Науковий Вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. № 15 2004 р.

МОДИФІКОВАНИЙ ІМПУЛЬСНИЙ ПРОСТІР У РЕЛЯТИВІСТСЬКІЙ КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ: "ПЛОСКІ ХВИЛІ"

І.І. Качурик

Технологічний університет Поділля, 28016, Хмельницький-16, вул. Інститутська, 11

У рамках релятивістської квантової теорії розвивається модель імпульсного простору постійної кривизни $\hbar / l_0$ (l_0 – фундаментальна довжина) – простору де Сіттера S_p, – на якому транзитивно діє група $SO(1,4)$. Він реалізується як 4-вимірний уявний простір Лобачевського. Аналізуються формули розкладу хвильової функції по "плоских хвилях" у просторі S_p і властивості цих "хвиль".

Ідея видозміни імпульсного простору у квантовій релятивістській фізиці змістовне втілення знайшла у так званих нелокальних теоріях, у яких з різних фізичних міркувань модифікується форма взаємодії елементарних частинок в області малих хвиль де Бройля. (Огляд спроб побудови таких теорій дається в монографії [1]). Спільною рисою для майже всіх робіт цього напрямку є поява в апараті фундаментальної довжини l_0, яка визначає просторово-часові межі, за якими багато уявлень про елементарні частинки суттєво змінюються.

Як це випливає із результатів робіт [2-4], представлення про взаємодію частинок найбільш повно відображається в методі розширеної (за масову поверхню) матриці розсіяння (S-матриці). В аксіоматичному підході Боголюбова до побудови S-матриці, (див. наприклад, [5, 6]) вихід за масову поверхню еквівалентний включенню взаємодії, і отже, конче необхідний для послідовного формулювання динамічної теорії. Для стандартної процедури розширення вважається очевидним, що імпульси $p = (p^0, \vec{p})$, від яких залежать розширені об'єкти (поля, струми, коефіцієнтні функції S-матриці і т.д.), належать 4-вимірному простору Мінковського $M_p^{(1,3)}$. У роботах [2-4] аргументується думка, що такий вибір геометрії p-простору не випливає із загальних принципів квантової теорії поля, але саме він несе відповідальність за відомі труднощі теорії, зокрема існування ультрафіолетових розбіжностей. Як альтернатива висувається гіпотеза, що у формалізмі розширеної S-матриці повинен використовуватись не псевдоевклідовий імпульсний простір Мінковського, а імпульсний простір постійної кривизни з радіусом кривизни $\hbar / l_0$ – простір де Сіттера – з групою рухів $SO(2,3)$. У новій схемі "кінема-тичні" аксіоми, що формулюються на масовій поверхні, по суті своїй не змінюються, а принцип причинності, як "динамічна" аксіома, суттєво модифікується у відповідності до нової геометрії p-простору.

Існує ще одна модель простору постійної кривизни, група рухів якого $SO(1,4)$ [4]. Ми будемо розглядати саме такий простір. Математичною реалізацію його є гіперсфера

$$\left(p^0\right)^2 - \left(\vec{p}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{l_0^2}\left(p^4\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{l_0^2} = -M^2, \quad (1)$$

де M – фундаментальна (гранична) маса теорії, у псевдоевклідовому 5-просторі $M_{\underline{p}}^{(1,4)}$ змінних $\underline{p} = \left(p^0, \vec{p}, p^4\right)$. У системі одиниць $\hbar = c = l_0 = M = 1$, якою будемо надалі користуватись, (1) представляється як поверхня однопорожнинного гіперболоїда $\mathrm{H}^{(4)} \sim SO(1,4)/SO(1,3)$:

$$\underline{p}^2 \equiv [\underline{p}; \underline{p}] = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 - (p^4)^2 = -1. \quad (2)$$

У ролі координат на цій поверхні виберемо компоненти $p^\mu, \mu = 0,1,2,3$, 4-векто-ра $(p^0, \vec{p})$ енергії-імпульсу. Їх можна розглядати як декартові координати на гіперплощині $p^4 = 0$. Весь чотиривимірний p-простір з метрикою

$$ds^2 = dp^2 - (pdp)/\sqrt{1+p^2}, \qquad (3)$$

$$\left(dp^2 = (dp^0)^2 - (d\vec{p})^2, \; pdp = p^0 dp^0 - \vec{p}d\vec{p}\right),$$

якщо ототожнити його діаметрально протилежні точки, реалізовуватиме модель уявного простору Лобачевського $\mathsf{L}_p^{(4)}$ [8]. Цей модифікований імпульсний простір будемо також називати простором де Сіттера. Позначимо його через S_p. Хвильові функції елементарних частинок в імпульсному представленні розглядаються як функції, задані на S_p.

У даній роботі вивчаються властивості орисферичних хвиль у просторі S_p, які є аналогами плоских хвиль у звичайному просторі Мінковського $M_p^{(1,3)}$, і аналізуються формули розкладу по цих “плоских хвилях” хвильової функції частинки. Ці формули відображають простір S_p на деякий 4-вимірний конфігураційний простір, точки якого зв’язані з унітарними представленнями групи $SO(1,4)$ основної неперервної (r-область: $r \geq 0$) і дискретної (L-область: $L = -1,0,1,2,...$) серій. “Плоскі хвилі” є власними функціями (у декартовому базисі) квадратичного оператора Казиміра $F = (1/2)J_{ab}J^{ab}$ групи $SO(1,4)$, де J_{ab} – генератори групи; $a,b = \; = 0,1,2,3,4$. Ми показуємо, що у “класичній” границі $l_0 \to 0$ оператор F переходить в оператор квадрата 4-інтервалу у простори $M_p^{(1,3)}$, (групою рухів $M_p^{(1,3)}$ є група Пуанкаре $ISO(1,3)$), а його власні функції – у плоскі хвилі простору $M_p^{(1,3)}$, причому з орисферичної хвилі простору S_p, яка відповідає одному і тому ж представленню групи $SO(1,4)$, у границі $l_0 \to 0$ одержуються плоскі хвилі простору $M_p^{(1,3)}$ протилежних частотностей, які відповідають різним (нееквівалентним) представленням групи Пуанкаре. У тій же границі рівняння Клейна-Гордона нового конфігураційного простору переходять у рівняння звичайного координатного простору Мінковського $M_x^{(1,3)}$, при цьому r-область переходить у часовоподібну, а L-область – у просторовоподібну області простору $M_x^{(1,3)}$. Нарешті ми доведемо, що у розглядуваній моделі модифікованого імпульсного простору релятивістської квантової теорії час завжди неперервний, а простір – дискретний (квантований).

