УДК 621.376
PACS 07.90.+c
DOI 10.24144/2415-8038.2018.43.125-136

В.С. Мельник, І.В. Шевера
Ужгородський національний університет, вул. Волошина 54, Ужгород, 88000, Україна,
e-mail: igor.shevera@uzhnu.edu.ua

МОДУЛЯЦІЯ КОЛИВАНЬ У РЕЗОНАНСНІЙ СИСТЕМІ ІЗ ЗМІННОЮ ВЛАСНОЮ ЧАСТОТОЮ

Методом повільно змінних амплітуд розв’язана задача коливань резонансної системи, моделлю якої може служити лінійний осцилятор із затуханням, під дією гармонічної вимушуючої сили в умовах гармонічної зміни одного з параметрів резонансної системи. Одержано прості і зручні для інженерних розрахунків формули для коефіцієнта модуляції при амплітудній модуляції і девіації фази коливань при фазовій модуляції та вказано умови їх застосувань. З’ясовано основні закономірності ефектів амплітудної і фазової модуляції коливань.

Ключові слова: резонансна система, лінійний осцилятор, вимушені коливання, модуляція коливань.

Вступ

У навколишньому світі коливається все – від таємничого вакууму (нульові коливання) до загадкового Всесвіту, що розширюється. Коливальні системи різної природи (електромагнітні, механічні, акустичні, екологічні та інші), моделлю яких допустимо вважати лінійний осцилятор із затуханням, можуть знаходитись в режимах вільних, вимушених і параметричних коливань, причому останні поділяються на резонансні і нерезонансні. Ці режими коливань добре відомі [1-3]. Менш відомим є режим змішаних коливань, який виникає тоді, коли на коливальну систему діє зовнішня вимушуюча сила, а її один або кілька параметрів змінюються в часі. Змішаний режим коливань математично описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із змінними коефіцієнтами. Точний розв’язок цього рівняння невідомий. При гармонічному характері силової дії і гармонічній зміні параметра коливальної системи для одержання наближеного розв’язку в роботі [4] пропонують використати метод повільно змінних амплітуд або метод ВКБ (Вентцеля-Крамерса-Брілюена). В роботі [5] повідомляється про можливість формування точного розв’язку такого рівняння за допомогою методу умовного осцилятора, де розвинуто ідею узагальненого методу ВКБ, але це повідомлення стосовно нашого випадку носить декларативний характер. У роботі [6] знайдено розв’язок цього рівняння методом повільно змінних комплексних амплітуд у вигляді нескінченного подвійного ряду Фур’є. Такий ряд був зведений до відомих формул у роботі [7] у разі точного силового резонансу, але при розстройці від резонансу подібне зведення виявилось неможливим. Обчислення були виконані за допомогою ЕОМ, а результат представлений у вигляді діаграм Арганда. На цьому шляху, в принципі, можна вирішити проблему ефектів модуляції коливань у резонансній системі із змінною власною частотою, але це не раціональний шлях. Ми знайдемо зручні і елегантні співвідношення для коефіцієнта модуляції і девіації фази коливань шляхом аналітичних перетворень нескінченних рядів на зразок того, як це було зроблено в роботі [8] і дамо вичерпний аналіз ефектів модуляції.

За визначенням модуляцією є повільна зміна параметрів несучого коливання – амплітуди, фази, частоти і навіть форми коливання. Вона може бути вимушеною, якщо зміна вказаних параметрів відбувається за рахунок зовнішньої дії, або самовільною внаслідок розвитку різного роду нестійкостей у коливальній системі. Оскільки лише модульовані коливання є носіями інформації, процес створення модуляції і перенесення її на несуче коливання складає значний інтерес для різних застосувань: у радіотехніці – для передачі інформації; в радіоспектроскопії – для здобуття інформації про спектри коливань електронного парамагнітного і ядерного магнітного резонансів; у техніці – для стабілізації режимів роботи технологічних установок (див. наприклад, [9]); у γ-спектроскопії – при дослідженні спектрів Месбауера; в акустиці – для передачі інформації в пружних середовищах; у механіці – для одержання інформації про джерела нестійкостей у разі виникнення самовільної модуляції в резонансних системах складних споруд, механізмів і машин; в екології – для виявлення прихованих факторів впливу на народжуваність (смертність) у популяціях при міжвидовій конкуренції; в економіці – для виявлення факторів впливу на параметри, що визначають можливості розвитку, росту продукції, прибутків [10], тощо.

1. Постановка і розв'язок задачі

Розглянемо коливальну систему, моделлю якої є лінійний осцилятор із затуханням. Система знаходиться під дією гармонічної вимушуючої сили з циклічною частотою ω, а її власна частота $\omega_0(t)$ змінюється в часі за гармонічним законом з частотою Ω<<ω. Диференціальне рівняння, що описує осцилятор, має вигляд [2]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2(t)y = A_0 \cos\omega t. \quad (1)$$

Тут y – відхилення від положення рівноваги величини, що зазнає коливань (для механічної системи – зміщення, для електричної системи – заряд, для акустичної системи – тиск, тощо); α – параметр, що характеризує втрати енергії коливань, – для механічної системи $2\alpha = h/m$ (h – коефіцієнт тертя, m – маса тіла, що коливається); для електричної системи $2\alpha = R/L$ (R– активний опір, L – індуктивність); $\omega_0^2(t)$ – квадрат власної частоти – для механічної системи $\omega_0^2(t) = k(t)/m$ ($k(t)$ – коефіцієнт пружності); для електричної системи – $\omega_0^2(t) = 1/LC(t)$ ($C(t)$ – електроємність); A_0 – приведена амплітуда вимушуючої сили – для механічної системи $A_0 = F_0/m$ (F_0 – амплітуда сили); для електричної системи $A_0 = E_0/L$ (E_0 – амплітуда електрорушійної сили). У випадку коливальних систем іншої природи вказані вище параметри є іншими.

