ТЕОРІЯ ЕФЕКТУ ШТАРКА: ВПЛИВ РОЗМІРНОСТІ

І.М. Шваб, В.Ю. Лазур

Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина, 54

Побудована теорія ефекту Штарка для D–вимірного водневоподібного атома. Отримані асимптотичні розв'язки рівняння Шредінгера для атома в однорідному електричному полі в D–вимірній параболічній системі координат. Знайдений асимптотичний вираз для енергії і ширини рівня енергетичного спектру.

1. Вступ

Еренфестом було показано [1], що узагальнення фізичних теорій на випадок простору з довільною розмірністю D часто приводить до нового і несподіваного погляду на суть розглядуваної проблеми. Останніми роками такий підхід отримав значний розвиток і широко застосовується в теоретичній фізиці. На ньому ґрунтується 1/D-розклад, або розмірний скейлінг (див., наприклад [2, 3]) – новий розрахунковий метод квантової механіки і теорії поля, який застосовувався, зокрема, до дослідження властивостей атомів в сильних електричному і магнітних полях [3-6], до задачі трьох тіл [7] і багатьох інших питань.

Та окрім цих (вельми важливих) чисто технічних можливостей D-вимірні квантово-механічні і квантово-польові моделі мають також безпосереднє відношення до конкретних задач теоретичної і математичної фізики. Не будучи повноцінно реалістичними, ці моделі вже зарекомендували себе як вельми корисні інструменти при вивченні квазіодновимірних і квазідвовимірних середовищ. Таким чином, було б невірним стверджувати, що малорозмірні теорії служать лише академічним цілям і відсторонені від реального світу. Навпаки, в даний час виявлений тісний зв'язок між прогнозами квантової теорії поля в просторах із зниженою розмірністю і низкою незвичайних ефектів, експериментально знайдених у фізиці конденсованих середовищ. З моменту відкриття в 1980 р. фон Клітцингом з співробітниками цілочислового кантового ефекту Холу [8], моделі квантової теорії поля в просторі розмірності D=2+1 стали особливо популярними.

На відміну від малорозмірних, квантово-механічні і квантово-польові моделі в просторах більшої розмірності вивчені досить слабо. Дана робота присвячена узагальненню результатів теорії ефекту Штарка [9, 11, 12] на випадок простору з довільною розмірністю D. За допомогою методу еталонного рівняння (див., наприклад [10, гл. І §5]) побудовані асимптотичні розклади розв'язків рівняння Шредінгера для водневоподібного атома із зарядом ядра Z у зовнішньому електричному полі F

$$\left[-\frac{1}{2}\Delta-\frac{Z}{r}+Fx_1\right]\Psi(\vec{r})=E\Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

в D-вимірній параболічній системі координат (тут r – відстань від електрона до заряду Z, F – напруженість електричного поля, вектор якого направлений по осі x_1, $(\hbar=m_e=e=1)$.

Новий інтерес до ефекту Штарка викликаний безпосереднім його зв'язком з вивченням високозбуджених рідбергівських станів. Цьому сприяло в першу чергу створення лазерів з перебудовуваною частотою, що дозволяє виконувати експерименти в цій області на якісно новому рівні. Ці обставини стимулювали розвиток численних теоретичних досліджень, що з'явилися останнім часом. Не дивлячись на те, що теорія ефекту Штарка була розвинена в одних з перших робіт по квантовій механіці, теоретичні результати, отримані раніше головним чином за допомогою теорії збурень і ВКБ, вже не можуть бути задовільними при описі новітніх експериментальних даних. Використання логарифмічної теорії збурень для D-вимірного "атома водню" в основному стані дозволяє отримати лише асимптотичні розклади для E_0, отримання ж асимптотичного розкладу для ширини рівня, що відповідає за ймовірність іонізації квазістаціонарного стану атома в електричному полі є складнішою математичною задачею.

2. Відокремлення змінних в рівнянні Шредінгера для атома в однорідному електричному полі в просторах довільної розмірності

Введемо в D-вимірному (D=2,3...) евклідовому просторі E_D параболічну систему координат [9, 13]:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\xi-\eta)/2, \\ x_2 &= \sqrt{\xi\eta}\cos\theta_{D-2}, \\ x_3 &= \sqrt{\xi\eta}\sin\theta_{D-2}\cos\theta_{D-3}, \\ &\vdots \\ x_{D-1} &= \sqrt{\xi\eta}\sin\theta_{D-2}...\sin\theta_2\cos\theta_1, \\ x_D &= \sqrt{\xi\eta}\sin\theta_{D-2}...\sin\theta_2\sin\theta_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $0\le\xi<\infty$, $0\le\eta<\infty$, $0\le\theta_1<2\pi$, $0\le\theta_k<\pi$, $k=2,3,...,D-2$. D-вимірний лапласіан приймає вигляд

$$\Delta = \frac{4}{\xi+\eta}\left\{\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\eta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{D-1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}+ \\ +\frac{1}{\xi\eta}\Delta^{(кут)}, \tag{2.2}$$