Групою рухів нового простору S_p є група де Сіттера $SO(1,4)$: $p'^a = \Lambda^a_b p^b$. Вона містить як підгрупу однорідну групу Лоренца $SO(1,3)$ (ми цього й вимагаємо: лоренц-перетворення повинні зберігати своє значення!). Група $SO(1,3)$ реалізується як 5-обертання навколо осі p^4: $p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$, $p'^4 = p^4$. Вона є стаціонарною групою точки $\underset{\smile}{p} = (0, \vec{0}, 1)$. Важливо також, що група рухів нового (кривого) p-простору десятипараметрична, як і група Пуанкаре. Підкреслимо, що простір де Сіттера є єдиним рімановим простором постійної кривизни – найближчим сусідом до плоского простору $M_p^{(1,3)}$, – що задовольняє приведеним умовам.

У "класичній" границі $l_0 \to 0$ ($M \to \infty$) співвідношення десіттерівської геометрії переходять у відповідні аналоги псевдоевклідової геометрії. У системі одиниць $\hbar = c = l_0 = M = 1$ "плоский" граничний випадок означає, що розглядується область значень імпульсів $|p^\mu| << 1$. Дійсно, у цій області значень p^μ (див. (3)) $ds^2 = dp^2 = (dp^0)^2 - (d\vec{p})^2$. Це означає, що у новому p-просторі описання частинок в області великих енергій і імпульсів, тобто в малих областях просторучасу, повинні помітно відрізнятися від "класичного" випадку (див. [2-4, 9]).

Якщо 4-імпульси елементарних частинок належать гіперболоїду $\mathrm{H}^{(4)}$, то можна увести до розгляду вектор 5-імпульсу частинки $\underline{p} = \left(p, p^4\right)$ і говорити про хвильову функцію $\psi\left(\underline{p}\right) = \psi\left(p, p^4\right)$ такої частинки:

$$\psi\left(\underline{p}\right) = \delta\left(p^2 - p_4^2 + 1\right)\varphi\left(\underline{p}\right),$$

де $\varphi\left(\underline{p}\right) = \varphi\left(p, p^4 = \sqrt{1+p^2}\right)$. При перетвореннях $\Lambda \in SO(1,4)$ функція $\psi\left(\underline{p}\right)$ перетворюється згідно формули

$$T(\Lambda)\,\varphi\left(\underline{p}\right) = \varphi\left(\Lambda^{-1}\underline{p}\right), \qquad (4)$$

яка задає квазирегулярне представлення групи $SO(1,4)$ у просторі нескінченно диференційованих фінітних функцій на $\mathrm{H}^{(4)}$. Поповнивши його по нормі

$$\| f \| = (f, f) = \int\limits_{\left[\underline{p},\underline{p}\right]=-1} \left|\varphi\left(\underline{p}\right)\right|^2 d\Omega_{\underline{p}} \,,$$

де $d\Omega_{\underline{p}}$ – інваріантна міра на $\mathrm{H}^{(4)}$, одержимо простір $L^2\left(\mathrm{H}^{(4)}\right)$ квадратично інтегровних функцій на $\mathrm{H}^{(4)}$. Представлення $T(\Lambda)$ можна продовжити на цей простір. Із інваріантності міри $d\Omega_{\underline{p}}$ випливає, що воно унітарне відносно норми $\| f \|$.

Представлення $T(\Lambda)$, що задається формулою (4), є, взагалі кажучи, звідним. А тому виникає питання розкладу його на незвідні компоненти. А це еквівалентно задачі розкладу по незвідних представленнях групи $SO(1,4)$ функції $\varphi\left(\underline{p}\right)$. Для її розв'язку скористаємось результатами роботи Россмана [10] (див. також [11, 12]). Згідно формул Россмана шуканий розклад функції $\varphi \in L^2\left(\mathrm{H}^{(4)}\right)$ має вигляд

$$\varphi\left(\underline{p}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\varepsilon=0,1}\int\limits_0^\infty\int\limits_Y \left|\left[\underline{p},\underline{k}\right]\right|^{-\sigma-3} \operatorname{sign}^\varepsilon\left[\underline{p},\underline{k}\right]\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}'\right)\left|C(\chi)^{-2}\right| d\underline{k}'\,dr +$$
$$+\sum_\chi \operatorname*{res}_{\sigma=L}\left\{C(\chi)^{-1}\int\limits_Y \left|\left[\underline{p},\underline{k}\right]\right|^{-\sigma-3}\operatorname{sign}^\varepsilon\left[\underline{p},\underline{k}\right]\Phi^{\circ}_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}'\right) d\underline{k}'\right\}. \qquad (5)$$