Нехай власна частота коливальної системи змінюється в часі за законом

$$\omega_0(t) = \omega_0 - \Delta\omega_m cos\Omega\, t, \qquad (2)$$

де ω_0 – середнє значення власної частоти коливальної системи – для механічної системи $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$ (k_0 – середнє значення коефіцієнта пружності); для електричної системи – $\omega_0 = \sqrt{1/LC_0}$ (C_0 – середнє значення електроємності); $\Delta\omega_m$ – девіація власної частоти коливальної системи – для механічної системи $\Delta\omega_m = \omega_0\Delta k_m/(2k_0)$ (Δk_m– амплітуда коливань пружності, $\Delta k_m \ll k_0$); для електричної системи – $\Delta\omega_m = \omega_0\Delta C_m/(2C_0)$ (ΔC_m – амплітуда коливань електроємності, $\Delta C_m \ll C_0$). З останніх двох нерівностей слідує співвідношення $\Delta\omega_m \ll \omega_0$.

Розв'язок диференціального рівняння (1) при умові (2) будемо шукати методом повільно змінних амплітуд [4]. У відповідності з цим методом покладемо

$$y = a(t)sin\omega t + b(t)cos\omega t, \qquad (3)$$

де *a(t), b(t)* – повільно змінні в часі амплітуди (далі будемо позначати a і b), для яких виконуються нерівності:

$$\frac{d^2a}{dt^2} \ll \omega\frac{da}{dt}; \frac{d^2b}{dt^2} \ll \omega\frac{db}{dt};$$
$$\frac{da}{dt} \ll \omega a; \ \frac{db}{dt} \ll \omega b.$$

Підставимо (3) в (1), урахувавши приведений вище пакет нерівностей, що формулює умови малості відносних змін величин *a(t), b(t)* та їх похідних у часі за період коливань (2π/ω). Якщо резонансна система при постійній власній частоті ω_0 має високу добротність, то при невеликих розстройках можна задовольнитись приблизною рівністю $\omega \approx \omega_0(t)$ і хід викладок значно спростити, поклавши $\omega^2 - \omega_0^2(t) \approx 2\omega\Delta\omega(t)$, де $\Delta\omega(t) = \omega - \omega_0(t) = \Delta\omega_0 + \Delta\omega_m \cos\Omega t$ – миттєва розстройка резонансної системи, а $\Delta\omega_0 = \omega - \omega_0$ – постійна розстройка. Після нескладних викладок одержимо систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку із змінним коефіцієнтом $\Delta\omega(t)$:

$$\frac{da}{dt} = \Delta\omega(t)b - \alpha a + \frac{A_0}{2\omega}, \qquad \frac{db}{dt} = -\Delta\omega(t)a - \alpha b. \tag{4}$$

Розв’яжемо систему рівнянь (4), виразивши компоненти a і b величини y через її компоненти в іншій системі координат, де вони зводяться до квадратур. Пошук такої системи координат можна здійснити за допомогою поворотів системи відліку на певні кути або шляхом зміни масштабу на осях [11]. Ми зробимо два послідовні повороти на кути ωt і –θ і перейдемо до системи координат із змінним в часі масштабом:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\omega t & sin\omega t \\ -sin\omega t & cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де матриці 2×2 – матриці повороту на кути ωt і –θ та матриця зміни масштабу на осях координат відповідно; $\theta(t) = \omega_0 t - \beta sin\Omega t$; $\beta = \Delta\omega_m/\Omega$ – індекс модуляції власної частоти резонансної системи.

Після нескладних, але дещо громіздких перетворень одержимо вирази:

$$a_3 = \frac{A_0}{2\omega}\int e^{\alpha t} cos[(\omega - \omega_0)t + \beta sin\Omega t]dt, \qquad b_3 = \frac{A_0}{2\omega}\int e^{\alpha t} sin[(\omega - \omega_0)t + \beta sin\Omega t]dt. \tag{6}$$

Утворюючи комплексну форму a_3+ib_3, використаємо в ній формулу Ейлера $cosx + isinx = \exp(ix)$ і першу з двох приведених нижче тотожностей [12]:

$$e^{i\beta sin\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta)e^{ik\Omega t}, \qquad e^{-i\beta sin\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k J_k(\beta)e^{ik\Omega t}, \tag{7}$$

де $J_k(\beta)$ – функція Беселя першого роду k-го порядку. Після обчислення інтегралів виду $\int exp(ax)dx$ та розділення дійсної і уявної частин одержимо

$$a_3 = \frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)}{1+x_k^2}e^{\frac{t}{\tau}}[x_k\, sin(\omega - \omega_0 + k\Omega)t + cos(\omega - \omega_0 + k\Omega)t] + C_1,$$

$$b_3 = \frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)}{1+x_k^2}e^{\frac{t}{\tau}}[sin(\omega - \omega_0 + k\Omega)t - x_k\, cos(\omega - \omega_0 + k\Omega)t] + C_2, \tag{8}$$

де $\tau = 1/\alpha$ – час затухання коливань у резонансній системі; $x_k = \tau(\omega - \omega_0 + k\Omega)$; C_1 і C_2 –сталі інтегрування.

Здійснюючи послідовно підстановки (8) у (5), перейдемо від змінних a_3, b_3 до змінних *a*, *b*. Потім знову утворимо комплексну форму *a+ib*, а в ній використаємо другу тотожність у (7) та розділимо дійсну і уявну частини. В результаті одержимо вирази:

$$a = \frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)J_{k-l}(\beta)}{1+x_k^2}[cos\, l\Omega t + x_k sin l\Omega t] + \sum_{l=-\infty}^{+\infty}(-1)^l J_l(\beta)e^{-\frac{t}{\tau}}[C_1 cos(\omega - \omega_0 + l\Omega)t + C_2 sin(\omega - \omega_0 + l\Omega)t],$$

$$b=\frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)J_{k-l}(\beta)}{1+x_k^2}[\sin l\Omega t-x_k\cos l\Omega t]+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(-1)^l J_l(\beta)e^{-\frac{t}{\tau}}[C_2\cos(\omega_0-\omega+l\Omega)t+C_1\sin(\omega_0-\omega+l\Omega)t]. \qquad (9)$$

Підставляючи далі (9) в (3), знайдемо вираз для відхилення від положення рівноваги величини, що зазнає коливань,

$$y=\frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)J_{k-l}(\beta)}{1+x_k^2}[\sin(\omega+l\Omega)t-x_k\cos(\omega+l\Omega)t]+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(-1)^l J_l(\beta)e^{-\frac{t}{\tau}}[C_1\sin(\omega_0+l\Omega)t+C_2\cos(\omega_0+l\Omega)t]. \qquad (10)$$

Формула (10) описує коливання величини y у резонансній системі із змінною власною частотою. Перший доданок визначає стаціонарні коливання, а другий – затухаючий перехідний процес.