де $\Delta^{(кут)}$–кутова частина оператора Лапласа, залежна від кутів $\theta_1,\theta_2,...,\theta_{D-2}$

$$\Delta^{(кут)} = \frac{1}{H_\theta}\sum_{k=1}^{D-2}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\frac{H_\theta}{H_{\theta_k}^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_k},$$

а

$$H_\theta = \prod_{k=1}^{D-2}H_{\theta_k},\ H_{\theta_k} = \prod_{i=k+1}^{D-2}\sin\theta_i,\ H_{\theta_{D-2}}=1, \\ k=1,2,...,D-3.$$

Рівняння Шредінгера для D-вимірного водневоподібного атома із зарядом ядра Z в однорідному електричному полі F має вигляд ($\hbar=m_e=e=1$)

$$\left\{\frac{4}{\xi+\eta}\left[\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\eta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{D-1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]+ \\ +\frac{1}{\xi\eta}\Delta^{(кут)}+\frac{4Z}{\xi+\eta}-F(\xi-\eta)+2E\right\}\Psi=0. \tag{2.3}$$

Представимо розв'язок Ψ у вигляді

$$\Psi = f_1(\xi)f_2(\eta)\Phi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{D-2}), \tag{2.4}$$

де

$$\Phi(\theta_1,...,\theta_{D-2}) = \prod_{k=1}^{D-2}\Phi_k(\theta_k).$$

Змінні $\xi,\eta,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{D-2}$ в (2.3) відокремлюються, і ми приходимо до необхідності розв'язувати наступну систему рівнянь:

$$\left[\frac{1}{\xi^{\frac{D-1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi^{\frac{D-1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{E}{2}+\frac{\beta_1}{\xi}-\frac{F}{4}\xi-\frac{m_{D-2}(m_{D-2}+D-3)}{4\xi^2}\right]f_1(\xi)=0, \tag{2.5a}$$

$$\left[\frac{1}{\eta^{\frac{D-1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta^{\frac{D-1}{2}}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{E}{2}+\frac{\beta_2}{\eta}+\frac{F}{4}\eta-\frac{m_{D-2}(m_{D-2}+D-3)}{4\eta^2}\right]f_2(\eta)=0, \qquad (2.5б)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^{\,2}}+m_1^{\,2}\right]\Phi_1(\theta_1)=0, \qquad (2.5в)$$

$$\left[\frac{1}{sin^{k-1}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}sin^{k-1}\theta_k\frac{\partial}{\partial\theta_k}-\frac{m_{k-1}(m_{k-1}+k-2)}{sin^2\theta_k}+m_k(m_k+k-1)\right]\Phi_k(\theta_k)=0, \qquad (2.5г)$$

$$k=2,3,...,D-2,$$

де $\beta_1,\beta_2,m_1,m_2,...,m_{D-2}$ – константи, що виникають при відокремленні змінних. Константи β_1 і β_2 зв'язані співвідношенням

$$\beta_1+\beta_2=Z. \qquad (2.5д)$$

Якщо D=2, то рівняння (2.5в), (2.5г) відсутні і $m_0=0$.

За допомогою перетворень

$$f_1(\xi)=\xi^{\frac{1-D}{4}}V(\xi), \qquad (2.6а)$$

$$f_2(\eta)=\eta^{\frac{1-D}{4}}U(\eta), \qquad (2.6б)$$

рівняння (2.5) приводяться до нормального вигляду – відправній точці побудови асимптотичних розкладів:

$$\frac{\partial^2V(\xi)}{\partial\xi^2}+\left[\frac{E}{2}-\frac{F}{4}\xi+\frac{\beta_1}{\xi}+\frac{1-\mu^2}{4\xi^2}\right]V(\xi)=0, \qquad (2.7а)$$

$$\frac{\partial^2U(\eta)}{\partial\eta^2}+\left[\frac{E}{2}+\frac{F}{4}\eta+\frac{\beta_2}{\eta}+\frac{1-\mu^2}{4\eta^2}\right]U(\eta)=0, \qquad (2.7б)$$

де

$$\mu=m_{D-2}+\frac{D-3}{2}. \qquad (2.7в)$$

Функції $V(\xi)$ і $U(\eta)$ повинні бути скінченними в нулі:

$$V(\xi)\underset{\xi\to0}{\approx}\xi^{\left(m_{D-2}+\frac{D-1}{2}\right)/2},\quad U(\eta)\underset{\eta\to0}{\approx}\eta^{\left(m_{D-2}+\frac{D-1}{2}\right)/2}. \qquad (2.8а)$$