Тут $Y = S^{(3)} \times S^{(0)}$ – сферичний перетин конуса $C^{(4)}$ ($C^{(4)}$: $\left[\underline{k},\underline{k}\right] = \left(k^0\right)^2 - \left(\vec{k}\right)^2 - \left(k^4\right)^2 = 0$), $S^{(0)}$ – нульвимірна сфера; $\underline{k}' \in Y$; $d\underline{k}'$ – інваріантна міра на Y; $\sigma = -3/2 + ir$, $r \geq 0$. У другому доданку сумування ведеться по всіх тих $\chi = (L, \varepsilon)$, для яких $L(\text{ціле}) \geq -1$ і $\varepsilon \equiv L+1 \pmod 2$. Функція $C(\chi)$ визначається формулою

$$C(\chi) = 2^4\pi^{3/2}\frac{\Gamma(ir)}{\Gamma(ir+3/2)}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(ir + \frac{3}{2} + \varepsilon\right).$$

Квантові числа r і L номерують незвідні унітарні представлення групи $SO(1,4)$, відповідно неперервної і дискретної серій. Функція $\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}\right)$ однозначно виражена на конусі $C^{(4)}$ і задовольняє такій умові однорідності:

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(a\underline{k}\right) = \operatorname{sign}^\varepsilon a\,|a|^\sigma\,\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}\right), \qquad (6)$$
$$a \in R, \quad \underline{k} \in C^{(4)}.$$

(Число ε задає парність функції). Через $\varphi\left(\underline{p}\right)$ вона виражається за формулою

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}\right) = \int\limits_{\mathrm{H}^{(4)}} \left|\left[\underline{p},\underline{k}\right]\right|^\sigma \operatorname{sign}^\varepsilon\left[\underline{p},\underline{k}\right]\varphi\left(\underline{p}\right) d\Omega_{\underline{p}} \,. \qquad (7)$$

Функція $\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}'\right)$ є звуженням на Y функції $\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\underline{k}\right)$. Згідно (6) між ними існує співвідношення

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k})=\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(k^0,\vec{k},k^4\right)=$$
$$=\operatorname{sign}^{\varepsilon}k^0\left|k^0\right|^{\sigma}\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(1,\frac{\vec{k}}{k^0},\frac{k^4}{k^0}\right)=$$
$$=\operatorname{sign}^{\varepsilon}k^0\left|k^0\right|^{\sigma}\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k}').$$

Простір функцій $\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k})$ позначимо через $\mathsf{h}_{\sigma,\varepsilon}$, а простір функцій $\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k}')$ – через D_ε. Поповнивши $\mathsf{h}_{\sigma,\varepsilon}$ по нормі $\int\limits_Y \left|\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k}')\right|^2 d\underline{k}'<\infty$, одержимо простір $L^2_{\sigma,\varepsilon}\left(C^{(4)}\right)$. Оператори

$$T^{\sigma,\varepsilon}(\Lambda)\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k})=\Phi_{\sigma,\varepsilon}\left(\Lambda^{-1}\underline{k}\right) \qquad (8)$$

задають незвідні унітарні представлення групи $SO(1,4)$ у просторі $L^2_{\sigma,\varepsilon}\left(C^{(4)}\right)$. Тому представлення $T^{\sigma,\varepsilon}(\Lambda)$ є незвідними компонентами $T(\Lambda)$. Функція $\Phi^{\circ}_{\sigma,\varepsilon}\in \breve{L}^2\left(C^{(4)}\right)$. (Простори $\breve{L}^2_{\sigma,\varepsilon}\left(C^{(4)}\right)$ є фактор-просторами відповідних просторів $L^2\left(C^{(4)}\right)$). В просторі $\breve{L}^2\left(C^{(4)}\right)$ реалізується представлення дискретної серії групи $SO(1,4)$, а в просторі $L^2\left(C^{(4)}\right)$ – представлення максимально виродженої основної унітарної серії.

Як бачимо, у розклад хвильової функції входять не тільки представлення неперервної серії, але і представлення дискретної серії, що слід було очікувати, оскільки стаціонарна підгрупа $SO(1,3)$ точки $\underline{\breve{p}}=(0,\vec{0},1)\in \mathsf{H}^{(4)}$ некомпактна.

Кожна функція $\Phi_{\sigma,\varepsilon}\in L^2\left(C^{(4)}\right)$ із-за однорідності (див. (6)) однозначно визначається своїми значеннями на будь-якому контурі Γ, який перетинає по одному разу кожну твірну конуса $C^{(4)}$. Інваріантна міра $d\underline{k}'$ на цьому контурі зв'язана з інваріантною мірою $d\underline{k}$ на $C^{(4)}$ формулою $d\underline{k}= =d(tk')=t^3dtd\underline{k}'$, $t>0$, $\underline{k}'\in\Gamma$. Можна показати [12], що інтегрування по Y у формулі (5) замінюється інтегруванням по Γ, причому Γ можна вибрати у вигляді $\Gamma=\tilde{\Gamma}\times S^{(0)}$, де $\tilde{\Gamma}$ – відповідний переріз лише верхньої порожнини конуса $C^{(4)}$. І тоді інтегрування по Γ слід розуміти як інтегрування по многовиду $\tilde{\Gamma}$ і сумування по дискретній множині $S^{(0)}=\{-1,+1\}$.

Оскільки вираз $[\underline{p},\underline{k}]$ може перетворюватись в нуль в області допустимих значень змінних (компонент 5-векторів $\underline{p}$ і $\underline{k}$), то об'єкти $\left|[\underline{p},\underline{k}]\right|^{\sigma}$ повинні розглядатись як узагальнені функції із степеневими особливостями. Тому при обчисленні інтегралів з ними необхідно користуватись регуляризацією, що відповідає, наприклад, узагальненій функції t_+^λ. Вона визначається таким чином:

$$t_+^\lambda=\begin{cases} t^\lambda, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

при $\lambda>-1$, а при інших λ – як аналітичне продовження із цієї області. Регуляризація може бути виконана, зокрема, за формулою [13] (див. і [8])

$$t_+^\lambda=\frac{e^{-i\pi\lambda}(t+i\varepsilon)^\lambda+e^{i\pi\lambda}(t-i\varepsilon)^\lambda}{2\sin\pi\lambda},$$

де (за означенням) $-\pi<\arg(t\pm i\varepsilon)<\pi$.