2. Коефіцієнт модуляції і девіація фази коливань

Перепишемо вираз (3) у вигляді

$$y=A(t)\sin[\omega t+\varphi(t)], \qquad (11)$$

де $A(t)=\sqrt{a^2+b^2}$; $\varphi(t)=arctg(b/a)$ – повільно змінні амплітуда і фаза коливань. Для їх визначення розглянемо вирази (9) у режимі стаціонарних коливань, коли $t\gg\tau$:

$$a=\frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)J_{k-l}(\beta)}{1+x_k^2}[\cos l\Omega t+x_k\sin l\Omega t],$$
$$b=\frac{A_0\tau}{2\omega}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\frac{J_k(\beta)J_{k-l}(\beta)}{1+x_k^2}[\sin l\Omega t-x_k\cos l\Omega t]. \qquad (12)$$

Слід відзначити, що комплексна форма виразів (12) $a+ib$ з точністю до коефіцієнта біля сум збігається з формулою для безрозмірної комплексної амплітуди в [6], де результат одержано методом безпосереднього інтегрування відповідного скороченого рівняння.

Як видно з формул (11) і (12), коливання величини y у резонансній системі із змінною власною частотою є модульованими за амплітудою $A(t)$ і фазою $\varphi(t)$. Причому, закон зміни в часі величин $A(t)$ і $\varphi(t)$ суттєво відрізняється від закону зміни власної частоти (2), що вказує на наявність сильних частотних спотворень модулюючого коливання. Щоб спотворення були мінімальними, амплітуда $A(t)$ і фаза $\varphi(t)$ коливань повинні повторювати в часі зміни власної частоти $\omega_0(t)$. Це можливо тоді, коли в (12) суттєвий вклад вносять лише постійні складові величин a і b (l=0) та їх перші гармоніки (l=±1). Ми знайдемо необхідні для цього умови, розрізняючи два випадки.

У першому випадку покладемо β<1 ($\Delta\omega_m<\Omega$). Тоді в сумах по k, що залишилися в (12), після утримання членів з l=0, ±1, достатньо утримати лише доданки, які пропорційні $J_0^2(\beta)$ і $J_0(\beta)J_1(\beta)$, а рештою доданків можна знехтувати, як малими величинами, оскільки в результат сумування відчутний вклад вносять лише ті функції Беселя, порядок k яких за модулем не перевищує значення аргументу β [13]. Далі введемо наступні позначення:

$s_{01}=1/(1+x_0^2)$;
$s_{02}=x_0/(1+x_0^2)$;

$s_1=1/(1+x_{-1}^2)-1/(1+x_1^2)$;
$s_2=x_{-1}/(1+x_{-1}^2)-x_1/(1+x_1^2)$;

$s_1'=2x_0/(1+x_0^2)-x_{-1}/(1+x_{-1}^2)-x_1/(1+x_1^2)$;
$s_2'=-2/(1+x_0^2)+1/(1+x_{-1}^2)+1/(1+x_1^2)$,

та підставимо відсічені і перетворені описаним вище способом вирази (12) у формули для $A(t)$ і $\varphi(t)$.

При обчисленні амплітуди $A(t)$, як і раніше, будемо утримувати лише доданки нульового і першого порядків малості за $J_1(\beta)$. Використаємо також розклад $A(t)$ у ряд виду $\sqrt{(1-x)} \approx 1 - x/2$, де для забезпечення достатньо малої величини $x \sim J_1(\beta)/J_0(\beta)$, необхідно покласти $J_1(\beta) \ll J_0(\beta)$, що, в свою чергу, кличе за собою необхідність виконання більш сильної нерівності $\beta \ll 1$ ($\Delta\omega_m \ll \Omega$).

При обчисленні фази $\varphi(t)$ застосуємо розклади $\varphi(t)$ у ряди трьох видів: $arctgx \approx x$, якщо $x^2 < 1$; $arctgx \approx \pi/2 - 1/x$, якщо $x > 1$ і $arctgx \approx -\pi/2 - 1/x$, якщо $x < -1$, де $x = b/a$. Так як коливання фазового кута вважаємо малими, про що свідчить вимога $J_1(\beta) \ll J_0(\beta)$, то можна допустити, що вони слабо впливають на умови застосування приведених вище розкладів у ряди, тому в записах цих умов достатньо врахувати лише постійну складову відношення b/a. Результат такого спрощення має вигляд: $|\Delta\omega_0\tau| < 1$; $\Delta\omega_0\tau < -1$; $\Delta\omega_0\tau > 1$ для першого і наступних розкладів $\varphi(t)$ у ряди відповідно. Крім того у всіх трьох варіантах знаходження $\varphi(t)$ будемо користуватись також розкладом функцій у ряд виду $(1-x)^{-1} \approx 1 + x$, де x – малі величини, пропорційні відношенню $J_1(\beta)/J_0(\beta)$, але вони індивідуальні в кожному варіанті обчислень.

Отже, у випадку $\beta \ll 1$, що еквівалентно $\Delta\omega_m \ll \Omega$, в кінці викладок одержимо наступні вирази для амплітуди $A(t)$ і фази $\varphi(t)$ модульованих коливань величини y (11):

$$A(t) = \frac{A_0\tau}{2\omega} J_0^2(\beta)\sqrt{s_{01}}\left[1 - \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\frac{1}{s_{01}}\sqrt{(s_{01}s_1 + s_{02}s_2)^2 + (s_{01}s_1' + s_{02}s_2')^2}\, cos(\Omega t - \psi_1)\right], \quad \text{якщо } \Delta\omega_m \ll \Omega, \tag{13}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{s_{01}}{s_{02}} + \dfrac{1}{{s_{02}}^2} \times \\ \quad -\dfrac{s_{02}}{s_{01}} + \dfrac{1}{{s_{01}}^2} \times \\ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{s_{01}}{s_{02}} + \dfrac{1}{{s_{02}}^2} \times \end{cases} \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\sqrt{(s_{01}s_2 - s_{02}s_1)^2 + (s_{01}s_2' - s_{02}s_1')^2}\, cos(\Omega t - \psi_2),$$

$$\text{якщо } \Delta\omega_m \ll \Omega, \begin{cases} \Delta\omega_0\tau > 1, \\ |\Delta\omega_0\tau| < 1, \\ \Delta\omega_0\tau < -1, \end{cases} \tag{14}$$

де верхня гілка в (14) справедлива при $\Delta\omega_0\tau > 1$, середня – при $|\Delta\omega_0\tau| < 1$ і нижня – при $\Delta\omega_0\tau < -1$. Тут не приводяться вирази для постійних фазових кутів ψ_1 і ψ_2 оскільки не передбачається порівняння фаз огинаючих коливань або інші дії з ними.