На нескінченності функція $V(\xi)$ експоненційно спадає:

$$V(\xi)\underset{\xi\to\infty}{\approx}\frac{A}{\xi^{1/4}}\exp\left(-\frac{F^{1/2}}{3}\xi^{3/2}+\frac{E}{F^{1/2}}\xi^{1/2}\right). \qquad (2.8б)$$

Асимптотична поведінка $U(\eta)$ при $\eta\to\infty$ визначається формулою

$$U(\eta)\underset{\eta\to\infty}{\approx}\frac{B}{\eta^{1/4}}\sin\left(\frac{F^{1/2}}{3}\eta^{3/2}+\frac{E}{F^{1/2}}\eta^{1/2}+\Phi\right), \qquad (2.8в)$$

де A і B - постійні величини для даних значень F і E. Таким чином, задача для D-вимірного водневоподібного атома в електричному полі зводиться до розв’язку рівнянь (2.7а) і (2.7б), зв'язаних співвідношенням (2.5д) з граничними умовами (2.8а) - (2.8в).

3. Аналітичне отримання членів теорії збурень

Перейшовши в рівняннях (2.7а) і (2.7б) до нових змінних σ і ρ

$$\sigma=\xi\sqrt{-2E}\,,\quad \rho=\eta\sqrt{-2E}\,,\qquad (3.1а)$$

і вводячи нові параметри

$$R=(-2E)^{3/2}F^{-1},\quad \lambda_1=\beta_1(-2E)^{-1/2},$$
$$\lambda_2=\beta_2(-2E)^{-1/2},\qquad (3.1б)$$

одержуємо наступні рівняння для $V(\sigma)$ і $U(\rho)$:

$$\frac{\partial^2 V(\sigma)}{\partial\sigma^2}+\left[\frac{\lambda_1}{\sigma}+\frac{1-\mu^2}{4\sigma^2}-\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{4R}\right]V(\sigma)=0\,,\qquad (3.2а)$$

$$\frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial\rho^2}+\left[\frac{\lambda_2}{\rho}+\frac{1-\mu^2}{4\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{\rho}{4R}\right]U(\rho)=0\,.\qquad (3.2б)$$

Тут енергія виражається через постійні відокремлення у вигляді

$$E=-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{Z}\right)^{-2}.\qquad (3.2в)$$

Оскільки рівняння (3.2) відрізняються один від одного лише знаком величини R, достатньо розв’язати тільки одне з них, наприклад рівняння (3.2а). Поклавши

$$V(\sigma)=e^{-\sigma/2}\sigma^{(\mu+1)/2}f(\sigma)\,,\qquad (3.3)$$

отримуємо відносно $f(\sigma)$ наступне рівняння:

$$\sigma f''+(\mu+1-\sigma)f'+\left[\lambda_1-\frac{1}{2}(\mu+1)\right]f= =\left(\sigma^2/4R\right)f.\qquad (3.4)$$

Припускаючи, що поле F достатньо мале, величину R можна вважати великою. Отже, розв’язок рівняння (3.4) можна шукати у вигляді:

$$f=\sum_{l=0}^{\infty}f^{(l)}R^{-l}\,,\qquad (3.5а)$$

$$\lambda_1=\sum_{l=0}^{\infty}\lambda_1^{(l)}R^{-l}\,.\qquad (3.5б)$$

В нульовому наближенні вимога скінченності $f(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$, враховуючи (2.7в), приводить до поліномів Лагерра:

$$f^{(0)}(\sigma)=L_{n_1}^{m_{D-2}+\frac{D-3}{2}}(\sigma)\,,$$
$$\lambda_1^{(0)}=n_1+\frac{1}{2}\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right),\qquad (3.6)$$

де n_1–ціле невід’ємне число. Враховуючи вид рівняння (3.4), наступні порядки $f(\sigma)$ шукатимемо у вигляді лінійних комбінацій поліномів Лагерра:

$$f^{(l)}(\sigma)=\sum_{k=-2l}^{2l}C_k^{(l)}L_{n_1+k}^{m_{D-2}+\frac{D-3}{2}}(\sigma)\,.\qquad (3.7)$$