У світлі вищенаведеного формули розкладу хвильової функції $\varphi(\underline{p})$ представимі у вигляді [11, 12]

$$\varphi(\underline{p})=\frac{1}{2(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty\frac{\left|\Gamma(ir+3/2)\right|}{\left|\Gamma(ir)\right|^2}dr\int\limits_\Gamma[\underline{p},\underline{k}]_+^{-\sigma-3}\Phi_\sigma(\underline{k})\,d\underline{k}'+\sum_{L,\varepsilon}\operatorname*{res}_{\sigma=L}\left\{C(\chi)^{-1}\int\limits_\Gamma[\underline{p},\underline{k}]_+^{-\sigma-3}\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\underline{k})\,d\underline{k}'\right\}, \qquad (9)$$

$$\Phi_\sigma(\underline{k})=\int\limits_{\mathsf{H}^{(4)}}[\underline{p},\underline{k}]_+^{\sigma}\,\Phi(\underline{p})\,d\Omega_{\underline{p}}. \qquad (10)$$

Тут, як і раніше, $\varepsilon\equiv L+1(\bmod 2)$, $L= =-1,0,1,2,\dots$, а $\Phi_\sigma=\left(\Phi_{\sigma,0}+\Phi_{\sigma,1}\right)/2$ – однорідна степеня однорідності σ функція на конусі $C^{(4)}$; $\sigma=-3/2+ir$.

Вибираючи різні контури Γ і використовуючи різні їх параметризації, можна одержати різні базисні функції і розклади по них хвильової функції $\varphi(\underline{p})$. Це зроблено у роботі [12]. Тут приведемо лише деякі основні параметризації $\mathrm{H}^{(4)}$ і дамо відповідні вирази інваріантної міри $d\Omega_{\underline{p}}$.

Сферична система S **:**

$$p^0 = \operatorname{sh} a,\ p^1 = \operatorname{ch} a \sin\delta \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^2 = \operatorname{ch} a \sin\delta \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^3 = \operatorname{ch} a \sin\delta \cos\theta,\ p^4 = \operatorname{ch} a \cos\delta;$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = \operatorname{ch}^3 a \sin^2\delta \sin\theta\, da d\delta d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < a < \infty,\ 0 \le \delta, \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Гіперболічна система H **:**

при $\left|p^4\right| > 1$

$$p^0 = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b,\ p^1 = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^2 = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^3 = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\theta,\ p^4 = \pm \operatorname{ch} a;$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = \left|\operatorname{sh} a\right|^3 \operatorname{sh}^2 b \sin\theta\, da db d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < a < \infty,\ 0 \le b < \infty,\ 0 \le \theta < \pi/2,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi;$$

при $\left|p^4\right| < 1$

$$p^0 = \operatorname{sh} c \sin\beta,\ p^1 = \operatorname{ch} c \sin\beta \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^2 = \operatorname{ch} c \sin\beta \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^3 = \operatorname{ch} c \sin\beta \cos\theta,\ p^4 = \cos\beta;$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = \sin^3\beta \operatorname{ch}^2 c \sin\theta\, d\beta dc d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < c < \infty,\ 0 \le \beta, \theta < \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Орисферична система O **:**

$$p^0 = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{s^2}{\lambda}\right),\ p^1 = s \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^2 = s \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^3 = s\cos\theta,\ p^4 = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{s^2}{\lambda}\right);$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = s^2 \frac{1}{|\lambda|} \sin\theta\, d\lambda ds d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < \lambda < \infty\ (\lambda \ne 0),\ 0 \le s < \infty,$$
$$0 \le \theta < \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Циліндрична система C **:**

при $p_0^2 > p_4^2$

$$p^0 = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b,\ p^1 = \operatorname{ch} a \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^2 = \operatorname{ch} a \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^3 = \operatorname{ch} a \cos\theta,\ p^4 = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b;$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = \left|\operatorname{sh} a\right| \operatorname{ch}^2 a \sin\theta\, da db d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < a < \infty,\ 0 \le b < \infty,\ 0 \le \theta < \pi/2,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi;$$

при $p_0^2 < p_4^2$

$$p^0 = \sin\gamma \operatorname{sh} c,\ p^1 = \cos\gamma \sin\theta \cos\varphi,$$
$$p^2 = \cos\gamma \sin\theta \sin\varphi,$$
$$p^3 = \cos\gamma \cos\theta,\ p^4 = \sin\gamma \operatorname{ch} c;$$
$$d\Omega_{\underline{p}} = \left|\cos\gamma\right| \sin^2\gamma \sin\theta\, d\gamma dc d\theta d\varphi;$$
$$-\infty < c < \infty,\ 0 \le \gamma, \theta < \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Аналогічним чином уводяться системи координат на конусі $C^{(4)}$, причому нижня порожнина параметризується шляхом дзеркального відображення відносно осі p^0 верхньої порожнини.

Формули розкладу функції $\varphi(\underline{p})$, $\underline{p} \in \mathrm{H}^{(4)}$, установлюють зв'язок уявного простору Лобачевського $\mathrm{L}_p^{(4)}$ із деяким 4-вимірним конфігураційним простором, точками якого є набори змінних $x = x_r = (r; \underline{k'}_r)$ і $x = x_L = (L; \underline{k'}_L)$, де $r \ge 0$, $L = -1, 0, 1, 2, \ldots$; $\underline{k'} \in \Gamma$. Ядра "перетворення Фур'є" між цими просторами мають вигляд $\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-\sigma-3}$, $\sigma = -3/2 + ir$, і $\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-L-3} = \operatorname*{res}_{\sigma=L} \left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-\sigma-3}$. Ці об'єкти є власними функціями оператора Казиміра $F = (1/2) J_{ab} J^{ab}$ групи де Сіттера $SO(1,4)$ із власними значеннями $\lambda_\sigma = -\sigma(\sigma+3)$. (Зауважимо, що другий оператор Казиміра $W = \omega_a \omega^a$, $\omega^a = (1/8) \varepsilon^{abcde} J_{bc} J_{de}$, для розглядуваних представлень класу 1 групи $SO(1,4)$ дорівнює нулю). Спектр величини σ для незвідних унітарних представлень розглядуваної групи складається із двох віток – неперервної і дискретної:

$$\sigma = \begin{cases} -3/2 + ir, 0 \le r < \infty \text{ (неперервна серія)}, \\ L, L = -1, 0, 1, 2, \ldots, \text{ (дискретна серія)}. \end{cases}$$