У другому випадку будемо вважати, що $\beta >$ або ~ 1 ($\Delta\omega_m >$ або $\sim\Omega$). Пам'ятаючи про те, що в формулах (12) слід вибирати лише члени з l=0, ±1, введемо такі позначення нескінченних сум:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} {J_k}^2(\beta) g_1(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{01},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta)[J_{k+1}(\beta) + J_{k-1}(\beta)]\, g_1(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{11}^{+},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta)[J_{k+1}(\beta) - J_{k-1}(\beta)]\, g_2(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{12}^{-} \tag{15}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} {J_k}^2(\beta) g_2(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{02}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta)[J_{k+1}(\beta) + J_{k-1}(\beta)]\, g_2(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{12}^{+}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta)[J_{k+1}(\beta) - J_{k-1}(\beta)]\, g_1(\Delta\omega_0 + k\Omega) = L_{11}^- \quad (16)$$

де $g_1(\Delta\omega_0 + k\Omega) = \tau/(1 + x_k^2)$, $g_2(\Delta\omega_0 + k\Omega) = \tau x_k/(1 + x_k^2)$. Тут формули (15) у послідовності їх запису є суми для постійної складової та для коефіцієнтів при $cos\Omega\, t$ і $sin\,\Omega\, t$ відповідно у виразі для величини *a,* а формули (16) – те ж саме, але у виразі для величини b. Нескінченні суми (15), (16) можна подати в замкнутому вигляді [14]. Щоб це зробити, введемо для зручності позначення $\Delta\omega_0 + k\Omega = \Omega'$ і знайдемо зворотні перетворення Фур'є для функцій $g_1(\Omega')$ і $g_2(\Omega')$, справедливі при любих k,

$$g_1'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\Omega')\, e^{i\Omega' t} d\Omega' = \frac{1}{2}\times\begin{cases} e^{\frac{t}{\tau}}, \text{якщо } t < 0, \\ e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{якщо } t > 0, \end{cases}$$
$$g_2'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\Omega')\, e^{i\Omega' t} d\Omega' = \frac{i}{2}\times\begin{cases} -e^{\frac{t}{\tau}}, \text{якщо } \; t < 0, \\ e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{якщо } \; t > 0. \end{cases} \quad (17)$$

У формули (15), (16) замість функцій $g_1(\Omega')$ і $g_2(\Omega')$ підставимо вирази для їх прямих перетворень Фур'є, тобто

$$g_1(\Omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1'(t)\, e^{-i\Omega' t} dt,$$
$$g_2(\Omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2'(t)\, e^{-i\Omega' t} dt\,.$$

Міняючи місцями знаки сумування і інтегрування, обчислимо суми, що утворились, застосувавши теорему додавання Графа для функцій Беселя [13]. Одержані при цьому підінтегральні вирази спростимо. Як видно з (17), функції $g_1'(t)$ і $g_2'(t)$ суттєво відмінні від нуля лише на інтервалі часу t~τ, звідки випливає, що Ωt~Ωτ. Якщо припустити, що частота Ω задовольняє нерівність Ωτ≤1, то з попереднього одержимо $\Omega t <$ або ~1. Остання нерівність дає можливість в одержаних підінтегральних виразах функції $cos\Omega t$ і $sin\Omega t$ розкласти в ряди за степенями Ωt і обмежитись першими змінними в часі членами. Вслід за цим нескладні перетворення знайдених виразів ведуть до інтегралів двох видів $\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\, dt$ і $\int_0^\infty e^{-at} J_1(bt)\, dt$, які відомі [15]. У кінці викладок одержимо вирази для сум рядів (15), (16) у замкнутому вигляді, два з яких L_{12}^- та L_{11}^- у рамках наближення Ωτ < або ~1 дорівнюють нулю.

У випадку модуляції, щоб уникнути спотворення модулюючого коливання, необхідно забезпечити нерівність $\Delta\omega_m\tau \ll 1$, завдяки якій вирази для сум рядів (15), (16) можна спростити, нехтуючи малими доданками і використовуючи розклади функцій у ряди видів $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + x/2$ та $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - x/2$, де x – величини, пропорційні $(\Delta\omega_m\tau)^2$. Після дещо громіздких перетворень будемо мати:

$$a = \frac{A_0}{2\omega}(L_{01} + L_{11}^+ cos\Omega t),$$
$$b = \frac{A_0}{2\omega}(L_{02} + L_{12}^+ cos\Omega t), \quad (18)$$

де

$$L_{01} = \tau s_{01},$$
$$L_{11}^+ = -2\tau\, s_{01}s_{02}\Delta\omega_m\tau,$$
$$L_{02} = \tau\, s_{02},$$
$$L_{12}^+ = \tau\,(s_{01}^2 - s_{02}^2)\Delta\omega_m\tau. \quad (19)$$

Підставимо вирази (18), (19) у формули для $A(t)$ і $\varphi(t)$ в (11). Знехтуємо малими доданками і використаємо, як і раніше, розклади функцій у ряди видів $(1 - x)^{1/2} \approx 1 - x/2$ при обчисленні $A(t)$ і $arctgx \approx x$, якщо $x^2 < 1$, $arctgx \approx \pi/2 - 1/x$, якщо $x > 1$, $arctgx \approx -\pi/2 - 1/x$, якщо $x < -1$, $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$ при обчисленні $\varphi(t)$. В кінці викладок при $\beta >$ або ~ 1, що еквівалентно $\Delta\omega_m >$ або $\sim\Omega$, одержимо наступні вирази для амплітуди $A(t)$ і фази $\varphi(t)$ коливань величини y в (11):