Підставляючи розклади (3.5), (3.7) і (2,7в) в рівняння (3.4), отримуємо наступне рекурентне співвідношення:

$$\begin{aligned}kC_k^{(l)}=&-\frac{1}{4}\{(n_1+k)(n_1+k-1)C_{k-2}^{(l-1)}-\\&-2(n_1+k)(2n_1+\mu+2k)C_{k-1}^{(l-1)}+[6n_1^2+6n_1\mu+\\&+6n_1+\mu^2+3\mu+2+6k(2n_1+\mu+k+1)]C_k^{(l-1)}-\\&2(n_1+\mu+k+1)(2n_1+\mu+2k+2)C_{k+1}^{(l-1)}+\\&(n_1+\mu+k+2)(n_1+\mu+k+1)C_{k+2}^{(l-1)}\}+\sum_{i=1}^{l-j}\lambda_1^{(i)}C_k^{(l-i)},\end{aligned}\qquad (3.8)$$

де

$$j=\begin{cases}\frac{1}{2}|k|, & \text{парні } k,\\ \frac{1}{2}(|k|+1), & \text{непарні } k\,.\end{cases}\qquad (3.9)$$

З (3.7) витікає, що $C_k^{(l)}=0$ при $|k|>2l$. Коефіцієнти, що визначаються умовою нормування, зручно вибрати у вигляді $C_0^{(l)}=\delta_{l0}$, де δ_{l0}–символ Кронекера.

При $k=0$ з (3.8) одержуємо вираз, що дозволяє визначити величини $\lambda_1^{(l)}$ через коефіцієнти $C_i^{(l-1)}$:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left[6n_1^2 + 6n_1\mu + 6n_1 + \mu^2 + 3\mu + 2\right], \quad (3.10а)$$

$$\lambda_1^{(l)} = \frac{1}{4}\Big[n_1(n_1-1)C_{-2}^{(l-1)} - 2n_1(2n_1+\mu)C_{-1}^{(l-1)} - 2(n_1+\mu+1)(2n_1+\mu+2)C_1^{(l-1)} + (n_1+\mu+2)(n_1+\mu+1)C_2^{(l-1)}\Big], \quad l>1. \quad (3.10в)$$

Вирази для $\lambda_2^{(l)}$ одержані при розв'язанні рівняння (2.7б), будуть відрізняться заміною n_1 на n_2 і заміною знака в непарних степенях F. Підставляючи вирази для $\lambda_1^{(l)}$ і $\lambda_2^{(l)}$ в рівняння (3.2б) і розв'язуючи його методом послідовних наближень, знаходимо наступний розклад для енергії в ряд по степеням поля F:

$$\begin{aligned}
E = &-\frac{Z^2}{2\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2} + \frac{3\left(n+\frac{D-3}{2}\right)\Delta}{2Z}F - \frac{\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^4}{16Z^4}\left[17\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2 - 3\Delta^2 - \right.\\
&\left. -9\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2 + 19\right]F^2 + \frac{3}{32Z^4}\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^7\Delta\left[23\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2 - \Delta^2 + \right.\\
&\left. +11\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2 + 39\right]F^3 - \frac{\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^{10}}{1024Z^4}\left[5487\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^4 + 35182\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2 - \right.\\
&-1134\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2\Delta^2 + 1806\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2\Delta^2 - 3402\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2 + 147\Delta^4 - \\
&\left. -549\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^4 + 5754\Delta^2 - 8622\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2 + 16211\right]F^4 + O\left(F^5\right),
\end{aligned} \quad (3.11)$$

де $n = n_1 + n_2 + m + 1$–головне квантове число, а $\Delta = n_1 - n_2$.

4. Розв'язок кутового рівняння (3.2б)

Для розв'язку рівняння (3.2б) зручно розбити область зміни величини ρ на два інтервали: $\Omega_+ = [0,\rho_1)$, де $\rho_1 << R$, який включає початок координат $\rho = 0$, і другий інтервал $\Omega_- = (\rho_0,\infty)$, який включає зовнішню точку повороту. Отримані для цих інтервалів розв'язки можна зшити в області $\rho_0 < \rho < \rho_1$, в якій вони обидва справедливі.

Розв'язок рівняння (3.2б) в області Ω_+ шукатимемо тим же методом, за допомогою якого ми розв'язували рівняння (3.2а). Підставимо в рівняння (3.2б) розв'язок у вигляді

$$U(\rho) = Ce^{-\rho/2}\rho^{\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)/2} f(\rho). \quad (4.1)$$

Накладемо на $f(\rho)$ умову обмеженості при $\rho \to \infty$. Тоді в нульовому порядку можемо написати

$$f^{(0)} = L_k^{m_{D-2}+\frac{D-3}{2}}(\rho),$$
$$\lambda_2^{(0)} = k + \frac{1}{2}\left(m_{D-2} + \frac{D-3}{2} + 1\right). \quad (4.2)$$