Генератори групи де Сіттера у декартових координатах p_a, $a = 0,1,2,3,4$, мають вигляд

$$J_{ab} = -J_{ba} = i\left(p_a \partial_b - p_b \partial_a\right), \partial_c \equiv \partial / \partial p^c \,. \quad (11)$$

Якщо увести диференціальний оператор $\hat{\partial}_a = \partial_a + p_a p^b \partial_b$ і врахувати, що $p^a \hat{\partial}_a = 0$, то J_{ab} можна представити і в такому вигляді [14] :

$$J_{ab} = i\left(p_a \hat{\partial}_b - p_b \hat{\partial}_a\right) = -i\left[\hat{\partial}_a, \hat{\partial}_b\right].$$

Оператори J_{ab} розпадаються на генератори лоренцівських обертань

$$J_{\mu\nu} = i\left(p_\mu \partial_\nu - p_\nu \partial_\mu\right) \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \quad (12)$$

і генератори 5-обертань у площинах $(\lambda, 4)$ простору $M_{\underline{p}}^{(1,4)}$

$$X_\lambda = J_{\lambda 4} = -i\left(p_4 \partial_\lambda - p_\lambda \partial_4\right),$$

які породжують 4-параметричну сім'ю "зсувів" (вона не утворює групи) у просторі де Сіттера: $p'^a = \Lambda_b^a(\underline{q}) p^b$, де $\underline{q}$ – параметризуючий вектор ($\underline{q}^2 = -1$). Ця операція позначається так: $p'^a \equiv \left(\underline{p}(+)\underline{q}\right)^a$. У явній формі

$$\begin{aligned} p'^\mu &= \left(\underline{p}(+)\underline{q}\right)^\mu = \Lambda_\nu^\mu(\underline{q}) p^\nu + \Lambda_4^\mu(\underline{q}) p^4 = p^\mu + q^\mu \left(p^4 + \frac{pq}{1+q^4}\right), \\ p'^4 &= \left(\underline{p}(+)\underline{q}\right)^4 = \Lambda_\nu^4(\underline{q}) p^\nu + \Lambda_4^4(\underline{q}) p^4 = pq + p^4 q^4, \end{aligned} \quad (14)$$

де $p^4 = \sqrt{1+p^2}$. Через $J_{\mu\nu}$ і X_λ інваріантний оператор F виражається наступним чином:

$$F = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + X_\lambda X^\lambda, \quad (15)$$

де $X^\lambda = g^{\lambda\mu} X_\mu = J_4^\lambda$. У незалежних координатах p^μ

$$F = -\sqrt{1+p^2}\, \partial_\mu \left(\frac{g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu}{\sqrt{1+p^2}} \right) \partial_\nu \,. \quad (16)$$

У "класичний границі" із (13) і (16) випливає, що

$$X_\lambda \to \hat{x}_\lambda = -i \frac{\partial}{\partial p^\lambda}, \; F \to \hat{x}_\lambda \hat{x}^\lambda = \hat{x}^2 = \left(-i \frac{\partial}{\partial p}\right)^2.$$

Перетворення (14) у цій границі утворюють групу трансляцій p-простору Мінковського $M_p^{(1,3)}$: $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$, $p'^4 = q^4$. Оператор $\hat{x}_\lambda$ є генератором трансляцій у просторі $M_p^{(1,3)}$, а оператор $\hat{x}^2$ – оператором квадрата 4-інтервалу у ньому. З іншої сторони, $\hat{x}^2$ представляє собою оператор Казиміра групи Пуанкаре – групи рухів цього простору. Оскільки компоненти оператора $\hat{x}_\lambda$ комутують між собою і з оператором $\hat{x}^2$, то вони мають спільні власні функції, які є одночасно власними функціями і оператора $\hat{x}^2$. Цими власними функціями є плоскі хвилі. Іншими словами, у звичайному підході плоскі хвилі у просторі імпульсів і плоскі хвилі, що реалізують унітарні представлення групи зсувів, є однакового вигляду. Це пояснюється тим, що в цьому випадку як p-простір, так і простір параметрів групи трансляцій є псевдоевклідовими.

Інша ситуація у випадку нового імпульсного простору – простору де Сіттера S_p. Він не є плоским і в ньому реалізується геометрія Лобачевського. Генератори "трансляцій" X_λ цього простору, по-перше, узагалі не утворюють алгебри, по-друге, не комутують між собою: $\left[X_\lambda, X_\mu\right] = -iJ_{\lambda\mu}$. А тому тут не можна говорити ні про якість представлення, ні про спільні власні функції цих операторів.