$$A(t)=\frac{A_0\tau}{2\omega}\sqrt{s_{01}}\left(1-s_{02}\Delta\omega_m\tau\cos\Omega t\right),\text{якщо } \Delta\omega_m > \text{або} \sim\Omega, \Omega\tau < \text{або} \sim 1, \Delta\omega_m\tau \ll 1,$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\Delta\omega_0\tau}-\dfrac{1}{(\Delta\omega_0\tau)^2} & \times\\ \qquad\qquad -\Delta\omega_0\tau-1 & \times\ \Delta\omega_m\tau\cos\Omega t,\\ \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\Delta\omega_0\tau}-\dfrac{1}{(\Delta\omega_0\tau)^2} & \times\end{cases} \tag{20}$$

$$\text{якщо } \Delta\omega_m > \text{або} \sim\Omega, \quad \Omega\tau < \text{або} \sim 1, \quad \Delta\omega_m\tau \ll 1, \begin{cases}\Delta\omega_0\tau > 1,\\ |\Delta\omega_0\tau| < 1\\ \Delta\omega_0\tau < -1,\end{cases} \tag{21}$$

де верхня гілка в (21) справедлива при $\Delta\omega_0\tau > 1$, середня – при $|\Delta\omega_0\tau| < 1$ і нижня – при $\Delta\omega_0\tau < -1$.

Обґрунтуємо тепер законність зробленого апріорі при виводі формул (13), (14) і (20), (21) опущення членів з l=±2, ±3, … в рядах (12). У першому випадку, коли $\beta \ll 1$, урахування цих членів приводить до появи в сумах рядів доданків другого порядку малості по $J_1(\beta)$ і доданків, що пропорційні функціям Беселя другого і більш високих порядків, які нехтовно малі. У другому випадку, коли $\beta >$ або ~ 1, урахування вказаних членів кличе за собою появу в рядах (12) крім нескінченних сум видів L_0 і L_1 також сум виду L_ν, де $\nu = 2, 3, \dots$.

Як слідує з виразу для L_ν , приведеного в [14], при $\Delta\omega_m\tau < 1$ маємо $L_\nu \sim (\Delta\omega_m\tau)^\nu\tau$, звідки видно, що при $\Delta\omega_m\tau \ll 1$ всі L_ν є нехтовно малими.

Як видно з формул (13), (20) і (14), (21), співвідношення для амплітуди $A(t)$ і фази $\varphi(t)$ модульованого коливання (11) записані в загальноприйнятих формах: $A(t) = A_0(1 + m\cos\Omega t)$; $\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi_m\cos\Omega t$. Тому вирази для коефіцієнта модуляції m при амплітудній модуляції (АМ) і девіації фази $\Delta\varphi_m$ при фазовій модуляції (ФМ) легко визначити, як модулі коефіцієнтів при модулюючій функції $\cos\Omega t$ у формулах (13), (20) і (14), (21) відповідно:

$$m=\begin{cases}\left|\dfrac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\dfrac{1}{s_{01}}\sqrt{(s_{01}s_1+s_{02}s_2)^2+(s_{01}s_1'+s_{02}s_2')^2}\right|, \text{якщо } \Delta\omega_m \ll \Omega,\\ |s_{02}\Delta\omega_m\tau|, \ \text{якщо } \Delta\omega_m > \text{або} \sim\Omega, \Omega\tau < \text{або} \sim 1, \Delta\omega_m\tau \ll 1;\end{cases} \tag{22}$$

$$\Delta\varphi_m=\begin{cases}\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{s_{02}^2}\\ \dfrac{1}{s_{01}^2}\end{matrix}\times\dfrac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\sqrt{(s_{01}s_2-s_{02}s_1)^2+(s_{01}s_2'-s_{02}s_1')^2}\right|, \text{якщо } \Delta\omega_m \ll \Omega, \begin{cases}|\Delta\omega_0\tau| > 1,\\ |\Delta\omega_0\tau| < 1,\end{cases}\\ \left|\begin{matrix}\left(\dfrac{1}{\Delta\omega_0\tau}\right)^2\\ 1\end{matrix}\times\Delta\omega_m\tau\right|, \text{якщо } \Delta\omega_m > \text{або} \sim\Omega, \Omega\tau < \text{або} \sim 1, \Delta\omega_m\tau \ll 1, \begin{cases}|\Delta\omega_0\tau| > 1,\\ |\Delta\omega_0\tau| < 1.\end{cases}\end{cases} \tag{23}$$

Як видно з (4) поведінка резонансної системи залежить від миттєвої розстройки $\Delta\omega(t) = \omega - \omega_0(t)$. Якщо покласти $\omega_0 = const$, а залежність від часу перенести на частоту вимушуючої сили $\omega(t)$, то миттєва розстройка $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0 = \omega_c + \Delta\omega_m\cos\Omega t - \omega_0 = \Delta\omega_0 + \Delta\omega_m\cos\Omega t$, де $\Delta\omega_0 = \omega_c - \omega_0$ – середнє значення розстройки; $\Delta\omega_m$ і ω_c – девіація частоти і середнє значення частоти вимушуючої сили відповідно. Модуляція частоти коливань вимушуючої сили виявляється еквівалентною модуляції власної частоти резонансної системи, тому остання при незмінних її параметрах здійснює перетворення частотно-модульованого (ЧМ) коливання в АМ і ФМ коливання у відповідності з виразами (22) і (23).

Фазо-модульоване коливання, як відомо, одночасно є частотно-модульованим. Можна знайти девіацію частоти ЧМ коливання в резонансній системі. Дійсно, якщо миттєву фазу коливань величини y позначити через $\psi(t)=\omega t+\varphi_0+\Delta\varphi_m cos\Omega t$, то частота коливань $\omega'(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}=\omega-\Omega\Delta\varphi_m sin\Omega t=\omega-\Delta\omega'_m sin\Omega t$, де $\Delta\omega'_m=\Omega\Delta\varphi_m$ – девіація частоти коливань. Таким чином формула (23) у виразі для $\Delta\omega'_m$ описує закономірності ЧМ коливань у резонансній системі.

