http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/vsunud/2009-6E/09kvvkpa.htm. – Заголовок з титулу екрана.
4. Захарова О. В. Система показників трудового потенціалу промислового підприємства / О. В. Захарова, А. О. Островська // Научные труды ДонНТУ : зб. наук. пр. / Донецький нац. ун-т. – Донецк, 2005. – Вип. 100–1. – С. 37–45.
5. Стец І. Проблеми формування та оцінювання трудового потенціалу підприємства / І. Стец // Економічний аналіз. – 2008. – № 19. – С. 240–243.
6. Управління розвитком трудового потенціалу підприємства : монографія / В. М. Гриньова, М. М. Новікова, В. В. Самоленко, В. Л. Смолюк та ін. – Х. : ХНЕУ, 2009. – 256 с.
7. Фатхутдинов Р. А. Конкурентоспособность организации в условиях кризиса / Р. А. Фатхутдинов. – М. : Маркетинг, 2001. – 892 с.
8. Бачевський Б. Є. Потенціал і розвиток підприємства : навч. посіб. / Б. Є. Бачевський, І. В. Заблодська. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 400 с.
9. Дмитренко Г. Мотивация и оценка персонала : учеб. пособие / Г. Дмитренко. – К. : МАУП, 2002. – 245 с.

УДК 519.85

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ: МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ

Є. М. Ємець, кандидат фізико-математичних наук;
О. О. Ємець, доктор фізико-математичних наук;
Т. О. Парфьонова; Т. В. Чілікіна

Розвиток економіко-математичного моделювання, обумовлений потребами економічної практики, пов’язаний, зокрема, з останніми досягненнями в теорії дискретної та комбінаторної оптимізації [1–8]. Серед задач комбінаторної оптимізації виділяються так звані задачі евклідової комбінаторної оптимізації [2–8], серед яких значне місце посідають задачі на переставних множинах [2–6, 8].

Як відомо, універсальним методом розв’язування задач оптимізації є метод гілок і меж (МГМ). У працях [9–11] МГМ поширено для лінійних задач евклідової комбінаторної оптимізації. Для нелінійних задач умовної комбінаторної оптимізації на переставленнях застосування МГМ вимагає розробки процедур оцінювання допустимих множин.

У статті обґрунтовані правила оцінювання допустимих підмножин у МГМ для мінімізації на переставленнях нелінійних цільових функцій.

Розглянемо задачу:

$$f^0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f^i(x) \le 0,\ i \in J_m, \tag{2}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_{k\nu}(G), \tag{3}$$

де серед функцій $f^0(x)$, $f^i(x)$, $(i \in J_m = \{1, 2, \dots, n\})$, є хоч одна нелінійна функція, $E_{k\nu}(G)$ – множина переставлень з k елементів, серед яких ν різних, з мультимножини G.

Відомо [2], що задача (1)–(3) – це задача умовної нелінійної повністю комбінаторної оптимізації на переставленнях.

Розглянемо випадок, коли в цільовій функції є лінійна частина, тобто

$$f^0(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i + \varphi(x), \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ – нелінійна функція.

Якщо до задачі (1)–(4) застосувати метод гілок та меж, то треба з'ясувати два питання:

1) як галузити множину допустимих розв'язків, що задається (2), (3);

2) як давати оцінку допустимих підмножин у дереві галуження.

Як відомо (з теореми 3.1 [2, с. 79–80] та зауваження 3.3 [2, с. 82–84] до неї), для

$$x^* = \left(x_1^*, \dots, x_m^*\right) = \arg\min_{x \in E_{kv}(G)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \qquad (5)$$

$$x_i^* = g_i,\ \forall i \in J_k, \qquad (6)$$

де $c_1 \ge \dots \ge c_k$, (7)

$$g_1 \le \dots \le g_k. \qquad (8)$$

Розглянемо підхід до оцінювання в МГМ, що викладено у працях [9, 10], до задач з цільовою функцією (4).

Відомо [9, 10], що оцінка $\xi(D)$ допустимої підмножини $D \subset X$ у задачі мінімізації функції $F(x)$, $x \in X$ повинна задовольняти умову:

$$\xi(D) \le F(x) \quad \forall x \in D. \qquad (9)$$

Лема 1. Якщо $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дійснозначні функції з R^k в R^1, $X \subset R^k$, то

$$f_1(x) + f_2(x) \ge \min_{x \in X}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] \ge$$
$$\ge \min_{x \in X} f_1(x) + \min_{x \in X} f_2(x).$$

Доведення. За означенням мінімуму

$$f_1(x) + f_2(x) \ge \min_{x \in X} f_1(x) + f_2(x) \ge$$
$$\ge \min_{x \in X} f_1(x) + \min_{x \in X} f_2(x).$$

Нерівність справедлива для будь-яких x у лівій частині, а отже, і для тих значень, для яких ліва частина набуває значення мінімуму.

