ПРО ЛАГРАНЖЕВИЙ ПІДХІД ТА ДИНАМІЧНІ ЗМІННІ ДЛЯ СПІНОРНОГО ПОЛЯ У КАНОНІЧНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ ФОЛДІ – ВОТХОЙЗЕНА

І.Ю. Кривський, В.М. Симулик, Р.В. Тимчик

Інститут електронної фізики НАН України, відділ теорії елементарних взаємодій
88000, Ужгород, вул. Університетська, 21
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

Базуючись на аналогії з лагранжевим підходом до класичної механіки системи з довільним числом степенів вільності, побудований релятивістськи інваріантний лагранжевий підхід до спінорного поля у представленні Фолді – Вотхойзена. Знайдено динамічні змінні спінорного поля у цьому представленні. Закони збереження виражено у термінах квантовомеханічних імпульсно-спінових амплітуд частинки й античастинки, чим розкрито безпосередній фізичний зміст величин, що зберігаються. Поряд з відомими 10 законами збереження для спінорного поля, що є наслідками Пуанкаре-симетрії теорії, одержано 12 важливих додаткових величин, що зберігаються. Додаткові динамічні змінні є наслідками того факту, що у представленні Фолді - Вотхойзена окремо зберігаються і орбітальна, і спінова частини 4-моменту кількості руху спінорного поля.

1. Вступ

Стаття є безпосереднім продовженням робіт [1, 2]. Використовуються позначення та домовленості [1, 2]. З метою скорочення викладок на формули з [1,2] даються безпосередні посилання.

В даній роботі побудовано лагранжевий підхід та знайдено закони збереження для спінорного поля на основі рівняння Фолді – Вотхойзена (скорочено ФВ) [3], а не рівняння Дірака, яке використовується у відомих монографіях [4, 5] та багатьох інших оглядах теорії спінорного поля чи релятивістської квантової механіки. Представлений тут релятивістськи інваріантний лагранжевий підхід до спінорного поля у представленні ФВ має суттєву аналогію з лагранжевим підходом до класичної механіки системи з довільним числом степенів вільності. На основі введеного в розгляд лагранжіану та теореми Нетер одержано 10 основних (наслідків $\mathscr{P}$–симетрії рівняння ФВ) та 12 додаткових законів збереження для спінорного поля. Додаткові динамічні змінні є наслідками того факту що у представленні Фолді - Вотхойзена окремо зберігаються і орбітальна, і спінова частини 4-моменту кількості руху.

2. Спінорне поле у канонічному представленні ФВ

Уточнимо перш за все простір станів поля ϕ (тобто множину, у якій доцільно шукати розв'язки рівняння (3) із [2]). Прийняте у аксіоматичному підході припущення $\psi \in \mathbb{S}^{4,4\prime}$ (див., наприклад, [6]), з якого випливає, що $\phi \in \mathbb{S}^{4,4\prime}$ (де $\mathbb{S}^{4,4\prime} \equiv (\mathbb{S}(\mathrm{M}(1,3)) \otimes \mathrm{C}^4)'$ є множина 4-компонентних комплекснозначних узагальнених функцій Шварца над $\mathrm{M}(1,3)$), може бути конкретизоване внаслідок наступного твердження. З рівняння ФВ (як і з рівняння Дірака (10)) випливає, що кожна з компонент поля ϕ задовольняє рівняння Клейна – Гордона – Фока

$$\begin{gathered}\left(\Box + m^2\right)\phi(t,\vec{x}) = 0; \quad \phi \in S^{4,4\prime}, \\ \Box \equiv \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \partial^0\partial_0 - \Delta, \quad \Delta \equiv \partial_j^2.\end{gathered} \tag{1}$$

А вже звідси можна довести, що поле $\phi(x)$ (як і поле $\psi(x)$) фактично є звичайною, а не узагальненою функцією часової змінної t. Тому часову змінну t у рівнянні ФВ (3) із [2] можна вважати параметром (у даній, довільно фіксованій інерціальній системі відліку (ІСВ)), відносно якого поле ϕ бодай двічі диференційоване.

Далі, як видно з (3), (4) із [2], поле $\phi(x)$ безпосередньо зв'язане з квантовомеханічною хвильовою функцією $\xi(x)$ електрона та $\eta(x)$ позитрона, а саме,

$$\phi(x) = \phi^{-}(x) + \phi^{+}(x), \quad \phi^{-}(x) = \begin{vmatrix} \xi \\ 0 \end{vmatrix},$$
$$\phi^{+}(x) = \begin{vmatrix} 0 \\ \eta^{*} \end{vmatrix}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{H}_1. \tag{2}$$

позаяк простір $\mathbb{H}_1$ станів позитрона (як і електрона) інваріантний відносно операції C комплексного спряження, $C\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1$, то простором станів поля ϕ є пряма сума $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1 = \{\phi\}$ (тобто гільбертів простір станів електронно-позитронного $\vec{s}$-дублета, що визначається мірою d^3x Лебега), причому доцільним є залучення оснащеного гільбертового простору

$$\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}_2 \subset \mathbb{S}^{3,4\prime}, \tag{3}$$

який дозволяє залучати узагальнені розв'язки $\phi \in \mathbb{S}^{3,4\prime}$ рівняння ФВ (3) із [2], а область $\mathbb{S}^{3,4}$ (як щільну у $\mathbb{H}_2$ та $\mathbb{S}^{3,4\prime}$) доцільно взяти за область визначення (і значень) алгебри спостережуваних поля ϕ.

У відповідності з виразами (3), (4) із [2] та (2), (3), вказана алгебра будується як пряма сума алгебр спостережуваних для поля $\xi(x)$ хвильової функції та для поля $\eta^{*}(x)$ – функції, комплексно спряженої до хвильової функції $\eta(x)$ позитрона. І ця алгебра (у $\vec{x}$–реалізації простору $\mathbb{H}_2$) визначається (у даній, довільно фіксованій ІСВ) трьома породжуючими операторами, а саме оператором координати $\vec{x}$ поля ϕ (оператором множення функції $\phi(t,\vec{x})$ на незалежні змінні $\vec{x} \equiv (x^l) \in \mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$, де R^3 – спектр оператора $\vec{x}$), канонічно спряженим до $\vec{x}$ оператором імпульса $\vec{p} \equiv (p^l = -i\partial_l)$ поля ϕ (зі спектром $\mathrm{R}^3_{\vec{k}} = \{\vec{k} \equiv (k^l),\ k^l \in (-\infty,\infty)\}$) та оператором спіна $\vec{s}$ із (18) в [1] поля ϕ, який визначає відповідне 4-мірне матричне зображення групи SU_2 (універсальної накриваючої групи поворотів у реальному просторі $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$).

