	0	1870/1240	658	4559	620	0,138	4644	659 / 632	0,142 / 0,136	

Сила трения, возникающая между парой трения, рассчитанная по новому решению задачи, практически совпадает с ее действительным значением и до 35% выше в сравнении с решением Эйлера, а также снижается при увлажнении и сцеплении пары трения. С учетом формы сечения ленты, для нового решения задачи сила трения на 5% выше значения, определенного без ее учета.

Кроме того, по новому решению задачи Эйлера, в сравнении с известным решением, нормальная реакция между лентой и барабаном до 32% выше и не зависит ни от режима трения между телами, ни от формы сечения ленты.

**Выводы.** Впервые обоснована модель реального объемного гибкого тела с различной формой сечения, включающая определение значения радиуса кривизны нейтрального слоя, по которому направлена равнодействующая усилия натяжения гибкого тела.

Выведены результаты решения классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку, учитывающие закон сохранения механической энергии, действующие представления Кулона о трении твердых тел и форму сечения гибкого тела.

Данные эксперимента свидетельствуют о значительном отличии коэффициента трения, силы трения и нормальной реакции между сухой конвейерной лентой и барабаном по новому решению задачи в сравнении с решением Эйлера, которое достигает  $-17$ ,  $+35$  и  $+32\%$  соответственно. Различия во фрикционных характеристиках трения уменьшаются при увлажнении пары трения, а влияние формы сечения гибкого тела для нового решения задачи Эйлера не превышает  $5\%$ .

### Список литературы / References

1. Лубенец Н.А. Влияние центробежных сил гибкого тела на реализацию тягового усилия трением / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2012. – № 5. – С. 28–33.

Lubenets N., Lubenets T. (2012), "Effect of centrifugal forces of a flexible body on traction friction implementation", *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, no.5, pp. 28–33.

2. Кирия Р.В. Применение метода возмущений Л. Прандтля к разрешению парадокса Н.Е. Жуковского / Р.В. Кирия, Е.А. Стаховский // Системні технології. – Днепропетровск, 2002. – № 4 (21). – С. 33–46.

Kiriya R.V. and Stakhovsky, Ye.A. (2002), "The use of the perturbation method of L. Prandtl to resolve the paradox of N.Ye. Zhukovsky", *Systemni Tekhnolohii, Dnepropetrovsk*, no. 4(21), pp. 33–46.

**Мета.** Виведення результатів вирішення класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по нерухомому блоку з урахуванням форми перетину реального об'ємного гнучкого тіла.

**Методика.** Визначають місце положення нейтрального шару реального об'ємного гнучкого тіла з довільною формою перетину, подовження якого відповідає зусиллю подовжнього натягування, і здійснюють розв'язання задачі про ковзання гнучкого тіла по нерухомому блоку з урахуванням форми перетину реального об'ємного гнучкого тіла.

**Результати.** Встановлено радіус кривизни нейтрального шару гнучкого тіла вздовж лінії контакту з блоком, подовження якого адекватне зусиллю подовжнього натягування – шару, за яким діє рівнодіюча зусилля натягування гнучкого тіла. Складене диференціальне рівняння рівноваги сили тертя, зусилля натягування гнучкого тіла та отримане нове розв'язання класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по нерухомому блоку.

**Наукова новизна.** Уперше обґрунтована кількісна модель реального об'ємного гнучкого тіла, що включає визначення радіуса кривизни нейтрального шару, за яким діє рівнодіюча зусилля натягування, і виведені результати розв'язання класичної задачі Ейлера про ковзання по нерухомому блоку, що враховує закон збереження механічної енергії та сучасні знання про ковзання твердих тіл.

**Практична значимість.** Кількісно вноситься поправка до нового розв'язання задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по нерухомому блоку з урахуванням форми перетину реального гнучкого тіла. Отримані знання збагачують уявлення щодо ковзання об'ємних гнучких тіл.

**Ключові слова:** диференціальне рівняння, блок, натяг, перетин гнучкого тіла, тертя, коефіцієнт тертя, збереження енергії, середня лінія, подовження, кут обхвату

**Purpose.** To derive a solution of classical Euler problem about a flexible body sliding over a fixed block taking into account the cross-sectional shape of the real flexible solid body.

**Methodology.** We determined the location of the neutral layer of the real flexible solid body of an arbitrary shape of cross-section, extended in the dimension of longitudinal stress application and solved a flexible body sliding over a fixed block taking into account the shape of cross-section of the real flexible solid body.

**Findings.** We set the radius of curvature of the neutral layer of the flexible body along the line of contact with the block, extended along longitudinal tension force. The layer of the flexible body influenced by the resultant tension force. We derived the differential equation of equilibrium of the friction force, tension force of the flexible body and obtained a new solution of the classical Euler problem about a flexible body sliding over a fixed block.

**Originality.** For the first time, we substantiated the quantitative model of the real flexible solid body, including the definition of the radius of curvature of the neutral layer influenced by the resultant tension force of the flexible body. The research presents the solution of the classical Euler problem about a flexible body sliding over a fixed block considering the law of conservation of mechanical energy and current knowledge on solids friction.

**Practical value.** Quantitatively, we introduced the amendment to the solution of the Euler problem about a flexible body sliding over a fixed block considering the real shape of the section of the flexible body. The knowledge gained contribute to the understanding of the process of friction of flexible solid bodies.

**Keywords:** differential equation, block, tension, cross section of a flexible body, friction, coefficient of friction, conservation of energy, middle line, extension, wrap angle

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.В. Процівом. Дата находження рукопису 11.09.14.