3. Основні закономірності ефектів модуляції

На рис.1 приведені залежності коефіцієнта модуляції коливань величини y від частоти Ω зміни параметра резонансної системи (в одиницях $1/\tau$) для трьох значень постійної розстройки, побудовані за формулами (22). Як видно, у випадку розстройки, що дорівнює коефіцієнту затухання $1/\tau$ (крива 1), коефіцієнт модуляції досягає найбільшого значення в області частот $\Omega<1/\tau$, де він не залежить від Ω. При частотах $\Omega\sim1/\tau$ наступає спад кривої 1, який завершується асимптотичним прагненням величини m до нуля при $\Omega\gg1/\tau$. Описаний хід кривої 1 пояснюється так. Реакція резонансної системи на зміну в часі її енергомісткого параметра відбувається з швидкістю $1/\tau$. Якщо частота зміни параметра $\Omega\ll1/\tau$, то зміна амплітуди коливань $A(t)$ величини y встигає слідувати за зміною параметра і АМ коливань величини y здійснюється на всю можливу глибину, що залежить лише від девіації власної частоти $\Delta\omega_m$ резонансної системи. При збільшенні частоти $\Omega>$ або $\sim1/\tau$ коливання $A(t)$ амплітуди вже не встигають слідувати за зміною параметра резонансної системи тим сильніше, чим більше Ω, що зумовлює зменшення величини m.

Збільшення постійної розстройки $\Delta\omega_0$ веде до зменшення коефіцієнта модуляції в області частот $\Omega\ll1/\tau$ (криві 2, 3). Це пояснюється тим, що при розстройках $\Delta\omega_0>1/\tau$ послаблюється відгук резонансної системи на зміну її власної частоти через зменшення крутості резонансної характеристики системи. Разом з тим на кривих 2, 3 бачимо максимуми при частотах $\Omega=\Delta\omega_0$. Їх наявність пояснюється так. При зміні параметра резонансної системи і відповідній зміні її власної частоти відбувається розщеплення резонансної характеристики системи на серію смуг в околі частот $\omega=\omega_0+k\Omega$, де k=0, 1, 2, … .

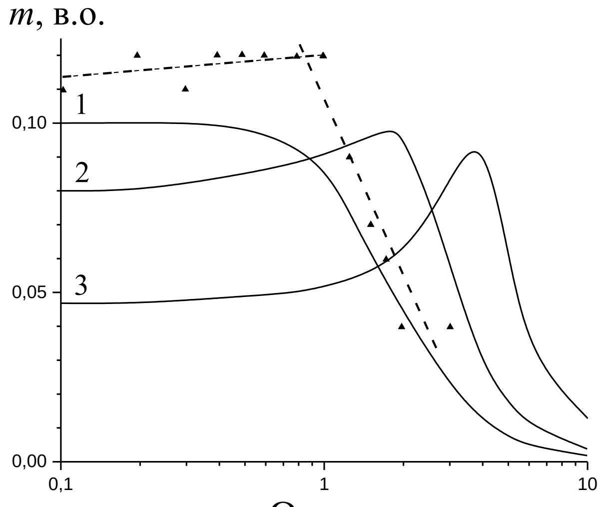

Рис.1. Залежності коефіцієнта модуляції m від частоти Ω модулюючого коливання при девіації власної частоти резонансної системи $\Delta\omega_m=0{,}2/\tau$ і резонансних розстройках: 1 – $\Delta\omega_0=1/\tau$; 2 – $\Delta\omega_0=2/\tau$; 3 – $\Delta\omega_0=4/\tau$. Крапками і штрихом позначено результати експериментального дослідження модуляції в резонансному LC контурі за умовами кривої 1.

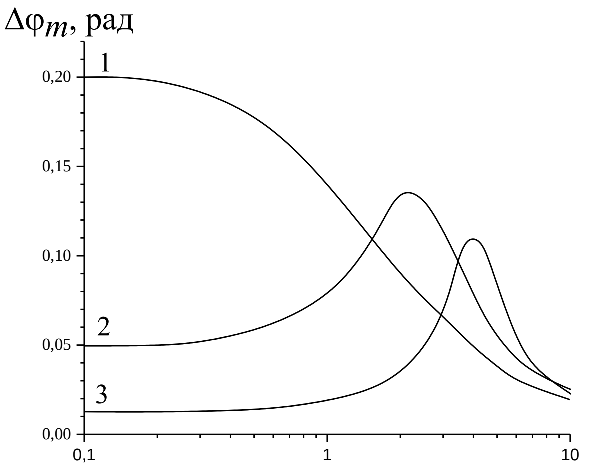

Рис.2. Залежності девіації фази $\Delta\varphi_m$ від частоти Ω модулюючого коливання при девіації власної частоти резонансної системи $\Delta\omega_m=0{,}2/\tau$ і резонансних розстройках: 1 – $\Delta\omega_0=0$; 2 – $\Delta\omega_0=2/\tau$; 3 – $\Delta\omega_0=4/\tau$.

Висота відповідних резонансних

кривих пропорційна $J_k^2(\beta)$, а їх розділення тим чіткіше, чим більше Ω в порівнянні $1/\tau$ [6]. Якщо смуги не розділені, то накладаючись, вони ведуть до розширення резонансної характеристики системи і такої зміни її форми, коли в околі фіксованого значення $\Delta\omega_0$ крутість характеристики зростає, що призводить до збільшення величини m. При збільшенні постійної розстройки $\Delta\omega_0$ у межах перекриття резонансних смуг спад кривих $m(\Omega)$ зсувається в область більш високих частот Ω і стає крутішим.

У випадку постійної розстройки $\Delta\omega_0 = 0$, як видно з формул (22), коефіцієнт модуляції m дорівнює нулю.

На рис.2 приведені залежності девіації фази коливань величини y від частоти Ω зміни параметра резонансної системи (в одиницях $1/\tau$) при трьох значеннях постійної розстройки $\Delta\omega_0$, побудовані за формулами (23). Як видно, у випадку $\Delta\omega_0 = 0$ (крива 1) девіація фази має максимальне значення в області частот $\Omega \ll 1/\tau$, де вона слабо залежить від Ω. З ростом частоти Ω крива 1 зазнає спаду при $\Omega <$ або $\sim 1/\tau$ і асимптотично прагне до нуля при $\Omega \gg 1/\tau$. Хід залежності $\Delta\varphi_m(\Omega)$ при $\Delta\omega_0 = 0$ подібний до такого ж, як $m(\Omega)$ при $\Delta\omega_0 = 1/\tau$ на рис.1 і пояснюється також ефектом запізнення реакції резонансної системи на зміни її енергомісткого параметра при $\Omega >$ або $\sim 1/\tau$.