Зауваження 1. Обчислення моменту кількості руху у представленні ФВ на основі V–перетворення (1) із [2], стартуючи з моменту кількості руху у представленні Паулі – Дірака (ПД), дає

$$V\left(\vec{x}\times\vec{p}+\vec{s}\right)V^{-1} = \vec{x}\times\vec{p}+\vec{s}, \tag{4}$$

тобто повний момент кількості руху не міняється при перетворенні ФВ. Однак орбітальний та спіновий доданки повного моменту міняються при V–перетворенні (1) із [2], хоча їхня сума рівна $\vec{x}\times\vec{p}+\vec{s}$. Наголосимо, що орбітальним та спіновим моментами у ФВ-представленні не є образи $V\vec{x}\times\vec{p}V^{-1}$ та $V\vec{s}V^{-1}$ орбітального моменту $\vec{x}\times\vec{p}$ та спіна $\vec{s}$ (18) із [1]. Нагадаємо, що цими моментами у ФВ-представленні є відповідні оператори-функції операторів $\vec{x}, \vec{p}$ і $\vec{s}$ (18), які породжують алгебру спостережуваних у ФВ-представленні, а саме, оператори $\vec{x}\times\vec{p}$ та $\vec{s}$ (18) із [1] (це можна зрозуміти і на основі результату (4)). Оператори $\vec{x}\times\vec{p}$ та $\vec{s}$ (18) із [1] комутують з гамільтоніаном $H^{\mathrm{F}} = \gamma^0\omega$

$$\left[H^{\mathrm{F}}, \vec{x}\times\vec{p}\right] = 0, \quad \left[H^{\mathrm{F}}, \vec{s}\right] = 0, \tag{5}$$

отже, у ФВ-представленні окремо зберігаються (є інтегралами руху) і орбітальний, і спіновий моменти кількості руху.

Одним з фундаментальних об'єктів є оператор часової еволюції станів ϕ у $\mathbb{H}_2$, тобто гамільтоніан поля ФВ, $H^{\mathrm{F}} = \gamma^0\omega$, і саме він фігурує у рівнянні (3) із [2].

Оператором швидкості для поля ϕ є відповідна пряма сума

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{x}} = \frac{i}{\hbar}\left[H^{\mathrm{F}}, \vec{x}\right] = \gamma^0\frac{\vec{p}}{\omega}, \tag{6}$$

з відповідною її фізичною інтерпретацією.

Оператори енергії-імпульсу p_μ та 4-моменту $j_{\mu\nu}$, як відповідні прямі суми квантовомеханічних операторів для полів $\xi(x)$ та $\eta^*(x)$, мають вигляд ермітових у $\mathbb{H}_2$ операторів

$$\begin{cases} p_0 = \gamma^0\omega = H^{\mathrm{F}},\ \ p_l = i\partial_l,\ \ j_{ln} = m_{ln} + s_{ln}, \\ j_{0k} = x_0 p_k + \gamma^0\left(-x_k\omega + \dfrac{ip_k}{2\omega} + \dfrac{(\vec{s}\times\vec{p})_k}{\omega+m}\right). \end{cases} \quad (7)$$

Вони, як оператори на $\mathbb{S}^{3,4} \subset \mathbb{H}_2$, безумовно задовольняють $\mathcal{P}$–таблицю (5), (6) із [1], а також комутують з оператором $(i\partial_0 - \gamma^0\omega)$ рівняння (3) із [2], тому задають групу релятивістської інваріантності поля ФВ (як унітарне в $\mathbb{H}_2$ $\mathcal{P}$–зображення, що визначається формулою (7) із [1]). Дійсно, у термінах, наприклад, стаціонарного повного набору $(\vec{p},\ s_z = s^3)$ поля ϕ, загальний розв'язок рівняння ФВ (3) із [2] записується у вигляді

$$\phi(x) = V\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\left(a^{\mathrm{r}}(\vec{k})\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-}e^{-ikx} + b^{*\mathrm{r}}(\vec{k})\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+}e^{ikx}\right), \quad (8)$$
$$\mathrm{r} = 1, 2.$$

Безпосередніми обчисленнями легко переконатись, що множина $\{\phi\}$ розв'язків (8) інваріантна відносно згаданого унітарного $\mathcal{P}$–зображення в $\mathbb{H}_2$.

Як і у теоремі 1 з [2] для релятивістської квантової механіки електрона у представленні ФВ, набір ермітових у просторі $\mathbb{H}_2$ операторів $q^{\mathrm{orb}} = (p_\mu, m_{\mu\nu})$, одержаний з набору $q = (p_\mu, j_{\mu\nu})$ (7) при $\vec{s} = 0$, тобто набір

$$p_0 = \gamma^0\omega,\ \ p_l = i\partial_l,\ \ m_{ln} = x_l p_n - x_n p_l, \\ m_{0l} = tp_l + \gamma^0(-x_l\omega + \frac{ip_l}{2\omega}), \quad (9)$$

який містить лише орбітальні моменти кількості руху, також задовольняє комутаційним співвідношенням (5), (6) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри, комутує з оператором рівняння ФВ (3) із [2] і визначає за формулою (7) із [1] унітарне в $\mathbb{H}_2$ зображення $U(a,\omega; p_\mu, m_{\mu\nu})$ групи $\mathcal{P}$, яке теж є групою інваріантності рівняння ФВ для спінорного поля у канонічному представленні.

Зауважимо, що оператор (1) із [2] перетворення ФВ переводить загальний розв'язок (11) із [1] рівняння Дірака саме до вигляду (8). У виразі (8) використані позначення (11) із [1], а також додаткові до них позначення, а саме

$$\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}_{\mathrm{r}} \\ 0 \end{vmatrix},\ \ \mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{d}_{\mathrm{r}} \end{vmatrix},\ \ \mathrm{d}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},\ \ \mathrm{d}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

де $\mathrm{D}_r^{\mp}$ – це власні вектори оператора спіна $\vec{s}$ (18) із [1] спінорного ϕ-дублета (частинки-античастинки), інакше кажучи, орти 4-вимірного декартового базису в $\mathbb{H}_2$, зв'язані з ортами $v_{\mathrm{r}}^{\mp}(\vec{k})$ (15) із [1] так

$$\left(v_{\mathrm{r}}^{-}(\vec{k}) = V_{\vec{k}}^{-1}\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-},\ \ v_{\mathrm{r}}^{+}(\vec{k}) = V_{\vec{k}}\,\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+}\right) \\ \to \left(\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{-} = V_{\vec{k}}\,v_{\mathrm{r}}^{-}(\vec{k}),\ \ \mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{+} = V_{\vec{k}}^{-1}v_{\mathrm{r}}^{+}(\vec{k})\right). \quad (11)$$

Тут

$$V_{\vec{k}} = \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{k} + \tilde{\omega} + m}{\sqrt{2\tilde{\omega}(\tilde{\omega}+m)}}, \\ V_{\vec{k}}^{\dagger} = V_{\vec{k}}^{-1} \equiv \frac{-\vec{\gamma}\cdot\vec{k} + \tilde{\omega} + m}{\sqrt{2\tilde{\omega}(\tilde{\omega}+m)}}. \quad (12)$$

Як видно з (8), класичне спінорне поле ϕ у представленні ФВ є суперпозиція релятивістських квантовомеханічних імпульсно-спінових хвиль де Бройля частинки (електрона) (11) із [2] та відповідних комплексно спряжених до $\mathrm{e}_{\vec{k}\mathrm{r}}(t, \vec{x})$ (11) із [2] хвиль античастинки (позитрона), а залежні від $\vec{k}$, r коефіцієнти розкладу $a^{\mathrm{r}}(\vec{k})$ та $b^{*\mathrm{r}}(\vec{k})$ є відповідні імпульсно-спінові амплітуди (хвильові функції частинки (античастинки) у $\left(\vec{k},\ \frac{1}{2}\sigma^3\right)$-представленні).