Аналогічно в наступному порядку маємо

$$f^{(1)} = -\frac{1}{8}(k+\mu)(k+\mu-1)L_{k-2}^{\mu} +$$
$$+\frac{1}{2}(k+\mu)(2k+\mu)L_{k-1}^{\mu} -$$
$$-\frac{1}{2}(k+1)(2k+\mu+2)L_{k+1}^{\mu} + \frac{1}{8}(k+1)(k+2)L_{k+2}^{\mu}, \quad (4.3а)$$

$$\lambda_2^{(1)} = -\frac{1}{4}\left[6k^2 + 6k\mu + 6k + \mu^2 + 3\mu + 2\right]. \quad (4.3б)$$

Виведення виразів (4.2) має на увазі, що спектр власних значень дискретний і що величина $k = n_2$ є невід'ємним цілим числом або нулем. Але при наявності навіть незначного електричного поля спектр власних значень стає неперервним. При малих F величина E_0 є центром смуги, в яку за наявності електричного поля розпливається лінія дискретного спектру. Щоб отримати таку смугу, необхідно відмовитися від жорсткої умови $k = n_2$ і розглядати k як величину, що змінюється у вузькому інтервалі $n_2 \pm \Delta$, де Δ–мала величина.

Якщо провести заміну $n_2 \to n_2 + \delta$, де δ експоненційно мала величина, то у виразі (4.1) слід перейти від поліномів Лагерра до вироджених гіпергеометричних функцій з подальшим розкладом їх по степенях δ.

В області Ω_- перейдемо в рівнянні (3.2б) до нової змінної

$$x = 1 - \frac{\rho}{R}, \quad (4.4)$$

одержуємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \left[-\frac{x}{4}R^2 + \frac{\lambda_2}{1-x}R + \frac{\tau}{(1-x)^2}\right]U(x) = 0, \quad (4.5а)$$

де

$$\tau = \left(1 - \left(m_{D-2} + \frac{D-3}{2}\right)^2\right)\Big/4. \quad (4.5б)$$

Для розв'язку рівняння (4.5а) скористаємося методом еталонного рівняння [10, 13]. В якості еталонного виберемо рівняння Ері

$$\left(d^2W(y)/dy^2\right) - yW = 0. \quad (4.6)$$

Розв'язок рівняння (4.5а) в області $-\infty < x < 1$, що включає точку повороту $x = 0$, можна записати у вигляді

$$U(x) = a(dy/dx)^{-1/2} Ai(y) + b(dy/dx)^{-1/2} Bi(y), \quad (4.7)$$

де $Ai(y)$ і $Bi(y)$– функції Ейрі. Вид лінійної комбінації функцій Ейрі в (4.7) вибраний так, щоб задовольнити умові випромінювання (2.8а), а коефіцієнти a і b визначаються умовою зшивання виразів (4.1) і (4.7) в області $\rho_0 < \rho < \rho_1$. Підставляючи розв'язок (4.7) в рівняння (4.5а), отримуємо наступне рівняння для $y(x)$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y = \frac{R^2 x}{4} - \frac{\lambda_2 R}{(1-x)} - \frac{\tau}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\langle y; x\rangle, \quad (4.8а)$$

де $\langle y; x\rangle = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$.

Для знаходження y підінтегральний вираз в (4.8а) розкладемо в ряд по степеням $1/R$ і проінтегруємо отриманий вираз. Для λ_2 береться його розклад в ряд по $1/R$, який одержується при виведенні виразу для E_0. Таким чином для області Ω_- знаходимо наступне співвідношення:

$$\frac{2}{3}y^{3/2}=\frac{R}{3}x^{3/2}-\chi\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+ + \frac{1}{2R}\left(\frac{2\chi^2}{\sqrt{x}}-\frac{2(\chi^2+\tau)\sqrt{x}}{1-x}\right)+O\left(R^{-2}\right), \tag{4.8б}$$

де $\chi=n_2+\frac{m_{D-2}+1}{2}+\frac{D-3}{4}$.

Скориставшись асимптотичними розкладами функцій $Ai(y)$ і $Bi(y)$ при $y\to\infty$ і враховуючи співвідношення (4.7), для області $0<x<1$ отримаємо розв'язок у вигляді

$$U(x)=\frac{a}{2}x^{-1/4}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{\chi}Exp\left(-\frac{R}{3}x^{3/2}\right)\left[1-\frac{1}{2R}\times\right. \times\left(\frac{5}{12}x^{-3/2}+\frac{4\chi^2}{\sqrt{x}}-\frac{2\chi}{x(1-x)}-\frac{2(\chi^2+\tau)}{1-x}\sqrt{x}\right)+ \left.+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]+bx^{-1/4}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{-\chi}Exp\left(\frac{R}{3}x^{3/2}\right)\left[1+\frac{1}{2R}\times\right. \times\left(\frac{5}{12}x^{-3/2}+\frac{4\chi^2}{\sqrt{x}}+\frac{2\chi}{x(1-x)}-\frac{2(\chi^2+\tau)}{1-x}\sqrt{x}\right)+ \left.+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]. \tag{4.9б}$$