Зауважимо, що часто в (2) маємо

$$f^i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k - b_i, \qquad (10)$$

а нерівність у (2) легко зводиться до рівності.

З леми 1 та властивості оцінки (9) випливає, що, даючи оцінку відповідній допустимій множині, в (4) можна використовувати оцінки кожного з доданків.

Лема 2. Якщо $E_\varphi \subset E$, то для функції $\varphi(x)$

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \le \min_{x \in E_\varphi} \varphi(x). \qquad (11)$$

Доведення. Якщо

$$x^* = \arg\min_{x \in E} \varphi(x) \in E_\varphi, \qquad (12)$$

то $x^* = \arg\min_{x \in E_\varphi} \varphi(x)$, тобто в (11) досягається рівність. Якщо (12) не виконується, то це означає, що $\min_{x \in E} \varphi(x) < \min_{x \in E_\varphi} \varphi(x)$.

Таким чином, в обох випадках нерівність (11) справедлива, що і треба було довести.

Розглянемо МГМ до задачі (1)–(4). Множину допустимих розв'язків $D \subset R^k$ визначимо як множину, що задовольняє умовам (2), (3).

Підмножини $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r} \subset D$ утворюються таким природнім підходом до галуження в методі гілок і меж до задачі (1)–(4).

Умова (3) означає, що $x = (x_1, \dots, x_k)$ є переставленням чисел (взагалі кажучи, дійсних чисел) $g_1, \dots, g_k$. Нехай, не обмежуючи загальності, виконується (8).

Тому за підмножину множини D можемо розглянути множину

$$D_t^\tau = \left\{x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k \,\middle|\, x_\tau = g_t\right\}, \qquad (13)$$

якщо вона не порожня, де $\tau \in J_k$.

Непорожню множину $D_{i_1}^{\tau_1}$ вигляду (13), якщо вона містить принаймні два елементи, можна розгалузити на підмножини $D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2}$, $t \in J_{k-1}$,

$$D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2} = \left\{x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k \,\middle|\, x_{\tau_1} = \right.$$
$$\left. = g_{i_1}, x_{\tau_2} = g_t, \tau_1 \ne \tau_2, t \ne i_1\right\}.$$

На $(r+1)$-му рівні аналогічного розбиття допустимої множини матимемо $r \le k-1$ (14)

Оцінкою $\xi^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ лінійної частини цільової функції (1), (4) для множини $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ може слугувати величина $\xi^{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r}_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$, що обчислюється як показано в [12].

Оцінка для нелінійної частини в (1), (4) може бути дана за методологією п. 3.3 роботи [2, с. 111–142] для різних класів функцій. Оцінку всієї множини $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ позначимо $\xi\left(D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}\right)$.

Нехай $E_{k\nu}(G)$ – множина переставлень з (3), $M \subset R^k$, $\operatorname{int} M$ – внутрішність M.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на скінченій замкненій множині $X \subset R^k$; $E_{k\nu}(G) \subset X$, то

$$\xi\left(D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}\right) = \xi^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} + \varphi(y) -$$

$$-\left(p(y), y\right) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y) g_i, \qquad (15)$$

де $y \in \operatorname{int} X$ – довільна точка;

$p(y) = \left(p_1(y), \ldots, p_k(y)\right)$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y;

$\left(p(y), y\right)$ – скалярний добуток векторів $p(y), y$, виконується (8) та

$$p_{j_1}(y) \ge p_{j_2}(y) \ge \ldots \ge p_{j_k}(y). \qquad (16)$$

Доведення. Оцінка повинна задовольняти умову (9), тобто $\forall x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$.

$$f^0(x) \ge \xi\left(D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}\right), \qquad (17) \text{ за } (4)$$

$$f^0(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \varphi(x). \qquad (18)$$

Для $\forall x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ge \xi^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}. \qquad (19)$$

За лемою 3.29 з [2, с. 79–80], у якій $E = E_{k\nu}(G)$,

$$\min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \ge \varphi(y) -$$

$$-\left(p(y), y\right) + \min_{x \in E_{k\nu}(G)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i. \qquad (20)$$