Нагадаємо, що перетворення ФВ (1) із [2], задає зв'язок між канонічним представленням ФВ для спінорного поля та його стандартним представленням ПД, в якому польове рівняння має добре відомий вигляд (10) із [1]. Зв'язаними між собою виявляються не лише розв'язки рівнянь (3) із [2] та (10) із [1] (див. формули (1) із [2]), але й будь-які відповідні оператори A^{F} та A^{D} у представленнях ФВ та ПД:

$$A^{\mathrm{F}} = VA^{\mathrm{D}}V^{-1}, \quad A^{\mathrm{D}} = V^{-1}A^{\mathrm{F}}V, \quad (13)$$

де оператор V (1) із [2] як лінійний оператор у $\mathbb{H}_2$ є унітарним: $VV^{-1} = V^{-1}V = 1, \ V^{-1} = V^{\dagger}$.

Зокрема вкажемо зв'язок алгебри спостережуваних спінорного поля ϕ у канонічному представленні ФВ з адекватно визначеною алгеброю спостережуваних для поля ψ у представленні ПД. У [1] ми відмічали детально, що у локальному представленні ПД фізично незадовільними є означення оператора $\vec{x}$ (оператора множення спінорного поля $\psi(x)$ на незалежні змінні $\vec{x} \equiv (x^l) \in \mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$) як оператора координати цього поля та означення оператора $\vec{s}$ (18) із [1] як оператора спіна поля $\psi(x)$. У зв'язку з цим визначимо за формулою (13) оператори $A^{\mathrm{D}} = (\vec{x}^{\mathrm{D}}, \vec{p}^{\mathrm{D}}, \vec{s}^{\mathrm{D}})$ – образи у представленні ПД поля $\psi(x)$ відповідних операторів $(\vec{x}, \vec{p}, \vec{s})$, які є породжуючими алгебри спостережуваних спінорного поля $\phi(x)$ у його канонічному представленні:

$$\vec{x}^{\mathrm{D}} = V^{-1}\vec{x}V = \vec{x} + i\hbar c\frac{\vec{\gamma}}{2\omega} - \hbar\left[\frac{\vec{s}\times\vec{p}}{\omega(\omega+mc^2)} + \frac{i\vec{p}(\vec{\gamma}\cdot\vec{p})}{2\omega^2(\omega+mc^2)}\right], \quad (14)$$

$$\vec{p}^{\mathrm{D}} = V^{-1}\vec{p}V = \vec{p} = -i\hbar\nabla, \quad (15)$$

$$\vec{s}^{\mathrm{D}} = V^{-1}\vec{s}V = \vec{s} + \frac{2c^2\vec{p}(\vec{s}\cdot\vec{p}) - 2c^2\vec{s}\vec{p}^2 + ic(\vec{p}\times\vec{\gamma})(\omega+mc^2)}{2\omega(\omega+mc^2)}. \quad (16)$$

Оператори (14) – (16) слід називати «істинними» операторами координати, імпульса та спіна спінорного поля $\psi(x)$, що задовольняє рівнянню Дірака (10) із [1]. Як видно з (14) і (16) оператори $\vec{x}^{\mathrm{D}}$ та $\vec{s}^{\mathrm{D}}$ є істотно нелокальними, хоча їх спектр, безумовно, співпадає з спектром операторів $\vec{x}$ та $\vec{s}$. Таким чином, вся алгебра $\mathrm{A}_{\mathbb{S}^{3,4}}$ спостережуваних спінорного поля $\psi(x)$ (з областю визначення і значень $\mathbb{S}^{3,4}$) виявляється образом алгебри $\mathrm{A}_{\mathbb{S}^{3,4}}$ спостережуваних поля $\phi(x)$, яка визначена вище як пряма сума алгебр спостережуваних частинко-античастинкового дублета і яка породжується трьома ермітовими у $\mathbb{H}_2$ операторами $(\vec{x}, \vec{p}, \vec{s})$ для даного дублета.

У повній аналогії з викладеним вище генератори (19) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння Дірака (10) із [1] є образами генераторів (7) $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння ФВ (3) із [2] (і зв'язані з ними за формулами (13)). А локальні генератори (8) із [1] з лоренцовим спіном (18) із [1] $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння Дірака (10) із [1] є образами відповідної $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння ФВ (3) із [2], яка має наступний явний вигляд:

$$\begin{cases} p_\mu = i\partial_\mu, \quad j_{mn} = x_m p_n - x_n p_m + s_{mn}, \\ j_{0k} = x_0 p_k - x_k p_0 + s_{0k} \\ + \dfrac{i}{2\omega^2(\omega+m)}[p_0 p_k(\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+\omega) \\ +(\gamma_0 p_k - \gamma_k p_0)\omega(-\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+\omega+m)]. \end{cases} \quad (17)$$

У множині розв'язків рівняння Дірака (10) із [1] дві реалізації, а саме, (8) із [1] з лоренцовим спіном (18) із [1] та (19) із [1], $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння Дірака співпадають, тому закони збереження, які відповідають цим двом реалізаціям, також співпадають. Список відповідних законів збереження одержано, наприклад, у [4].

В повній аналогії з тим, що відмічено вище для локальних генераторів (8) із [1] (з $s_{\mu\nu}$ (18) із [1]) і (19) із [1], у множині розв'язків рівняння ФВ (3) із [2] дві реалізації (7) і (17) $\mathcal{P}$–алгебри інваріантності рівняння (3) із [2] також співпадають. Отже наборам генераторів (7) і (17) відповідають однакові набори величин, що зберігаються. .Враховуючи цей факт, надалі будемо працювати з ермітовими генераторами (7), які мають простіший явний вигляд і породжують унітарне в $\mathbb{H}_2$ зображення групи $\mathscr{P}$.

На відміну від квантовомеханічних рівнянь для $\vec{s}$-мультиплетів, рівняння ФВ (3) із [2] інваріантне відносно перетворень з повної групи Пуанкаре, зокрема, відносно інверсій часової змінної. Однак в цьому польовому формалізмі, незважаючи на те, що $\phi \in \mathbb{H}_2$, об’єкт ϕ не має змісту “хвильової функції”, тобто квантово-механічного стану дублета. Це наочно видно хоча б із того, що середнє значення оператора $p_0 = \gamma^0 \omega$ (образа генератора часових трансляцій) навіть у нормованому на одиницю стані має вигляд

$$\begin{aligned} p_0 = \gamma^0 \omega \rightarrow P_0 &\equiv \int d^3x \phi^\dagger(x) \gamma^0 \omega \phi(x) \\ &= \int d^3k \tilde{\omega} \left(\left| a^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \right|^2 - \left| b^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \right|^2 \right), \end{aligned} \tag{18}$$

тобто, взагалі кажучи, на класичному рівні є знаконевизначеним. Тому ФВ-поле ϕ, навіть будучи нормованим на одиницю (у просторі $\mathbb{H}_2$), втрачає стандартний квантовомеханічний зміст: воно є класичним спінорним полем у ФВ-представленні, хоча і виражається за формулами (2), (8) через квантовомеханічні хвильові функції частинки та античастинки. Це означає, зокрема, що поле ϕ , будучи класичним електронно-позитронним полем, відрізняється від класичного електро-магнітного поля $(\vec{E}, \vec{H})$ або фотонного поля $\vec{\mathscr{E}} = \vec{E} - i\vec{H}$. На відміну від полів $(\vec{E}, \vec{H})$ (або $\vec{\mathscr{E}} = \vec{E} - i\vec{H}$) поле ϕ не є безпосередньо спостережуваним полем на класичному рівні. Звичайно, після процедури квантування (а саме, фермі-квантування), квантоване поле ϕ є спостережуваним у стандартному для теорії квантованих полів сенсі.