Аналогічним чином, використовуючи асимптотичні вирази для функцій Ейрі при $y\to-\infty$, знаходимо асимптотичний розв'язок рівняння (4.5а) при $x\to-\infty$:

$$U(x)=a|x|^{-1/4}\sin\left[\frac{1}{3}R|x|^{3/2}+\right. \left.+\left(2n_2+m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)\mathrm{arctg}|x|^{1/2}+\frac{1}{4}\pi\right]+ +\mathrm{b}|x|^{-1/4}\cos\left[\frac{1}{3}R|x|^{3/2}+\right. \left.+\left(2n_2+m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)\mathrm{arctg}|x|^{1/2}+\frac{1}{4}\pi\right]. \tag{4.10}$$

Якщо у виразі (4.9б) перейти до змінної η, то можна показати, що воно співпадає з асимптотичним розв'язком (2.8в), якщо виконуються наступні умови:

$$B=\left(a^2+b^2\right)^{1/2}, \tag{4.11а}$$

$$\Phi=\frac{1}{4}\left(4n_2+2\left(m+\frac{D-3}{2}\right)+3\right)\pi+\mathrm{arctg}(b/a). \tag{4.11б}$$

5. Зшивання розв'язків

Функція (4.1), з врахуванням як експоненційно спадної так і експоненційно зростаючої частин, і функція (4.9б) є різними видами розв'язків рівняння (3.2б). В області $\rho_0<\rho<\rho_1$, в якій справедливі обидва ці розв'язки, їх можна зшити і виразити a і b через C і δ. Для цього у виразі (4.9б) потрібно перейти до змінної ρ і провести відповідні розклади при умові $\rho<<R$. Оскільки процедура зшивання досить громіздка, ми приведемо тут лише остаточні результати:

$$b=C\frac{(-1)^{n_2}(4R)^{n_2+\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)/2}}{e^{R/3}n_2!}\times \times\left[1-\frac{1}{8\mathrm{R}}\left(34n_2^2+34n_2\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)+46n_2+\right.\right. \left.7\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2+23\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)+\frac{53}{3}\right) \left.+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\right], \tag{4.12а}$$

$$a = C\frac{(-1)^{n_2+1}e^{R/3}\Gamma\left(n_2 + m_{D-2} + \frac{D-3}{2} + 1\right)2\delta}{(4R)^{n_2+\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)/2}}\times$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{8\mathrm{R}}\left(34n_2^2 + 34n_2\left(m_{D-2} + \frac{D-3}{2}\right) + 22n_2 + \right.\right.$$

$$\left. 7\left(m_{D-2} + \frac{D-3}{2}\right)^2 + 11\left(m_{D-2} + \frac{D-3}{2}\right) + \frac{17}{3}\right) +$$

$$\left. + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\right].$$

(4.12б)

5.1. Асимптотичні розклади для Γ

Як було зазначено вище величину δ ми ввели для того, щоб врахувати ширину смуги на яку розпливається дискретний атомний рівень при накладанні електричного поля. Використовуючи вираз (3.11), можна знайти зміну енергії, відповідну зміні k на величину δ:

$$\Delta E = \frac{\partial E_0}{\partial n_2}\delta = \delta\left(\frac{Z^2}{\left(n + \frac{D-3}{2}\right)^3} - \right. .$$

$$\left. - \frac{3}{2Z}\left(2n + m_{D-2} + \frac{D-3}{2} + 1\right)F + O\left(F^2\right)\right).$$

(5.1)

З формул (4.11) – (4.12) відразу видно, що при $\delta = 0$, тобто при $E = E_0$, асимптотична амплітуда B приймає мінімальне значення, а резонансна частина фазового зсуву $\mathrm{arctg}(b/a)$ проходить через $\pi/2$. Звідси витікає, що E_0 відповідає резонансній енергії квазістаціонарного стану.