Мінімум у (20) знаходимо за теоремою 3.1 [2, с. 79–80] при $\eta = k$, $n = \nu$. З (20) маємо $\forall y \in \operatorname{int} X$ за умови (16) та (8):

$$\min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \ge \varphi(y) - \left(p(y), y\right) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y) g_i. \quad (21)$$

Оскільки $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} \subset E_{k\nu}(G)$, то за лемою 2

$$\min_{x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}} \varphi(x) \ge \min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x). \qquad (22)$$

Отже, $\forall x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$

$$\varphi(x) \ge \min_{x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}} \varphi(x). \qquad (23)$$

З (21)–(23), (18) та (19) маємо: $\forall x \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$

$$f^0(x) \ge \xi^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r} + \varphi(y) -$$

$$-\left(p(y),\ y\right) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y)\, x_i, \qquad (24)$$

Отже, права частина формули (24) може виступати оцінкою $\xi\left(D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}\right)$ (формула (5)), що і треба було довести.

Теорема 2. Якщо при виконанні умов теореми 1 функція $\varphi(x)$ – диференційовна на множині X, то

$$\xi\left(D^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}\right) = \xi^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r} + \varphi(y) -$$

$$-\left(\nabla\varphi(y), y\right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}} g_i, \qquad (25)$$

де $\nabla\varphi$ – градієнт функції $\varphi(x)$, точка $y \in \operatorname{int} X$ – довільна, а координати градієнта, що обчислені в задовольняють нерівності

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_1}} \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_2}} \ge \ldots \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_k}}. \qquad (26)$$

Доведення. Теорема 2 є наслідком теореми 1, коли $p(y)=\nabla\varphi(y)$.

Розглянемо можливість одержання оцінки, коли $\varphi(x)$ у представленні цільової функції (4) є сильно опуклою функцією.

Відомо [13], що функцію $\varphi(x)$, яка задана на деякий множині X, називають сильно опуклою, якщо існує стала $\rho>0$ така, що $\forall x,y\in X$ таких, що $[x,y]\subset X$, і $\forall\alpha\in[0;1]$ виконується нерівність

$$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha\varphi(x)+$$
$$+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2,$$

при цьому ρ називають параметром сильної опуклості.

Нехай $E_{n\nu}(G)\subset X$. Позначимо w – точку, існування та єдність якої показані в [14], яка є мінімаллю сильно опуклої функції $\varphi(x)$ на множині X:

$$w=(w_1,\ldots,w_k)=\arg\min_{x\in X}\varphi(x). \qquad (27)$$

Теорема 3. Якщо функція $\varphi(x)$ в (4) сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$; $E_{n\nu}(G)\subset X$, то оцінкою $\xi\left(D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1i_2\ldots i_r}\right)$ множини $D^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}$ у МГМ для задачі (1)–(4) може бути величина

$$\xi\left(D^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}\right)=\xi^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}+\varphi(w)+$$
$$+\rho\sum_{i=1}^{k}g_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}w^2-2\rho\sum_{i=1}^{k}w_{j_i}g_i, \qquad (28)$$

де $\xi^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}$ обчислюється як і в теоремах 1, 2, точка w означається формулою (27), для елементів G виконується умова (8), переставлення $(j_1,\ldots,j_k)\in E_k(J_k)$ визначається умовою

$$w_{j_1}\le w_{j_2}\le\ldots\le w_{j_k}. \qquad (29)$$

Доведення. Як і в доведенні теореми 1 справедливі співвідношення (17)–(19).

За лемою 3.44 з [2, с.129–130]] при $\eta=k$, $E=E_{k\nu}(G)$ маємо

$$\min_{x\in E_{k\nu}(G)}\varphi(x)\ge\varphi(w)+\rho\sum_{i=1}^{k}g^2_{\delta_i}+$$
$$+\rho\sum_{i=1}^{k}w^2-2\rho\max_{x\in E_{k\nu}(G)}\sum_{i=1}^{k}w_ix_i, \qquad (30)$$

де $\left|g_{\delta_1}\right|\le\ldots\le\left|g_{\delta_\eta}\right|$.

Очевидно, що при $\eta=k$

$$\sum_{i=1}^{k}g^2_{\delta_i}=\sum_{i=1}^{k}g_i^2, \qquad (31)$$

Максимум у (30) знайдемо за теоремою 3.1 з [2] при $\eta=k$, $n=\nu$:

$$\max_{x\in E_{k\nu}(G)}\sum_{i=1}^{k}w_ix_i=\sum_{i=1}^{k}w_{j_i}g_i, \qquad (32)$$

де в правій частині координати точки w в представлені (27) упорядковані за (29), а елементи $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ задовольняють нерівність (8).