Однак, на відміну від ψ^- (26) із [1] та ψ^+ (27) із [1], кожний з доданків $\phi^\mp$ поля ϕ безпосередньо зв’язаний з хвильовою функцією частинки (античастинки), а саме, $\phi^-(x)$ і $\left(\phi^+(x)\right)^*$ є квантовомеханічними станами (у $\mathbb{H}_2$) частинки і, відповідно, античастинки. Тому і при наявності взаємодії поля ϕ з іншими полями (наприклад, з полем $A = (A^\mu)$), складовими $\phi^-(x)$ та $\left(\phi^+(x)\right)^*$, і відповідним чином модифікованими спостережуваними для цих складових, можна користуватись безпосередньо як квантовомеханічними станами та спостережуваними (і тут не виникає нефізичне поняття негативної енергії античастинки).

Важливо підкреслити, що, як і в релятивістській квантовій механіці електрона або $\vec{s}$-мультиплету, у розглянутому вище канонічному представленні ФВ для спінорного поля (класичного поля електрон-позитронного дублету) фізична інтерпретація координати, швидкості, спіну (та інших величин) є прозорою і безпосередньою (зокрема, координата тут є просто декартовою, $\vec{x} \in \mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$). При цьому, зокрема, немає ніякої потреби (як цього вимагає рівняння Дірака (10) із [1]) залучати нефізичні поняття “від’ємної енергії” для античастинки. Перелічені в роботі [1] недоліки мають місце лише у звичайному (історично першому) представленні для спінорного поля, тобто у представленні ПД).

Таким чином, рівняння ФВ (3) із [2], на відміну від рівняння Дірака (10) із [1], має безпосередню квантовомеханічну інтерпретацію.

Зауваження 2. Маючи зв'язок (28) із [1] та (13) між представленнями ПД та ФВ і коректну теорію спінорного поля у представленні ФВ, неважко, зробивши обернене перетворення ФВ, також знайти коректні з точки зору квантової механіки вирази для операторів координати, швидкості, орбітального та спінового моментів безпосередньо у представленні ПД. Це зроблено, частково, у зауваженні 1 та виразах (14), (16)). Внаслідок суттєвої зміни виразів для спіна (16) і координати

(14) навіть для гамільтоніана H (21) із [1] маємо:

$$\left[H, \vec{s}^{\,\mathrm{D}}\right] = 0, \quad \left[H, \vec{x}^{\,\mathrm{D}} \times \vec{p}\right] = 0, \qquad (19)$$

а вираз для оператора швидкості тепер має чіткий фізичний зміст

$$\dot{\vec{x}} = \frac{i}{\hbar}\left[H, \vec{x}^{D}\right] = \gamma^0 \frac{\vec{p}}{\omega}. \qquad (20)$$

В цілому саме у такий спосіб визначені спостережувані $\vec{x}^{\mathrm{D}}, \vec{p}, \vec{s}^{\mathrm{D}}$ (14) – (16) з областю визначення і значень $\mathbb{S}^{3,4}$, а також породжувана ними алгебра $\mathrm{A}_{\mathbb{S}^{3,4}}$, мають адекватний фізичний зміст операторів спостережуваних для спінорного поля $\psi(x)$ у його ПД-представленні. Саме таким чином стандартне рівняння Дірака (10) із [1] може мати послідовну квантовомеханічну інтерпретацію (завдяки введенню в розгляд нелокальних операторів координати, швидкості, спіна і т.д.).

3. Лагранжевий підхід до теорії класичного спінорного поля у представленні Фолді – Вотхойзена

Покажемо тепер, як слід будувати релятивістськи інваріантний лагранжевий підхід для спінорного поля в його канонічному представленні ФВ, не апелюючи до явно коваріантних понять, а використовуючи лише певну аналогію з лагранжевим підходом у класичній механіці систем з (нескінчено) великим числом степенів вільності. Ця аналогія стає повною, якщо стартувати з імпульсної (точніше, імпульсно-спінової) реалізації простору станів поля ФВ, елементи якого $\tilde{\phi}(t,\vec{k})$ зв'язані з полем $\phi(t,\vec{x})$ перетворенням Фур'є

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}_2 \supset \phi(t,\vec{x}) \to \tilde{\phi}(t,\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{-i\vec{k}\vec{x}} \phi(t,\vec{x}) \in \tilde{\mathbb{H}}_2, \end{aligned} \qquad (21)$$

причому квадрат норми у $\vec{k}$-реалізації задається мірою Лебега

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\phi}\right\|^2 &= \int d^3k \tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})\tilde{\phi}(t,\vec{k}) \\ &< \infty \leftrightarrow \tilde{\phi} \in \tilde{\mathbb{H}}_2, \end{aligned} \qquad (22)$$

а рівняння ФВ для векторів $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathbb{H}}_2$ має вигляд

$$\begin{aligned} &\left(i\partial_0 - \gamma^0\tilde{\omega}\right)\tilde{\phi}(t,\vec{k}) = 0, \\ &\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad \vec{k} \in \mathrm{R}^3_{\vec{k}}, \quad \tilde{\phi} \in \tilde{\mathbb{S}}^{3,4}, \end{aligned} \qquad (23)$$

(нагадаємо, що простір $\mathbb{S}^{3,4}$, як і оснащений гільбертів простір, інваріантний відносно перетворення Фур'є). Повна аналогія з класичною механікою зумовлена тим, що рівняння ФВ (23) є диференціальне рівняння першого порядку відносно параметра t і континуально нескінченою системою алгебраїчних рівнянь відносно числової динамічної змінної $\vec{k} \in \mathrm{R}^3_{\vec{k}}$.