Згідно формули Вайскопфа-Вігнера, фазовий зсув Φ в околі резонансної енергії E_0 може бути виражений як

$$\Phi = \Phi_0 + \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2(E - E_0)}\right), \qquad (5.2)$$

де Φ_0 - стала не залежна від енергії. Порівнюючи вирази (4.11б) і (5.2), знаходимо наступне співвідношення для Γ:

$$b/a = \Gamma/(2(E_0 - E)). \qquad (5.3)$$

Підставляючи в (5.3) значення коефіцієнтів b і a у відповідності з (4.12а) і (4.12б) і вирази (5.1) для $E - E_0 = \Delta E$ та використовуючи розклади R в ряд по степенях F одержуємо

$$\Gamma=\left(\frac{4}{F\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^3}\right)^{2n_2+m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1} Exp\left[3(n_1-n_2)-\frac{2}{3F\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^3}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^3\Gamma\left(n_2+m_{D-2}+\frac{D-3}{2}+1\right)n_2!}\left(1-\frac{\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^3}{4}\left(36\left(n+\frac{D-3}{2}\right)(n_1-n_2)-21(n_1-n_2)^2+\right.\right.$$
$$17\left(n+\frac{D-3}{2}\right)^2+68n_2^2+68n_2\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)+92n_2+5\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)^2+46\left(m_{D-2}+\frac{D-3}{2}\right)+\frac{163}{3}\Bigg)F+$$
$$\left.+O\left(F^2\right)\right).$$

(5.5)

6. Розв'язок рівнянь (2.5в), (2.5г)

Константи $-m_{D-2}(m_{D-2}+D-3)$ представляють собою власні значення оператора Лапласа на (D-2)–вимірних одиничних сферах S^{D-2} (при D>3) або на одиничному колі (при D=3). Якщо $m_1, m_2..., m_{D-2}$-цілі невід'ємні числа і $m_1 \le m_2 \le ... \le m_{D-2}$, то розв'язки рівнянь (2.5в), (2.5г) безперервні і однозначні на цих сферах або колі і мають вигляд [14, 15]:

$$\Phi(\theta_1)=\frac{\exp(\pm i m_1\theta_1)}{\sqrt{2\pi}},\ \mathrm{D}=3, \qquad (6.1)$$

$$\Phi(\theta_1,...,\theta_{D-2})=\frac{\exp(\pm i m_1\theta_1)}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\prod_{k=2}^{D-2}A_k\sin^{m_{k-1}}\theta_k C_{m_k-m_{k-1}}^{m_{k-1}+\frac{k-1}{2}}(\cos\theta_k),\ \mathrm{D}>3,$$

(6.2)

де $C_n^m(\cos\theta_k)$–поліноми Гегенбауера, A_k – постійні нормування.

З умови нормування хвильової функції

$$\int\left|\Phi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{D-2})\right|^2 d\Omega=1, \qquad (6.3)$$

де $d\Omega$ – елемент поверхні одиничної сфери, знаходимо постійні A_k:

$$\mathrm{A}^2{}_k\int_0^{\pi}\sin^{2m_{k-1}}\theta_k\left[C_{m_k-m_{k-1}}^{m_{k-1}+\frac{k-1}{2}}(\cos\theta_k)\right]^2\times$$
$$\times\sin^{k-1}\theta_k d\theta_k=1.$$

(6.4)

Після підстановки $t=\cos\theta_k$:

$$\mathrm{A}^2{}_k\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{p-1}{2}}\left[C_n^{p/2}(t)\right]^2 dt=1, \qquad (6.5)$$

де

$$\frac{p}{2}=m_{k-1}+\frac{k-1}{2},\ n=m_k-m_{k-1}. \qquad (6.6)$$

Виписаний інтеграл відомий, враховуючи (6.6) одержуємо:

$$\mathrm{A}_k=\sqrt{\frac{n!(p+2n)\Gamma^2(p/2)}{2^{2-p}\pi\Gamma(n+p)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(m_k-m_{k-1})!(2m_k+k-1)\Gamma^2(m_{k-1}+\frac{k-1}{2})}{2^{3-k-2m_{k-1}}\pi\,\Gamma(m_k+m_{k-1}+k-1)}}.$$

(6.7)

7. Обговорення результатів

Отримано асимптотичні розклади для власних функцій і власних значень енергії рівняння Шредінгера для D-вимірного водневоподібного атома в зовнішньому електричному полі F. Величину D у формулах можна вважати неперервною величиною починаючи із значення D>2 (умова $m_0 = 0$). На Рис.1 представлена залежність різних E_k для основного стану атома водню від розмірності простору, при значенні напруженості електричного поля $F = 0.02$. Тут E_k–вирази для енергії з точністю до $O(F^k)$, які отримуються з (3.11). Як добре видно з рисунка, ряди для енергії розходяться починаючи від значення $D \approx 5$, що обумовлене вибором асимптотики для функції (4.9б). Асимптотичний вираз (5.5) (при D=3) дає добрі результати в досить широкому інтервалі полів [11], але при умові, що n_2 і m_1 малі. При великих n_2 і m_1 область застосовності цієї формули обмежена дуже слабкими електричними полями, що не представляють практичного інтересу. Залежність ширини рівня Г від розмірності представлена на Рис.2. Для великих значень D ширина рівня Г практично не залежить від n і асимптотично прямує до нуля(в (5.5) використовувався лише перший член, оскільки врахування другого веде до від'ємних значень Г).