Отже, величини X_λ не є спостережуваними і тому просторово-часові координати (точніше – конфігураційні) повинні уводитись іншим шляхом. Ми уводимо їх як змінні $x \in \{x_r \cup x_L\}$, тобто як величини, "канонічно спряжені" імпульсним змінним, причому ця "канонічна спряженість" виражається як зв'язок p-представлення з x-представленням через перетворення (5) і (7) (або (9) і (10)). На ці формули слід дивитись у першу чергу як на формули розкладу по матричних елементах незвідних унітарних представлень групи де Сіттера $SO(1,4)$, де у ролі матричних елементів виступають власні функції оператора Казиміра (16). Як уже відмічалось, у "класичній" границі цей оператор переходить в оператор квадрата 4-інтервалу у просторі $M_p^{(1,3)}$. З цієї причини його можна розглядати як пряме геометричне узагальнення цього останнього при переході до p-простору S_p. Це буде тим правомірніше, якщо врахувати, що в розглядуваній границі власні функції оператора (16) – ядра нового "перетворення Фур'є" – переходять у плоскі хвилі p-простору Мінковського (нижче ми це покажемо). А тому по аналогії ці власні функції можна назвати "плоскими хвилями" p-простору де Сіттера.

Виберемо на конусі $C^{(4)}$ у ролі контура Γ гіперболічний переріз $k_4'^2 = 1$: $(k', k') \equiv \equiv k'^2 = (k'^0)^2 - (\vec{k}')^2 = 1$, і уведемо до розгляду 4-вектор $\kappa^{\pm} = \pm\left(\sqrt{1+\vec{\kappa}^2}, \vec{\kappa}\right)$, де $|\vec{\kappa}| = |\vec{k}'|$. Тепер можемо записати, що $\underline{k'} = \left(\pm\sqrt{1+\vec{k}'^2}, \vec{k}', \pm 1\right) = \left(\kappa^{\pm}, \pm 1\right)$ і при $k'^4 = 1$ $\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right| = \left|p^4 + pk'\right| = \left|p^4 + p\kappa^{\pm}\right|$, де $p^4 = \sqrt{1+p^2}$. Нехай $\left|p^0\right| << 1$, $|\vec{p}| << 1$. Врахуємо, що по порядку величини 4-вектор $\kappa^{\pm}$ не перевищує одиниці: $\left(\kappa^{\pm}, \kappa^{\pm}\right) = 1$. Тоді як функція p $\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right| = 1 + p\kappa^{\pm} + O\left(p^2\right)$ і, відповідно, $\ln\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right| = p\kappa^{\pm} + O\left(p^2\right)$; $\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-3/2+ir} = = \exp\left[\left(-3/2 + ir\right)\left(p\kappa^{\pm} + O\left(p^2\right)\right)\right] \to \exp\left[ip\left(r\kappa^{\pm}\right)\right]$.

Таким чином, у "класичній" границі при умові $r|\vec{\kappa}| =$ фікс., коли $k'^4 = 1$, маємо результат:

$$\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-3/2+ir} \to \begin{cases} e^{ipx} & \text{для } \kappa^{+}, \\ e^{-ipx} & \text{для } \kappa^{-}, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned} r\kappa^{+} &= \left(r\sqrt{1+\vec{\kappa}^2}, r\vec{\kappa}\right) \equiv x, \\ r\kappa^{-} &= -\left(r\sqrt{1+\vec{\kappa}^2}, r\vec{\kappa}\right) \equiv -x. \end{aligned} \tag{18}$$

Щоб мати результат для $k^4 = -1$ треба в (17) зробити заміну $p \to -p$. Для еквівалентних представлень групи $SO(1,4)$ неперервної серії ($\sigma \to -\sigma - 3$, $\sigma = -3/2 + + ir$) у цій границі знаходимо, що

$$\left|\left[\underline{p}, \underline{k'}\right]\right|^{-3/2-ir} \to \begin{cases} e^{-ipx} & \text{для } \kappa^{+}, \\ e^{ipx} & \text{для } \kappa^{-}. \end{cases} \tag{19}$$

У звичайній теорії плоска хвиля e^{ipx} ("додатно-частотна хвиля") є спільною власною функцією операторів трансляцій $\hat{x}_{\lambda} = -i\,\partial/\partial p^{\lambda}$, що відповідає власному значенню $+x_{\lambda}$ ("додатна частота"), а e^{-ipx} ("від'ємно-частотна хвиля") – власному значенню $-x_{\lambda}$ ("від'ємна частота"). Як матричні елементи представлень групи Пуанкаре (власні функції оператора Казиміра $\hat{x}_{\lambda}^2$) вони відповідають нееквівалентним представленням цієї групи. Формули (17) і (19) показують, що ці різної "частотності" плоскі хвилі у просторі Мінковського $M_p^{(1,3)}$, які відповідають нееквівалентним представленням групи Пуанкаре, одержуються в асимптотиці із "плоских хвиль p-простору де Сіттера, які відповідають одному і тому ж представленню групи $SO(1,4)$ рухів цього простору (див. також [14]).

Для унітарних представлень групи Пуанкаре спектр значень s оператора $\hat{x}^2$ у p-просторі Мінковського $M_p^{(1,3)}$ розпадається на три області

$$s = \begin{cases} x^2 > 0 \text{ (часовоподібна область)}, \\ x^2 = 0 \text{ (світловий конус)}, \\ x^2 < 0 \text{ (просторовоподібна область)}. \end{cases} \tag{20}$$

Спектр значень x_{λ} співпадає з конфігураційним простором (x-простір Мінковського $M_x^{(1,3)}$). Власні значення оператора "інтервалу" нового p-простору для унітарних максимально вироджених представлень групи де Сіттера $SO(1,4)$

$$\lambda_\sigma = \begin{cases} r^2 + 9/4, \quad r \ge 0 & (21а) \\ \text{(неперервна серія)}, & \\ -L(L+3), \quad L = -1,0,1,2,\ldots & (21б) \\ \text{(дискретна серія)}. & \end{cases}$$