Розглядаючи 4-компонентне поле $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t,\vec{k}) = \left(\tilde{\phi}^{\alpha}_{\vec{k}}(t)\right)$ як польову координату $\left(\tilde{\phi}^{\alpha}_{\vec{k}}(t)\right)$ з континуальним числом компонент за змінною $\vec{k}$ та дискретним числом компонент за змінною $\alpha = \overline{1,4}$, запишемо первісну функцію Лагранжа (за термінологією L–підходу, деталізованого, наприклад, у [7]) як функцію відповідних числових змінних у вигляді

$$\begin{aligned} L &= L(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^{\dagger}, \tilde{\phi}_{,0}, \tilde{\phi}^{\dagger}{}_{,0}) \\ &= \frac{i}{2}\left(\tilde{\phi}^{\dagger}(\tilde{\phi}_{,0} + i\gamma^0\tilde{\omega}\tilde{\phi}) - (\tilde{\phi}^{\dagger}{}_{,0} - i\tilde{\omega}\tilde{\phi}^{\dagger}\gamma^0)\tilde{\phi}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\tilde{\phi}^{\dagger}\tilde{\phi}_{,0} - \tilde{\phi}^{\dagger}{}_{,0}\tilde{\phi} + 2i\tilde{\phi}^{\dagger}\tilde{\omega}\gamma^0\tilde{\phi}\right). \end{aligned} \qquad (24)$$

А дію, як функціонал $W\left[t; \tilde{\phi}, \tilde{\phi}^{\dagger}\right]$ від функцій $\tilde{\phi}(t,\vec{k}), \tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})$ та числової змінної $t \in (-\infty, \infty)$ визначаємо за формулою

$$W\left[t;\tilde{\phi},\tilde{\phi}^{\dagger}\right]\overset{\mathrm{df}}{=}\int d^3kL(t,\vec{k});\quad \tilde{\phi},\tilde{\phi}^{\dagger}\in\tilde{\mathbb{S}}^{3,4}, \tag{25}$$

де $L(t,\vec{k})$ знаходиться з первісного лагранжіану (81) заміною числових змінних $\left(\tilde{\phi}_{\vec{k}}^{\alpha}\right)\equiv\tilde{\phi},\ \tilde{\phi}^{\dagger},\ \tilde{\phi},_0,\ \tilde{\phi}^{\dagger},_0$ функціями $\tilde{\phi}(t,\vec{k})=(\tilde{\phi}^{\alpha}(t,\vec{k})),\ \tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})$ та, відповідно, їх похідними за часом $\partial_0\tilde{\phi}(t,\vec{k}),\ \partial_0\tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})$, що належать $\tilde{\mathbb{S}}^{3,4}$ (у наступній формулі маються на увазі саме такі заміни).

Легко переконатись, що рівняння Ейлера – Лагранжа

$$\begin{gathered}\frac{\delta W}{\delta\tilde{\phi}^{\dagger}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\tilde{\phi}^{\dagger}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\tilde{\phi}^{\dagger},_0}=0,\\ \frac{\delta W}{\delta\tilde{\phi}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\tilde{\phi}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\tilde{\phi},_0}=0,\end{gathered} \tag{26}$$

для дії (25) співпадають з рівнянням (23) та спряженим до нього рівнянням для $\tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})$.

Аналогічно будується L–підхід у будь-якій реалізації простору $\mathbb{H}_2$, пов'язаній з повним набором динамічних змінних у $\mathbb{H}_2$ як діагональних операторів. Зокрема, у $\vec{x}$-реалізації простору $\mathbb{H}_2$ відповідні лагранжіан та дія мають вигляд

$$\begin{gathered}L(t,\vec{x})=\frac{i}{2}[\phi^{\dagger}(t,\vec{x})\partial_0\phi(t,\vec{x})\\ -(\partial_0\phi^{\dagger}(t,\vec{x}))\phi(t,\vec{x})+2i\phi^{\dagger}(t,\vec{x})\omega\gamma^0\phi(t,\vec{x})],\end{gathered} \tag{27}$$

$$W\left[t;\phi,\phi^{\dagger}\right]\overset{\mathrm{df}}{=}\int d^3kL(t,\vec{k});\quad \phi,\phi^{\dagger}\in\mathbb{S}^{3,4}, \tag{28}$$

де функція $(\omega\phi)(t,\vec{x})$ (результат дії псевдодиференціального оператора $\omega=\sqrt{-\Delta+m^2}$ на $\phi\in\mathbb{H}_2$ визначається через функцію $\phi(t,\vec{x})$ за формулою

$$(\omega\phi)(t,\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3ke^{i\vec{k}\vec{x}}\tilde{\omega}\tilde{f}(t,\vec{k}). \tag{29}$$

Незважаючи на притаманні канонічному представленню ФВ виділеність часу t та використання явно нековаріантних понять, таких як d^3k, d^3x та ін., запропонований L–підхід є релятивістськи інваріантним у наступному змісті. Множина $\{\phi\}\subset\mathbb{H}_2$ екстремалей дії (28) (множина розв'язків (8) рівняння Ейлера – Лагранжа для $\phi(t,\vec{x})$, що співпадає з рівнянням (3) із [2]) є $\mathcal{P}$–інваріантна (а саме, вона інваріантна відносно унітарного в $\mathbb{H}_2$ зображення групи $\mathcal{P}$ породжуваного ермітовими $\mathcal{P}$-генераторами (7)).

Теорема Нетер для ермітових операторів q інваріантності рівняння (3) із [2] для $\phi(t,\vec{x})$ (з наведеною в [7] деталізацією та уточненнями) дає наступну формулу для закону збереження $Q(t)=Const$, що відповідає ермітовому оператору q:

$$\begin{gathered}q\to Q=\int d^3x\phi^{\dagger}(t,\vec{x})q\phi(t,\vec{x})\\ =\int d^3k\tilde{\phi}^{\dagger}(t,\vec{k})\tilde{q}\tilde{\phi}(t,\vec{k})\end{gathered} \tag{30}$$

(де $\tilde{q}$ є фурьє-образ в $\tilde{\mathbb{H}}_2$ оператора q в $\mathbb{H}_2$). Зрозуміло, що формула Нетер (30) співпадає з формулою для середнього значення в $\mathbb{H}_2$ (чи в $\tilde{\mathbb{H}}_2$) довільної спостережуваної q з алгебри спостережуваних $\mathrm{A}_{\mathbb{S}^{3,4}}$.

Таким чином, для знаходження основних законів збереження для спінорного поля досить підставити у формулу (30) генератори $q=\left(p_0,\,p_l,\,j_{ln},\,j_{0l}\right)$ (7) $\mathcal{P}$–симетрії рівняння ФВ (3) із [2].

Підкреслимо, що, на відміну від операторів (19) із [1] у ПД-представленні, тут у ФВ-представленні генераторів (7) $\vec{x}=(x^j)$ є координата, а $\vec{s}$ є спін, тобто кожен елемент набору (7) має чіткий фізичний зміст. Отже спін тут комутує з гамільтоніаном і зберігається окремо, сам по собі. Сам по собі зберігається і орбітальний момент. Це справедливо як для просторових, так і для бустових моментів. Тому, в порівнянні з ПД-представленням у ФВ-представленні маємо додаткові закони збереження M_{ln}, M_{0l}, S_{ln}, S_{0l} орбітальних та, відповідно, спінових частин повних просторового та бустового моментів.

Зауваження 3. Задачу знаходження додаткових законів збереження M_{ln}, M_{0l}, S_{ln}, S_{0l} для спінорного поля на основі теореми Нетер можна вирішувати двома способами: по-перше, у представленні ПД на основі нелокальних операторів орбітального моменту і спіна (детальніше див. у зауваженні 2), по-друге, у канонічному представленні ФВ. Другий шлях має переваги. Оператори мають простіший вигляд, а розгляд проводиться в рамках строгих квантовомеханічних принципів канонічного представлення. Саме цей шлях пропонується у даній роботі.