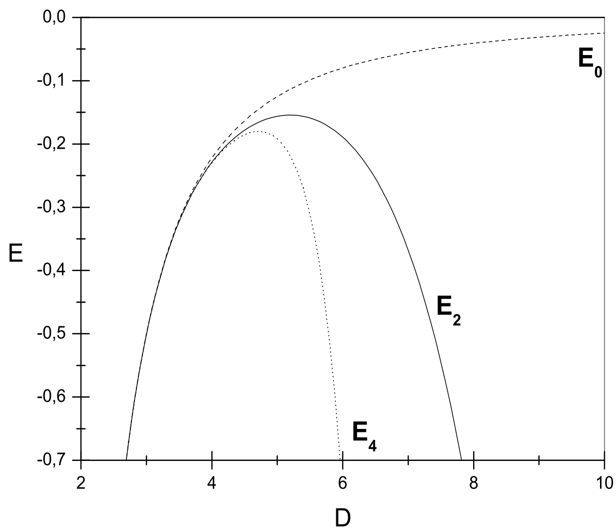

Рис. 1. Залежність E_k для основного стану атома водню від розмірності простору D.

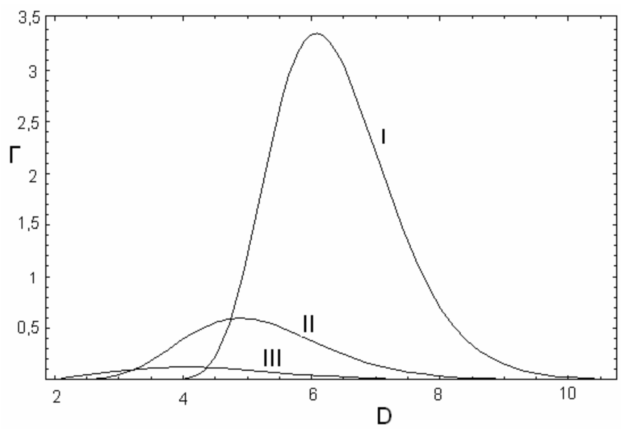

Рис. 2. Залежність величини Г для різних значень головного квантового числа n атома водню від розмірності простору D
($F = 0.02, n_1 = 0, n_2 = 0, m_{D\text{-}2} = 0$).
Крива I-$n = 1$, II-$n = 2$, III-$n = 3$.

Література

1. P. Erenfest, Proc. Amsterdam Acad. 20, 200 (1917); див. також Г.Е. Горелик. Размерность пространства. (Изд. МГУ, 1983).
2. Dimensional Scaling in Chemical Phisics, ed. by D.R. Herschbach, J.S. Avery, O. Goshinsky (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Netherland, 1993).
3. New Methods in Quantum Theory, ed.by C.A. Tsipis, V.S. Popov, D.R. Hershach, J.S. Avery. (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Netherland. 1996).
4. C.M. Bender, L.D. Mlodinov, N. Papanicolaou, Phys. Rev. A. 25. 1305 (1982).
5. V.S. Popov, V.D. Mur, A.V. Scheblykin, et al. Phys. Lett. A. 124, 77 (1987).
6. В.С. Попов, А.В. Сергеев ЖЭТФ, 105, 568 (1994).
7. В.Д. Мур, В.С. Попов, А. В. Сергеев, ЖЭТФ, 97, 32 (1990).
8. K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980).
9. С.П. Аллилуев, В.С. Попов ЖЭТФ. 104, 3569 (1993).
10. И.В. Комаров, Л.И. Пономарев, С.Ю. Славянов, Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. (М.: Наука. 1976).

11. R.J. Dammburg, V.V. Kolosov, in: Rydberg states of atoms and molecules. (Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1983).
12. С.Ю. Славянов в кн.: Проблемы математической физики. (Л.: Изд-во ЛГУ. 1970).
13. F.W.J Olver, Asymptotics and Special Functions. (N.Y.L.: Academic Press. 1974).
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. (М.: Наука.– 1967.– 1, 2).
15. Н.Ф. Трускова, ЯФ. 3, 790 (1982).

THEORY OF THE STARK EFFECT: INFLUENCE OF DIMENSION

I.M. Shvab, V.Yu. Lazur

Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Voloshin, 54

The theory of the Stark effect for the D–dimensional hydrogen-like atom is built. The asymptotic expansion of the Shroedinger equation for an atom in the homogeneous electric field in the D–dimensional parabolic coordinate systems are got. Asymptotic expressions for energy and width of level of energy spectrum is found.