У плоскій границі його власні функції приймають вигляд (див. (17) і (18)) плоских хвиль $(x \mid p) = \exp(\pm ipx)$ – власних функцій оператора $\hat{x}^2$. Тому стає зрозумілим смисл позначень (18): точки нового конфігураційного простору r-області задаються набором змінних $x = x_r = (r; \underline{k}'_r) = \{r; \kappa_r^\pm\}$, де $(\kappa_r^\pm, \kappa_r^\pm) = 1$. Співставляючи (20) і (21), бачимо, що r-область нового x-простору ($x = x_r$) переходить у часовоподібну область $x^2 > 0$ простору $M_x^{(1,3)}$. "Плоскі хвилі", що відповідають цій області можна записати у релятивістськи інваріантному вигляді:

$$\langle x_r \mid p \rangle = \left| \left(p^4 + p\kappa_r^\pm \right) \right|^{-3/2+ir}, \qquad (22)$$

де $\kappa_r^\pm = \kappa^\pm$: $(\kappa_r^\pm, \kappa_r^\pm) = 1$, $p^4 = \sqrt{1+p^2}$. Бачимо, що вони характеризуються часовоподібним 4-вектором $\kappa^{\pm\mu}$, який визначається однозначно 3-вектором $\vec{\kappa}$ і знаком нульової компоненти $\kappa_0^\pm$: $\kappa^\pm = \pm\left(\sqrt{1+\vec{\kappa}^2}, \vec{\kappa}\right)$. Рівняння $\left| [\underline{p}, \underline{k}'] \right| = c = \text{const}$, для кожного c визначає [8] рівняння орисфери у просторі $\mathsf{L}_p^{(4)}$, яка задається точкою $\underline{k}'$ конуса $[\underline{k}', \underline{k}'] = 0$. Очевидно, що де сіттерівська плоска хвиля (22) є постійною на кожній такій орисфері. У свою чергу для кожного c орисфера $\left| [\underline{p}, \underline{k}'] \right| = c$ є паралельною орисфері $\left| [\underline{p}, \underline{k}'] \right| = 1$, яка проходить через точку $\breve{p} = (0, \vec{0}, 1)$. Її можна охарактеризувати вектором $k' = \kappa^\pm$. Таким чином, можна сказати, що множина орисфер, що характеризуються вектором $\kappa^\pm$ (і є паралельними базисній орисфері, що проходить через точку $\breve{p}$) є для "плоских хвиль" у просторі де Сіттера поверхнями постійної фази, аналогічно тому, як у просторі Мінковського $M_x^{(1,3)}$ площини $px = \text{const}$ (які паралельні базисній площині, що проходить через початок координат) є поверхнями постійної фази для плоских хвиль $(x \mid p) = \exp(\pm ipx)$. Роль вектора енергії-імпульсу $\pm p^\mu$ відіграє тепер вектор $\kappa^{\pm\mu}$.

Як видно із (20) і (21), L-область x-простору, $x = x_L$, у "класичній границі" переходить у просторовоподібну область $x^2 < 0$ простору $M_x^{(1,3)}$. У цій границі при $\sigma = L$, $L = -1,0,1,2,\ldots$, і $k'^4 = \pm 1$ $\left| [\underline{p}, \underline{k}'] \right|^L \to \left| p^4 \pm p\kappa^\pm \right|^L \to 1$. А тому, щоб одержати "правильний" вираз для десіттерівської плоскої хвилі у дискретному спектрі слід згідно (9) у виразі (22) перейти у σ-комплексну площину, взяти лишок у точці $\sigma = L$ і, крім того, здійснити (див. [13]) аналітичне продовження по компонентах вектора k'^μ у просторовоподібну область: $k'^\mu \to ik'^\mu$. Наразі маємо таку "плоску хвилю" у просторі S_p:

$$\langle x_L \mid p \rangle = \left| p^4 \pm ip\kappa_L^\pm \right|^L, \qquad (23)$$

де $p^4 = \sqrt{1+p^2}$, $\kappa_L^\pm = i\kappa^\pm$: $(\kappa_L^\pm, \kappa_L^\pm) = -1$. Неважко переконатись, що ця функція є власною для оператора (16) при $\lambda_\sigma = -L(L+3)$. Спряжена плоска хвиля $\langle p \mid x_L \rangle = \langle x_{-L-3} \mid p \rangle$ є також його власною функцією. Тепер у "класичній" границі

$$\left| p_4 + ip\kappa_L^\pm \right|^L \to e^{ipx_L}, \; x_L = L\kappa_L^\pm.$$

По змінних x_r і x_L функції $\langle x_r \mid p \rangle$ і $\langle x_L \mid p \rangle$ задовільняють диференціально-різницеві рівняння (див. також [3]), відповідно

$$\begin{aligned} &\left(2\hat{K}_r - 2p^4 \right) \langle x_r \mid p \rangle = 0, \\ &\left(2\hat{K}_L - 2p^4 \right) \langle x_L \mid p \rangle = 0, \end{aligned} \qquad (25)$$

де

$$2\hat{K}_r = 2\,\mathrm{ch}\left(i\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{3i}{r}\left(\mathrm{sh} i\frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{e^{-i\partial/\partial r}}{ir(ir - 1/2)} \Delta_{H^{(3)}},$$

$$2\hat{K}_L = 2\,\mathrm{ch}\frac{\partial}{\partial L} + \frac{3}{L+3/2}\,\mathrm{sh}\frac{\partial}{\partial L} - \frac{e^{\partial/\partial L}}{(L+1)(L+3/2)}\Delta_{\mathrm{H}^{(3)}}.$$