Згідно формули (30) десять основних законів збереження для спінорного поля ФВ, які є наслідками $\mathcal{P}$-симетрії (7) рівняння ФВ (3) із [2], мають вигляд:

$$P_0 = \int d^3x \phi^{\dagger}(x)\gamma^0 \omega \phi(x), \tag{31}$$

$$P_l = \int d^3x \phi^{\dagger}(x) i\partial_l \phi(x), \tag{32}$$

$$J_{mn} = \int d^3x \left[\phi^{\dagger}(x)(x_m p_n - x_n p_m + s_{mn})\phi(x)\right], \tag{33}$$

$$J_{0l} = \int d^3x \{\phi^{\dagger}(x)[x_0 p_l + \gamma_0(-x_l\omega + \frac{ip_l}{2\omega} + \frac{(\vec{s}\times\vec{p})_l}{\omega+m})]\phi(x)\}, \tag{34}$$

Відмітимо, що закони збереження J_{mn} (33) та J_{0l} (34) є сумами величин, що зберігаються окремо, а саме – орбітальних та спінових моментів кількості руху. Таким чином, маємо ще 12 додаткових законів збереження

$$M_{mn} = \int d^3x \left[\phi^{\dagger}(x)(x_m p_n - x_n p_m)\phi(x)\right], \tag{35}$$

$$S_{mn} = \int d^3x \left[\phi^{\dagger}(x) s_{mn}\phi(x)\right], \tag{36}$$

$$M_{0l} = \int d^3x \{\phi^{\dagger}(x)[x_0 p_l + \gamma_0(-x_l\omega + \frac{ip_l}{2\omega})\phi(x)]\}, \tag{37}$$

$$S_{0l} = \int d^3x [\phi^{\dagger}(x)\gamma^0 \frac{(\vec{s}\times\vec{p})_l}{\omega+m}\phi^{\dagger}(x)]. \tag{38}$$

Наочний фізичний та математичний зміст основних законів збереження – енергії-імпульсу P_μ та 4-моменту $J_{\mu\nu}$ (що виражають однорідність та ізотропність простору-часу M(1,3), у якому змінюється поле $\phi(t,\vec{x})$), а також додаткових законів збереження M_{ln}, M_{0l}, S_{ln}, S_{0l} легко розшифрувати, виразивши їх через імпульсно-спінові амплітуди $a^r(\vec{k}),\, b^r(\vec{k})$, які визначають загальний розв'язок рівняння ФВ (3) із [2], тобто через квантовомеханічні амплітуди частинки-античастинки (електрона та позитрона). Справедлива

Теорема. У термінах імпульсно-спінових амплітуд $a^r(\vec{k}),\, b^r(\vec{k})$ закони збереження (31) – (34) (наслідки $\mathcal{P}$-симетрії рівняння ФВ, тобто генераторів $q = (p_0,\, p_l,\, j_{ln},\, j_{0l})$ (7)) мають вигляд

$$q \to Q = \int d^3k f^{\dagger}\tilde{q} f \;, \tag{39}$$

де оператори $\tilde{q} = (\tilde{p}_0,\, \tilde{p}_l,\, \tilde{j}_{ln},\, \tilde{j}_{0l})$, що діють на імпульсно-спінові амплітуди

$$f = \left| \begin{matrix} a^1(\vec{k}) \\ a^2(\vec{k}) \\ \overset{*}{b}{}^1(\vec{k}) \\ \overset{*}{b}{}^2(\vec{k}) \end{matrix} \right|, \quad f^{\dagger} = \left| \overset{*}{a}{}^1(\vec{k}) \;\; \overset{*}{a}{}^2(\vec{k}) \;\; b^1(\vec{k}) \;\; b^2(\vec{k}) \right|, \tag{40}$$

мають вигляд

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 = \gamma^0 \tilde{\omega}, \quad \tilde{p}_l = \gamma^0 k_l, \\ \tilde{j}_{ln} = \tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l + s_{ln}, \\ \tilde{j}_{0l} = -\frac{1}{2}\{\tilde{x}, \tilde{\omega}\} + \gamma_0 \dfrac{(\vec{s}\times\vec{k})_l}{\tilde{\omega}+m} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

($\tilde{x}_l \equiv -i\dfrac{\partial}{\partial k^l}$, спінові оператори $s_{mn} = (\vec{s})$ ті ж самі, що і у (18) із [1]). Оператори $\tilde{q} = (\tilde{p}_0,\, \tilde{p}_l,\, \tilde{j}_{ln},\, \tilde{j}_{0l})$ (41) (як і оператори орбітального набору

$$\tilde{q}^{\text{orb}} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 = \gamma^0 \tilde{\omega}, \quad \tilde{p}_l = \gamma^0 k_l \\ \tilde{m}_{ln} = \tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l, \\ m_{0l} = -\frac{1}{2}\{\tilde{x}, \tilde{\omega}\} \end{pmatrix}, \qquad (42)$$

які за формулою (39) також задають закони збереження), що діють у гільбертовому просторі імпульсно-спінових амплітуд $\{\tilde{f}\}$, задовольняють комутаційним співвідношенням ((5), (6) із [1]) $\mathscr{P}$-алгебри у явно коваріантній формі.

Доведення теореми здійснюється безпосереднім обчисленням відповідних виразів та комутаторів, **q.e.d.**

Таким чином, список законів збереження для спінорного поля, виражений явно через квантовомеханічні імпульсно-спінові амплітуди, має вигляд:

$$P_0 = \int d^3k \left[a^{*\mathrm{r}}(\vec{k}) \tilde{\omega} a^{\mathrm{r}}(\vec{k}) - b^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \tilde{\omega} b^{*\mathrm{r}}(\vec{k}) \right], \qquad (43)$$

$\mathrm{r} = 1, 2,$

$$P_l = \int d^3k \left[a^{*r}(\vec{k}) k_l a^r(\vec{k}) - b^r(\vec{k}) k_l b^{*r}(\vec{k}) \right], \qquad (44)$$

$$\begin{aligned} M_{ln} = \int d^3k [&a^{*\mathrm{r}}(\vec{k}) \left(\tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l \right) a^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \\ &+ b^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \left(\tilde{x}_l k_n - \tilde{x}_n k_l \right) b^{*\mathrm{r}}(\vec{k})], \end{aligned} \qquad (45)$$

$$\begin{aligned} &S^1 = S_{23} = \int d^3k \tilde{s}^1, \quad S^2 = S_{31} = \int d^3k \tilde{s}^2, \\ &S^3 = S_{12} = \int d^3k \tilde{s}^3, \end{aligned} \qquad (46)$$

$$\begin{aligned} M_{0l} = -\frac{1}{2} \int d^3k [&a^{*r}(\vec{k}) \{\tilde{x}_l, \omega\} a^r(\vec{k}) \\ &- b^r(\vec{k}) \{\tilde{x}_l, \omega\} b^{*r}(\vec{k})], \end{aligned} \qquad (47)$$

$$S_{0l} = -\int d^3k \frac{(\vec{\tilde{s}} \times \vec{k})_l}{\tilde{\omega} + m}, \qquad (48)$$

де

$$\begin{cases} \tilde{s}^1 = \tilde{s}_{23} = \dfrac{1}{2}[a^{*1}(\vec{k}) a^2(\vec{k}) + a^{*2}(\vec{k}) a^1(\vec{k}) \\ \qquad + b^1(\vec{k}) b^{*2}(\vec{k}) + b^2(\vec{k}) b^{*1}(\vec{k})], \\ \tilde{s}^2 = \tilde{s}_{31} = \dfrac{i}{2}[a^{*2}(\vec{k}) a^1(\vec{k}) - a^{*1}(\vec{k}) a^2(\vec{k}) \\ \qquad + b^2(\vec{k}) b^{*1}(\vec{k}) - b^1(\vec{k}) b^{*2}(\vec{k})], \\ \tilde{s}^3 = \tilde{s}_{12} = \dfrac{1}{2}[a^{*1}(\vec{k}) a^1(\vec{k}) - a^{*2}(\vec{k}) a^2(\vec{k}) \\ \qquad + b^1(\vec{k}) b^{*1}(\vec{k}) - b^2(\vec{k}) b^{*2}(\vec{k})], \end{cases} \qquad (49)$$

а також, звичайно,

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \qquad (50)$$

де $J_{\mu\nu}$ є, звичайно, сумою доданків, кожний з яких зберігається окремо.