З уведенням постійної розстройки $\Delta\omega_0 > 1/\tau$ девіація фази в області частот $\Omega \ll 1/\tau$ значно зменшується (криві 2, 3), причому з'являються максимуми на кривих при $\Omega = \Delta\omega_0$. Зменшення $\Delta\varphi_m$ пояснюється падінням крутості фазової характеристики резонансної системи при $\Delta\omega_0 > 1/\tau$. Поява максимумів свідчить про те, що внаслідок зміни власної частоти за рахунок зміни параметра резонансної системи розщеплення на смуги зазнає не лише її резонансна характеристика, а й фазова характеристика. При цьому модуляцію в максимумах кривих забезпечують фрагменти розщеплення. Якщо постійна розстройка збільшується в межах перекриття вказаних смуг, то спад кривих $\Delta\varphi_m(\Omega)$ з боку високих частот Ω стає крутішим.

На рис. 1 приведено також результат експериментального дослідження амплітудної модуляції в резонансному LC контурі із змінною ємністю за умовами кривої 1. Тут експериментальні точки апроксимовані за допомогою двох прямих методом найменших квадратів. Відхилення ломаної лінії від кривої 1 пояснюється невисокою точністю осцилографічних вимірювань, зокрема, ширини резонансної лінії контура, яка на рівні 0,7 від максимуму резонансної кривої дорівнює $2/\tau$ при незмінних параметрах контура. Ймовірно, було одержано завищене значення величини $2/\tau$, яке потягло за собою завищення величини розстройки $\Delta\omega_0 = 1/\tau$, про що свідчить підйом відрізка прямої при $\Omega\tau < 1$ і, відповідно, завищене значення девіації власної частоти контура $\Delta\omega_m = 0{,}2/\tau$, бо ломана лінія лежить вище від кривої 1.

Висновки

1. Знайдено наближений розв'язок задачі про коливання в резонансній системі під дією гармонічної вимушуючої сили в умовах гармонічної зміни одного з параметрів системи, який описує стаціонарний коливальний процес і включає в себе перехідні затухаючі коливання.
2. Одержано прості і зручні для інженерних розрахунків формули для коефіцієнта модуляції при АМ і девіації фази коливань при ФМ та вказано умови їх застосувань.
3. Визначено оптимальні з точки зору максимальних глибин модуляції і мінімальних взаємних впливів обох видів модуляції режими роботи резонансної системи: $\Delta\omega_0 = 1/\tau$ при АМ і $\Delta\omega_0 = 0$ при ФМ. Смуга частот модуляції охоплює діапазон від $\Omega_н = 0$ до $\Omega_в \approx 1/\tau$.
4. Верхню межу частотного діапазону модуляції $\Omega_в$ можна збільшити шляхом збільшення резонансної розстройки $\Delta\omega_0 > 1/\tau$ для АМ і $\Delta\omega_0 > 0$ для ФМ, але це супроводжується зменшенням

глибини модуляцій обох видів і зростанням їх взаємних впливів.

5. Максимуми на кривих $m(\Omega)$ і $\Delta\varphi_m(\Omega)$ можна використати для корекції фронтів модульованих імпульсів, якщо зміна параметра резонансної системи здійснюється періодичними імпульсами з недостатньо крутими фронтами.
6. Якщо параметри резонансної системи незмінні, а вимушуюча сила частотно-модульована з частотою Ω то в резонансній системі відбувається перетворення виду модуляції. Найбільш ефективно ЧМ перетворюється в АМ, якщо $\omega_c - \omega_0 = 1/\tau$ і ЧМ перетворюється у ФМ, якщо $\omega_c - \omega_0 = 0$, де, нагадаємо, ω_c–середнє значення частоти ЧМ коливання.
7. Оскільки фазова і частотні модуляції взаємно пов'язані, то встановлені нами закономірності фазової модуляції дозволяють знайти закономірності частотної модуляції у відповідності з формулою $\Delta\omega'_m = \Omega\Delta\varphi_m$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний. М.: ВНТР, 2017. –241 с.
2. Мигулин В.В., Медведев В.И. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. – 392 с.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. –432 с.
4. Заездный А.М. Основы расчетов нелинейных и параметрических радиотехнических цепей. М.: Связь, 1973. – 448 с.
5. Вульфсон И.И. К исследованию некоторых колебательных систем с переменными параметрами на базе точных решений условного осциллятора // Теория механизмов и машин. т.9. №1. 2011. –С.3-13.
6. Янкаускас З.К. Резонансные свойства колебательного контура при периодической модуляции емкости //Радиотехника и электроника. т.12. №9. 1967. –С. 1664-1666.
7. Куц П.С., Мельник В.С., Стрижевський В.Л. Динамика намагниченности гармонически модулированной гиромагнитной среды // Радиотехника и электроника. т.18. №7. 1973. –С. 1518-1520.
8. Мельник В.С. Модуляция оптического излучения в системе двухуровневых атомов с переменной частотой перехода //Оптика и спектроскопия. т.60. №5. 1986. –С. 916-919.
9. Мельник В.С., Яцків М.В. Система стабілізації частоти коливань мікротрона. Патент України на винахід №108300, заявка №а201311046 від 16.09.2013. Бюл. №7, 2015.
10. Соколов Ю.М., Соколов О.Ю., Ілюшко В.М., Комп'ютерні технології в задачах природи і суспільства //Радіоелектронні і комп'ютерні системи. т. 44. №3. 2010. –С. 20-26.
11. Пиппард А. Физика колебаний. –М.: Высшая школа. 1985. –456 с.
12. Кузнецов Д.С. Специальные функции. –М.: Высшая школа, 1965. –249 с.
13. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. –М.: Наука, 1979. –832 с.
14. Жидков О.П., Провоторов Б.Н. О влиянии модуляции на форму наблюдаемых в жидкости сигналов магнитного резонанса //Оптика и спектроскопия. –1965. №5. –С.917-920.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –Изд. 5-е. –М.: Наука, 1971. –1108 с.

Стаття надійшла до редакції 12.05.2018.