Тут $\Delta_{H^{(3)}}$ – оператор Лапласа на двопорожнинному гіперболоїді $H^{(3)}$: $(\kappa_r^{\pm}, \kappa_r^{\pm}) = 1$, а $\Delta_{\mathrm{H}^{(3)}}$ – оператор Лапласа на однопорожнинному гіперболоїді $\mathrm{H}^{(3)}$: $(\kappa_L^{\pm}, \kappa_L^{\pm}) = -1$. У "плоскій" границі ці "рівняння Клейна-Гордона" у новому x-просторі переходять у звичайне рівняння Клейна-Гордона у псевдоевклідовому x-просторі $M_x^{(1,3)}$:

$$\left(\Box_x - p^2\right)(x \mid p) = 0.$$

Якщо M – фундаментальна (гранична) маса теорії, то природно допустити, що маси елементарних частинок і, можливо, резонансів менші маси максимона: $m^2 \le M^2$. У системі одиниць, де $M = 1$, це відповідає тому, що $m^2 \le 1$ (див. також [3]). Вільні частинки повинні знаходитись не тільки на поверхні (2), але і на масовій поверхні $p^2 - m^2 = 0$, що веде до рівності $(p^4 - m_4)(p^4 + m_4) = 0$, де $m_4 = \sqrt{1+m^2}$. Для вільної скалярної частинки одержуємо два рівняння: $2(p^4 - m_4)\psi(p, p^4) = 0$, $2(p^4 + m_4)\psi(p, p^4) = 0$. Перше із них у "плоскій" границі (p^2, $m^2 << 1$) переходить у звичайне рівняння Клейна-Гордона

$$\left(p^2 - m^2\right)\psi(p) = 0,$$

а інше не має "правильного" класичного аналога. У нелокальній квантовій теорії поля з кривим імпульсним простором рівняння

$$2\left(p^4 - m_4\right)\Phi\left(p, p^4\right) = 0$$

для скалярного нейтрального поля відіграє важливу роль при аксіоматичній побудові S-матриці (див. [9] і цитовану там літературу).

Покажемо тепер, що у нашому випадку час неперервний, на відміну від підходу [2-4, 13] з групою рухів $SO(2,3)$, де час завжди дискретний (див. і [1, 15]). Нульова компонента 4-вектора (13) $X_0 = -i\left(p_4\,\partial/\partial p_0 + p_0\,\partial/\partial p_4\right)$ у "плоскій" границі співпадає з оператором часу $\hat{x}_0 = -i\,\partial/\partial p_0$ "класичної" теорії. Тому X_0 також будемо називати оператором часу, а його власне значення τ – " часом". Власні функції цього оператора, які задовольняють умовам кінечності і однозначності, знаходяться із рівняння

$$X_0 \Psi_\tau(\underline{p}) = \tau \Psi_\tau(\underline{p}).$$

Легко переконатись, що це рівняння задовольняє функція

$$\Psi_\tau(\underline{p}) = \exp\left[it\gamma(\underline{p})\right], \quad \gamma(\underline{p}) = \ln\left(p_0 + p_4\right).$$

Звідси бачимо, що спектр змінної $\tau = t$ – дійсно неперервний.

Аналогічно, розв'язуючи рівняння

$$X_j \Psi_{x_j}(\underline{p}) = x_j \Psi_{x_j}(\underline{p})$$

на власні значення і власні функції операторів $X_j = -i\left(p_j\,\partial/\partial p_4 - p_4\,\partial/\partial p_j\right)$, $i = 1,2,3$, знаходимо, що

$$\Psi_{x_j}(\underline{p}) = \exp\left[ix\theta_j(\underline{p})\right], \quad \theta_j(\underline{p}) = \mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{p_j}{p_4}\right),$$

де $x_j = x = n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Тут спектр власних значень змінної x_j – дискретний. Таким чином, у розглядуваному підході ми маємо справу з "квантованим" простором. Наслідки такого факту для фізики надвисоких енергій потребують детальніших досліджень (див. також [3, 9, 13, 15]).

Література:

1. Блохинцев Д.И. Пространство и время в микромире. М., Наука, 1982.
2. Кадышевский В.Г. Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны. – В: Проблемы теоретической физики, посвященной памяти И.Е. Тамма. М., Наука, 1972, с. 52-73.
3. Кадышевский В.Г. Гипотеза о фундаментальной длине в рамках квантовой теории поля. – В: Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. Препринт ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.
4. Донков А.Д., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. Bulg. J. Phys. 1, №1 (1974), с. 58-69; 1, №2 (1974),

с. 150-160; 1, №3 (1974), с. 233-248.

5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука. 1984.

6. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.

7. Кадышевский В.Г. Квантовая теория поля с неевклидовым пространством относительных импульсов. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.

8. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представле ний. М., Физматгиз, 1962.

9. Матеев М.Д. Процессы при сверхвысоких энергиях и гипотеза о фундаментальной длине. Препринт ОИЯИ, Д2-10533, Дубна, 1977.

10. Rossman W. J. Func. Anal., 30 (1978), P. 448-477.

11. Vilenkin N.J., Klimyk A.U. Representation of Lie groups and special functions. Kluwer. Academic Publisher, 1992. Vol. 1.

12. Клесова Л.И. Разложение функций на однополостном гиперболоиде. М., 1981. Депонировано в ВИНИТИ, №1841-81 Деп.

13. Мир-Касимов Р.М. Аксиоматическая квантовая теория поля и импульсное пространство де Ситтера. – В сб.: "Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий". ОИЯИ, Р1, 2-7642, Дубна, 1973, с. 281-317.

14. Drechler W., Sasaki R. Solution of invariant field equations in (4,1) de Sitter space. Munich preprint, MPI-PAE/PTh 7/78, 1978.

15. Вяльцев А.И. Дискретное пространство-время. М., Наука, 1965.

MODIFIED MOMENTUM SPACE IN RELATIVISTIC QUANTUM THEORY: "PLANE WAVES"

I.I. Kachurik

Technological University of Podilla, 28016, Khmelnitsky, Institutskaja str., 11

In the framework of relativistic quantum theory the momentum space model of constant curvature $\hbar/l_0$ (l_0 – fundamental length) representating De-Sitter space S_p on which group $SO(1,4)$ acts transitively is developed. It is realized as 4-dimensional imaginary Lobachevsky space. An expansion formulas over the "plane waves" in space S_p for wave function and proper to "plane waves" properties are analyzed.