Зауважимо, що фактом наявності окремо взятих законів збереження орбітального та спінового моментів кількості руху спінорного поля, ці закони суттєво відрізняються від тих, котрі обчислені в [4] та багатьма іншими авторами, які використовували рівняння Дірака (10) із [1], а не рівняння ФВ (3) із [2]. Представлені тут закони збереження легко розділити на вирази для ферміона та антиферміона.

Процедура квантування проводиться стандартним канонічним способом, тобто через запропонований лагранжіан (27), координату поля та канонічно спряжений до неї імпульс поля. Вимоги одночасових антикомутаційних співвідношень до цих канонічно спряжених величин зводяться до заміни в загальному розв'язку (8) для поля ϕ квантовомеханічних амплітуд $a^{\mathrm{r}}(\vec{k}), b^{\mathrm{r}}(\vec{k})$ операторами $\hat{a}^{\mathrm{r}}(\vec{k}), \hat{b}^{\mathrm{r}}(\vec{k})$, що задовольняють антикомутаційним співвідношенням Фермі

$$\begin{aligned} &\left\{ \hat{a}^{\mathrm{r}}(\vec{k}), \hat{a}^{\dagger \mathrm{r}'}(\vec{k}') \right\} = \delta_{rr'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ &\left\{ \hat{b}^{\mathrm{r}}(\vec{k}), \hat{b}^{\dagger \mathrm{r}'}(\vec{k}') \right\} = \delta_{rr'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \qquad (51)$$

(інші антикомутатори з довільними $\vec{k}$, r тотожньо дорівнюють нулеві). Ці оператори визначають базисні вектори

$$\begin{aligned} &\left\{ \hat{a}^{\dagger \mathrm{r}_1}(\vec{k}_1) \hat{a}^{\dagger \mathrm{r}_2}(\vec{k}_2) \ldots \hat{b}^{\dagger \mathrm{r}'_1}(\vec{k}'_1) \hat{b}^{\dagger \mathrm{r}'_2}(\vec{k}'_2) \ldots \middle| \; \right\rangle \Big\}, \\ &a^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \big| \; \big\rangle = 0, \quad b^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \big| \; \big\rangle = 0, \end{aligned} \qquad (52)$$

у просторі Фока $\mathbb{H}^{\text{Фока}}$ квантованого поля $\hat{\phi}$, а вирази P_μ (43), (44), $J_{\mu\nu}$ (50) для відповідних квантовомеханічних середніх поля після заміни в них $(a^{\mathrm{r}}, b^{\mathrm{r}}) \to (\hat{a}^{\mathrm{r}}, \hat{b}^{\mathrm{r}})$ (та переозначення їх як нормальних добутків) перетворюються в $\mathscr{P}$-генератори (як ермітові в $\mathbb{H}^{\text{Фока}}$ оператори, що задовольняють явно коваріантні комутаційні співвідношення ((5), (6)) із [1]) унітарного $\mathscr{P}$-зображення у просторі Фока. При цьому оператор енергії $\widehat{P}_0$ стає знаковизначеним

$$\begin{aligned}\widehat{P}_0 &= \int d^3k : [\widehat{a}^{\dagger\mathrm{r}}(\vec{k})\tilde{\omega}\widehat{a}^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \\ &\quad - \widehat{b}^{\mathrm{r}}(\vec{k})\tilde{\omega}(\vec{k})\widehat{b}^{\dagger\mathrm{r}}(\vec{k})]: \\ &= \int d^3k[\widehat{a}^{\dagger\mathrm{r}}(\vec{k})\tilde{\omega}\widehat{a}^{\mathrm{r}}(\vec{k}) \\ &\quad + \widehat{b}^{\dagger\mathrm{r}}(\vec{k})\tilde{\omega}\widehat{b}^{\mathrm{r}}(\vec{k})], \quad \mathrm{r} = 1, 2,\end{aligned} \tag{53}$$

(тобто у будь-якому стані у просторі Фока ферміон-антиферміонного поля енергія квантованого спінорного поля є позитивною).

Підкреслимо, що, незважаючи на явно нековаріантну процедуру канонічного квантування поля ϕ, одержаний формалізм квантованого поля $\widehat{\phi}$ є коваріантним і фактично співпадає з аксіоматичним формулюванням Вайтмана теорії квантованого спінорного поля (сучасний виклад див., наприклад у [8]).

Для повноти списку основних законів збереження для спінорного поля у представленні ФВ слід одержати закони збереження заряду та числа частинок.

Струм у представленні ФВ запишемо по аналогії зі струмом $\vec{j}^{\,\text{classic}}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})v(t,\vec{x})$ у теорії суцільного середовища. Оператор швидкості у представленні ФВ має вигляд (6). Тоді для вектора струму маємо

$$j^l_{\mathrm{I}} = -i\left(\phi^\dagger \frac{\gamma^0}{\omega}\phi,_l - \frac{1}{\omega}\phi^\dagger,_l \gamma^0\phi\right). \tag{54}$$

Додатково до (6) оператор $\vec{p}/\omega$ теж є деяка швидкість, а відповідний їй струм j^l_{II} має вигляд (54) без γ^0.

Легко переконатись, що рівняння неперервності $\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{I,II}} = 0$ для відповідних до j^l_{I} (54) та j^l_{II} 4-струмів виконується, якщо відповідні 0-компоненти 4-струмів мають вигляд

$$j^0_{\mathrm{I}} = \phi^\dagger\phi, \quad j^0_{\mathrm{II}} = \phi^\dagger\gamma^0\phi. \tag{55}$$

Формула теореми Нетер (5.87) та теорема 5.3. приводять до наступних результатів

$$\begin{aligned}Q_{\mathrm{I}} &= e\int d^3x j^0_{\mathrm{I}}(x) = e\int d^3k(a^{*\mathrm{r}}a^{\mathrm{r}} + b^{*\mathrm{r}}b^{\mathrm{r}}), \\ Q_{\mathrm{II}} &= \int d^3x j^0_{\mathrm{II}}(x) = \int d^3k(a^{*\mathrm{r}}a^{\mathrm{r}} - b^{*\mathrm{r}}b^{\mathrm{r}}),\end{aligned} \tag{56}$$

а після Фермі-квантування для законів збереження у $\mathbb{H}^{\text{Фока}}$ маємо

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{\mathrm{I}} &= e\int d^3k(\widehat{a}^{\dagger\mathrm{r}}\widehat{a}^{\mathrm{r}} - \widehat{b}^{\dagger\mathrm{r}}\widehat{b}^{\mathrm{r}}), \\ \widehat{Q}_{\mathrm{II}} &= \int d^3k(\widehat{a}^{\dagger\mathrm{r}}\widehat{a}^{\mathrm{r}} + \widehat{b}^{\dagger\mathrm{r}}\widehat{b}^{\mathrm{r}}),\end{aligned} \tag{57}$$

тобто $\widehat{Q}_{\mathrm{I}}$ – це оператор заряду, $\widehat{Q}_{\mathrm{II}}$ – оператор числа частинок.