За лемою 2 з використанням справедливих нерівностей (22) та (23) з (30)–(32), (18) та (19) маємо $\forall x\in D^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}$.

$$f^0(x)\ge\xi^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}+\varphi(w)+\rho\sum_{i=1}^{k}g_i+$$
$$+\rho\sum_{i=1}^{k}w^2-2\rho\sum_{i=1}^{k}w_{j_i}g_i. \qquad (33)$$

Отже, за (17) права частина формули (33) може слугувати оцінкою $\xi\left(D^{\tau_1\ldots\tau_r}_{i_1\ldots i_r}\right)$ у МГМ для задачі (1)–(4) (формула (28)), що і треба було довести.

Розглянемо можливість одержання оцінки для випадку, коли в (4) $\varphi(x)$ диференційовна сильно опукла функція.

Теорема 4. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{n\nu}(G) \subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}\right)$ множини $D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}$ в МГМ для задачі (1)–(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}\right) = \xi_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r} + \varphi(y) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} y_i +$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{k} {y_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} g_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}} - 2\rho y_{j_i}\right) g_i, \quad (34)$$

де точка $y \in X$ – довільна; елементи мультимножини $G = \{g_1,..., g_k\}$ – задовольняють умову (8), а переставлення $(j_1,..., j_k) \in E_k(J_k)$ задовольняє умову

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_1}} - 2\rho\gamma_{j_1} \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_2}} -$$

$$-2\rho\gamma_{j_2} \ge ... \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_k}} - 2\rho\gamma_{j_k}, \quad (35)$$

а величина $\xi_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}$ обчислюється в теоремах 1, 2.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1 справедливі співвідношення (17)–(19).

За лемою 3.48 з [2, с. 133–134] при $\eta = k$, $E = E_{k\nu}(G)$ маємо $\forall y \in X$

$$\min_{x\in E}\varphi(x) \ge \varphi(y) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} y_i + \rho\sum_{i=1}^{k} {y_i}^2 +$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} - 2\rho y_i\right) x_i, \quad (36)$$

де $\left|g_{\delta_1}\right| \le ... \le \left|g_{\delta_\eta}\right|$. Очевидно, що при $\eta = k$ виконується рівність (31). Мінімум у правій частині (36) знайдемо за теоремою 3.1 з [2] при $\eta = k,\ n = \nu$

$$\min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} - 2\rho y_i\right) x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}} - 2\rho y_{j_i}\right) g_i, \quad (37)$$

де переставлення $(j_1,..., j_k) \in E_k(J_k)$ задовольняє умову (35), а числа $g_i\ \forall i \in J_k$ – умову (8).

За лемою 2 з використанням справедливих нерівностей (22), (23) з (36), (37), (31), (18) та (19) маємо $\forall x \in D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}$

$$f^0(x) \ge \xi_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r} + \varphi(y) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} y_i +$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{k} {y_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} g_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}} - 2\rho y_{j_i}\right) g_i. \quad (38)$$

Отже, права частина (38) може виступати оцінкою $\xi\left(D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}\right)$ у МГМ задачі (1)–(4) (формула (34)), що і треба було довести.

Коли видається доцільним і якщо можна знайти

$$g^* = \arg\min_{x\in E_{k\nu}} \|x - c\|^2,\ c \in R^k, \quad (39)$$

то оцінки з теорем 3, 4 можна посилити.

У [2, с. 137–138] показано, як розв'язати задачу (39), на множині поліпереставлень $E(G, H)$, яка при $s = 1$ збігається з $E_{k\nu}(G)$ звівши її до розв'язування задачі вибору [15]. Як відомо [16], останнє може бути здійснено поліноміальним алгоритмом, трудомісткість якого $O(k^3)$.

Теорема 5. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{n\nu}(G) \subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}\right)$ множини $D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}$ в МГМ для задачі (1)–(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r}\right) = \xi_{i_1...i_r}^{\tau_1...\tau_r} + \varphi(y) + \rho\left\|g^* - w\right\|^2, \quad (40)$$

де точка w визначається умовою (27), а g^* – співвідношенням (39), в якому $c \equiv w$, величина $\xi_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}$ обчислюється, як в теоремах 1, 2; точка $y \in X$ – довільна.