В.С. Мельник, И.В. Шевера
Ужгородский национальный университет, ул. Волошина, 54, Ужгород, 88000, Україна,
e-mail: igor.shevera@uzhnu.edu.ua

МОДУЛЯЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ

Методом медленно меняющихся амплитуд решена задача колебаний резонансной системы, моделью которой может служить линейный осциллятор с затуханием, под действием гармонической вынуждающей силы в условиях гармонического изменения одного из параметров резонансной системы. Получены простые и удобные для инженерных расчетов формулы для коэффициента модуляции при амплитудной модуляции и девиации фазы колебаний при фазовой модуляции и указаны условия их применений. Выяснены основные закономерности эффектов амплитудной и фазовой модуляции колебаний.

Ключевые слова: резонансная система, линейный осциллятор, вынужденные колебания, модуляция колебаний.

V.S.Melynik. I.V.Shevera
Uzhhorod National University, Voloshin Str., 54, Uzhhorod, 88000, Ukraine,
e-mail: igor.shevera@uzhnu.edu.ua

MODULATION OF VIBRATIONS IN A RESONANT SYSTEM WITH VARIABLE OWN FREQUENCY

Introduction. The absence of the calculated formulas for calculating the modulation coefficient in amplitude modulation, the deviation of the phase of oscillation in phase modulation and the deviation of the frequency of oscillations in frequency modulation in resonant systems, the model of which can be a linear oscillator with attenuation.

Purpose. Determination of the basic relations between the effects of amplitude and phase modulation of oscillations.

Methods. The problem of oscillations of the resonance system under the action of harmonic inducing force in conditions of harmonic change of one of the parameters of the resonance system is approximately solved by the method of slowly variable amplitudes.

Results. Simple and convenient formulas for engineering calculations are obtained for the modulation coefficient in amplitude modulation and deviation of the phase of oscillations in phase modulation, and the conditions of their applications are specified.

Conclusion. The solution of the problem of oscillations of a resonant system describes a stationary oscillation process and includes transitional attenuation oscillations. If the parameters of the resonance system are unchanged, and the inducing force is frequently-modulated then there is a transformation of the type of modulation in the resonant system: at optimal values of the resonant upset FM is converted into AM, and in the absence of the upset, FM is converted into PM. Since the phase and frequency modulations are connected, the regularities of phase modulation established by us allow us to find the relations of frequency modulation.

Keywords: resonance system, linear oscillator, forced oscillations, modulation of oscillations.

PACS: 07.90.+c

REFERENCES

1. Wolfson, I.I. (2017), A short course in the theory of mechanical vibrations [Kratkiy kurs teorii mekhanicheskikh kolebaniy], Moskow: Bulletin of Scientific and Technical Development [Vestnik Nauchno-Tekhnicheskogo Razvitiya], 241 p.
2. Migulin, V.V., Medvedev, V.I. et al. (1978), Fundamentals of the theory of oscillations [Osnovy teorii kolebaniy]. Moskow: Science [Nauka], 392 p.
3. Rabinovich, MI, Trubetskov, D.I. (1984), Introduction to the theory of oscillations and waves. [Osnovy teorii kolebaniy] Moskow: Science [Nauka], 432 p.
4. Zaezdny, A.M. (1973), Fundamentals of calculations of nonlinear and parametric radio circuits. [Osnovy raschetov nelineynykh i parametricheskikh radiotekhnicheskikh tsepey] Moskow: Communication [Svyaz'], 448 p.
5. Wolfson, I.I. (2011), On the investigation of some oscillatory systems with variable parameters on the basis of exact solutions of the conditional oscillator [K issledovaniyu nekotorykh kolebatel'nykh sistem s peremennymi parametrami na baze tochnykh resheniy uslovnogo ostsillyatora] // Theory of mechanisms and machines [Teoriya mekhanizmov i mashin]. vol. 9, №1. pp. 3-13.
6. Yankauskas, Z.K. (1967), “Resonant properties of an oscillatory circuit with periodic modulation of capacity“ [Rezonansnyye svoystva kolebatel'nogo kontura pri periodicheskoy modulyatsii yemkosti] //Radioengineering and Electronics [Radiotekhnika i elektronika], vol.12, №9, pp. 1664-1666.
7. Kuts, PS., Melnik, VS., Strizhevsky, V.L., (1973), “Dynamics of magnetization of a harmonically modulated gyromagnetic medium” [Dinamika namagnichennosti garmonicheski modulirovannoy giromagnitnoy sredy] //Radioengineering and Electronics [Radiotekhnika i elektronika], vol.18, №7, pp. 1518-1520.
8. Melnik, V.S., (1986) “Modulation of optical radiation in a system of two-level atoms with a variable transition frequency” [Modulyatsiya opticheskogo izlucheniya v sisteme dvukhurovnevykh atomov s peremennoy chastotoy perekhoda] //Optics and Spectroscopy [Optika i spektroskopiya]. vol.60. №5. pp. 916-919.
9. Melnyk, V.S., Yatskiv, M.V., (2015), The system of stabilization of the frequency of oscillations of the microtron [Systema stabilizatsiyi chastoty kolyvan′ mikrotrona]. Patent of Ukraine for invention №108300, application №201311046 dated 16.09.2013. Bull No.7,
10. Sokolov Yu.M., Sokolov O.Yu., Ilyushko V.M., (2010), Computer technologies in the problems of nature and society [Komp″yuterni tekhnolohiyi v zadachakh pryrody i suspil′stva] //Radioelectronic and computer systems [Radioelektronni i komp″yuterni systemy]. vol. 44, No. 3. pp. 20-26.
11. Pippard A. (1985), Physics of oscillations [Fizika kolebaniy], Moskow: Higher school [Vysshaya shkola], 456 p.
12. Kuznetsov D.S. (1965), Special features [Spetsial'nyye funktsii]. Moskow: Higher School [Vysshaya shkola], 249 p.
13. Handbook of special functions [Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam], /Ed. M.Abramovitsa, I.Stigan. Moskow: Science [Nauka], (1979), 832 p.
14. Zhidkov, OP., Provotorov, B.N., (1965) On the effect of modulation on the shape of magnetic resonance signals observed in a liquid [O vliyanii modulyatsii na formu nablyudayemykh v zhidkosti signalov magnitnogo rezonansa] // Optics and Spectroscopy [Optika i spektroskopiya]. №5, pp. 917-920.
15. Gradstein, I.S., Ryzhik, I.M., (1971), Tables of integrals, sums, series and products [Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy], Edit 5th, Moskow: Science [Nauka], 1108 p.