Перетворення ФВ V (1) із [2] (або (13)) дає $\phi^\dagger\phi \to \psi^\dagger\psi$, тобто не міняє закон збереження заряду.

6. Висновки

Викладено короткий огляд та систематизацію кола питань, пов'язаних з представленням ФВ для рівняння Дірака та теорії спінорного поля. Недоліки рівняння Дірака та теорії спінорного поля, які були відмічені та подолані в роботах [3, 9 – 11], проаналізовано з точки зору їх впливу на лагранжеве формулювання теорії спінорного поля та знаходження відповідних законів збереження на основі теореми Е. Нетер. Закони збереження для спінорного поля – наслідки Пуанкаре симетрії рівняння ФВ – тут знайдено на основі лагранжіану, для якого рівняння Ейлера – Лагранжа приводять до рівняння ФВ, а не Дірака. Побудова лагранжевого підходу до теорії спінорного поля та аналіз законів збереження є логічним кроком на шляху до розробки квантової електродинаміки у представленні ФВ. Варіант такої квантової електродинаміки нещодавно запропонований у роботі [11] (див. також посилання у ній) на основі 8-компонентного формалізму. Розроблені нами у [12 – 14] і у даній роботі методи будуть використані для побудови інших варіантів квантової електродинаміки у представленні ФВ та їх квантовомеханічних квазіпотенціальних наближень. Побудова нових підходів до теорії електрона є важливою та актуальною задачею сучасної теоретичної фізики, див., наприклад, [15].

Одержані в роботі [2] і тут результати є новими і мають наукове значення. Саме апелюванням до канонічного представлення ФВ цикл наших робіт [1, 2] (разом з цією статтею) суттєво відрізняються від численних робіт, які використовують рівняння Дірака в його локальному представленні.

В методичному плані статті [1, 2] та дана робота розкривають роль представлення ФВ для рівняння Дірака, роз'яснюють тонкі аспекти спільних рис та відмінностей між релятивістською квантовою механікою та квантовою теорією поля, містять короткий огляд і систематизацію основних положень цих моделей у канонічному представленні ФВ.

На відміну від запропонованого у роботі [16] лагранжевого підходу до спінорного поля у представленні ФВ ми базуємося на математично коректній формі визначення нелокальних (псевдодиференціальних, типу оператора $\omega=\sqrt{-\Delta+m^2}$ та функцій від нього) операторів, як інтегральних операторів визначених на просторі Шварца $S^{3,4}$.

Література

1. Кривський І.Ю., Симулик В.М. Про необхідність канонічного представлення Фолді – Вотхойзена для спінорного поля // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 16-22.
2. Кривський І.Ю., Симулик В.М. Про релятивістську квантову механіку частинки довільних маси і спіну у канонічному представленні Фолді - Вотхойзена // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 36-44.
3. Foldy L. Wouthuysen S. On the Dirac Theory of Spin ½ Particles and its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. – 1949. – V.78, №1. – P. 29–36.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
5. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969. – 624 с.
6. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. Кривский И.Ю., Симулик В.М. Основы квантовой электродинамики в терминах напряжённостей. – К.: Наук. думка, 1992. – 288 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
9. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: Изд. Иностр. лит., 1963. – 843 с.
10. Бьёркен Дж., Дрел С. Релятивистская квантовая теория, Т.1. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
11. Незнамов В.П. К теории взаимодействующих полей в представлении Фолди – Вотхойзена // ЭЧАЯ. – 2006. – Т.37, Выпуск 1. – С. 153–182.
12. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Relationship Between the Maxwell and Dirac Equations: Symmetries, Quantization, Models of Atom // Rep. Math. Phys. – 2002. – V.50, №3. – P. 315–328.
13. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Classical Electrodynamical Aspect of the Dirac Equation // Electromagnetic Phenomena. – 2003. – V.9, №1. – P. 103–114.
14. Кривский И.Ю., Ломпей Р.Р., Симулик В.М. О симметриях комплексного уравнения Дирака – Кэллера // ТМФ. – 2005. – Т.143, №1. – С. 64–82.
15. What is the Electron? Edited by V.M. Simulik // Montreal: Apeiron. – 2005. – 281 p.

16. Krech W. Einige Bemerkungen zur Klassischen Theorie des Anschaulichen Wellenbildes fur Kraftefreie Materie mit Spin ½ // Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich–Schiller Universitat Jena, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reine. – 1969. – V.18, №1. – P. 159–163.

ON THE LAGRANGE APPROACH AND DYNAMICAL VARIABLES FOR THE SPINOR FIELD IN FOLDY – WOUTHUYSEN CANONICAL REPRESENTATION

I.Yu. Krivsky, V.M. Simulik, R.V. Tymchyk

Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Department of the Theory of Elementary Interactions
88000, Uzhhorod, 21 Universitetska Str.
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

The relativistic invariant Lagrange approach for the spinor field in Foldy – Wouthuysen representation is constructed. The analogy with classical mechanics for the system with arbitrary number degrees of freedom is used for this construction. The dynamical variables for the spinor field in this representation are found. The conservation laws in terms of quantum mechanical particle-antiparticle momentum-spin amplitudes are presented. In this way the direct physical sense of the conserved quantities is demonstrated. 12 important additional conserved quantities are obtained together with 10 well-known conservation laws for the spinor field, which are the consequences of the Poincare symmetry of the theory. The additional dynamical variables are the consequences of the fact that both orbital and spin parts of the total 4-angular momentum of the spinor field are conserved independently.

О ЛАГРАНЖЕВОМ ПОДХОДЕ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В КАНОНИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ – ВОТХОЙЗЕНА

И.Ю. Кривский, В.М. Симулик, Р.В. Тимчик

Институт электронной физики НАН Украины, отдел теории элементарных взаимодействий
88000, Ужгород, ул. Университетская, 21
e-mail: sim@iep.uzhgorod.ua

Основываясь на аналогии с лагранжевым подходом к классической механике системы с произвольным числом степеней свободы, построен релятивистски инвариантный лагранжев подход для спинорного поля в представлении Фолди – Вотхойзена. Найдены динамические переменные спинорного поля в этом представлении. Законы сохранения выражены в терминах квантовомеханических импульсно-спиральных амплитуд частицы и античастицы, чем раскрыто непосредственный физический смысл сохраняющихся величин. Наряду с известными 10 законами сохранения для спинорного поля, которые являются следствиями Пуанкаре-симметрии теории, получены 12 важных дополнительных сохраняющихся величин. Дополнительные динамические переменные являются следствиями того факта, что в представлении Фолди - Вотхойзена отдельно сохраняются и орбитальная, и спиновая части 4-момента количества движения спинорного поля.