Доведення. Доведення проводиться за схемою, за якою доведено теореми 1, 3, 4, де для оцінки мінімуму $\varphi(x)$ на множині $E_{k\nu}(G)$ береться його оцінка $\forall y \in X$ при $E = E_{k\nu}(G)$ з леми 3.52 з [2]:

$$\min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y) + \rho \left\| g^* - w \right\|^2,$$

де g^* – з (39) при $c = w$, а w – з (27).

У разі диференційовності сильно опуклої функції $\varphi(x)$ маємо оцінку, що визначається поданою нижче теоремою.

Теорема 6. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{k\nu}(G) \subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}\right)$ множини $D_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}$ у МГМ для задачі (1)–(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}\right) = \xi_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r} + \varphi(y) -$$

$$- \frac{1}{4\rho} \left\| \nabla \varphi(y) \right\|^2 + \rho \left\| g^* - c \right\|^2, \qquad (41)$$

де величина $\xi_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}$ обчислюється як в теоремах 1, 2;

$y \in X$ – довільна точка;

g^* визначається умовою (39) при

$$c = y - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(y). \qquad (42)$$

Доведення. Доведення відбувається за схемою доведення теорем 1, 3, 4, 5, де для оцінки мінімуму $\varphi(x)$ на множині $E_{k\nu}(G)$ береться його оцінка $\forall y \in Y$ при $E = E_{k\nu}(G)$ з леми 3.55 [2, с. 139–140]:

$$\min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \geq \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \left\| \nabla \varphi(y) \right\|^2 + \rho \left\| g^* - c \right\|^2,$$

де g^* береться з (39) при c за (42).

Результати роботи дозволяють в економіко-математичних моделях комбінаторного класу оцінювати підмножини допустимих розв’язків, що використовується в МГМ при розв’язуванні задачі (1)–(4), в якій нелінійний доданок $\varphi(x)$ в цільовій функції $f^0(x)$ є опуклою (сильно опуклою) функцією на опуклій множині X, в яку входить множина переставлень $E_{k\nu}(G)$ з (3).

Як напрям подальших досліджень доцільно провести числові експерименти з розв’язування задачі (1)–(4) методом МГМ з розглянутим у статті підходом до оцінювання підмножин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наукова думка, 1981. – 288 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : ІСДО, 1993. – 188 с.
3. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
4. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
5. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – К. : Наукова думка, 2005. – 117 с.
6. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
7. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наукова думка, 2008. – 160 с.
8. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К. : Наукова

думка, 2010. – 105 с.
9. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе вервей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 106–112.
10. Ємець О. О. Оцінювання допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв'язується методом гілок та меж / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010 – № 1. – С. 21–27.
11. Ємець О. О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 2. – С. 39–41.
12. Ємець О. О. Розв'язування лінійних умовних задач комбінаторної оптимізації на переставленнях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Т. О. Парфьонова, Т. В. Чілікіна // Штучний інтелект. – 2011. – № 2. – С. 131–136.
13. Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
14. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
15. Юдин Д. П. Задачи и методы нелинейного программирования / Д. П. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1964. – 736 с.
16. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.

УДК 334.375

ІННОВАЦІЙНІ ПІДХОДИ ДО УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВАМИ: ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Є. І. Івченко, кандидат технічних наук

Сучасний розвиток України є доволі складним і суперечливим, адже знаменує собою швидкий перехід держави до нового етапу розвитку – інформаційного суспільства, в якому значно спрощуються умови руху факторів виробництва, посилюється їхня динаміка та суттєво зростають численні суперечки. Специфіка економічної ситуації в Україні визначається станом переходу від однієї соціально-економічної системи до іншої – від адміністративно-планової до ринкової економіки, який виявився ще більш складним, ніж передбачалося експертами й економістами. У країні поки залишається несприятливим підприємницький клімат, спостерігається нерішучість у формуванні та проведенні політики підвищення як національної, так і конкурентоспроможності підприємств різних галузей економіки. У цих умовах надзвичайно важливим стає визначення стратегічних пріоритетів розвитку економіки України, їх форм і механізмів, від яких насамперед залежить забезпечення сталого зростання економіки і ефективність її подальшого реформування. Це стосується не тільки економіки країни в цілому, але і її підприємств різних галузей.

Вважаючи підприємства домінантою розвитку національної економіки, можна стверджувати, що розробка сучасних стратегій і технологій розвитку підприємств на основі впровадження та використання нових інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в арсеналі стратегічного антикризового управління підприємствами у даний час є доцільною і своєчасною. Метою дослідження є вдосконалення управління підприємствами за рахунок упровадження та використання нових ІКТ, щоб забезпечити стабільний розвиток під-