УДК 518.12

О. І. Кузка, М. М. Ломага (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ НА МНОГОГРАННИКУ

The article deals with finding of the local maximum of a convex continuously differentiable function in the compact polyhedral set

В статті розглядається один з способів відшукання локального максимуму опуклої неперервно диференційовної функції на компактній багатогранній множині

Відомо, що складність задачі нелінійного програмування визначається не числом обмежень, що може бути зведене до одного еквівалентними перетвореннями. Основний вплив на вибір способу розв'язування мають властивості цільової функції і функцій обмежень. Більшість обчислювальних методів для НП–задач $[1, 4]$, які мають відмінні від глобального екстремуму оптимуми, дозволяють знайти саме точку локального екстремуму. В загальному випадку вони не дають можливості встановити, чи співпадає знайдений оптимум з глобальним, проте є корисними на практиці.

У даній статті розглядається задача максимізації опуклої функції $f(x) \in C^1$ на обмеженій непорожній множині, заданій системою лінійних нерівностей при невід'ємних змінних:

$$f(x) \to max, x \in X. \tag{1}$$

Множину допустимих розв'язків задачі (1)(опуклий многогранник) можна представити у вигляді

$$X = \{x \in R^n | Ax \leq b, x \geq 0\},$$

де $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$, A - матриця розмірності $m \times n$.

Після введення допоміжних змінних отримаємо еквівалентну (1) задачу:

$$\begin{aligned} & f(x) \to max, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m}, \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Неперервно диференційовну разом з всіма своїми частинними похідними до $k, k \geq 1$ порядку включно функцію n змінних $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в деякому околі точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ можна представити за формулою Тейлора:

$$\begin{aligned} \triangle y = g(x_1^0 + \triangle x_1, \dots, x_n^0 + \triangle x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} [(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_n^0) \frac{\partial}{\partial x_n}]^i g(x^0) + R_{k-1}(\triangle x), \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$R_{k-1}(\triangle x) = \frac{1}{(k)!}[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots +$$
$$(x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}]^k g(x_1^0 + \theta_n(x_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + \theta_n(x_n - x_n^0)),$$

$0 < \theta_n < 1, \triangle x = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0)$.

Вважаючи залишковий член формули Тейлора малим при невеликих відстанях між x і x^0, ми можемо не враховувати його і, тим самим, отримуємо наближену формулу

$$g(x) \approx g(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1!}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{1}{2!}\frac{\partial g^2}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(x^0)(x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0) + \cdots +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\partial g^k}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(x^0)(x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0)\cdots(x_{i_k} - x_{i_k}^0),$$

яка містить лише значення функції $g(x)$ і її частинних похідних, обчислених в точці x^0. При $k = 1$ отримуємо лінійне наближення функції $g(x)$ (неважко бачити, що права частина співпадає з лінійною функцією, графіком якої служить дотична площина, проведена в $x = x^0$ до графіка функції $y = g(x)$):

$$g(x) \approx g(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{1!}\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0).$$

З узагальнення формули (3) випливає, що якщо функція визначена і неперервна разом з частинними похідними порядку k в опуклій області, то для будь-яких двох точок x^0 і $x^0 + \triangle x^0$ з цієї області справедлива формула Тейлора (2) [3].

Нехай відомий початковий базисний допустимий розв'язок x^0 задачі (2), для якого многочлен Тейлора першого степеня, побудований в цій точці для функції $f(x)$ не є сталим. Тоді її розв'язок можна знайти за такою схемою:

Крок 1. Обчислюємо значення функції $f(x^0)$. В точці x^0 для $f(x)$ будуємо многочлен Тейлора першого степеня $P_1(x, x^0)$ і переходимо до задачі

$$P_1(x, x^0) \to max, \tag{4}$$

$$Ax = b,$$
$$x \geq 0.$$

Виконуємо крок 2.

Крок 2. Для розв'язання задачі (4) застосовуємо схему симплекс–алгоритму, поки не отримаємо оптимальний розв'язок. Щоб переконатися, що він є оптимальним для задачі (2), здійснюємо перебір сусідніх вершин многогранника до тих пір, поки не знайдемо точку x^1, в якій значення $f(x^1) > f(x^0)$. Якщо такої точки немає, тоді точка x^0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$, інакше покладаємо $x^0 = x^1$ і переходимо до кроку 1.

Розв'язок задачі (1) досягається на множині крайніх точок, оскільки якщо X – компактна многогранна множина в R^n, а функція $g : R^n \to R$ – квазіопукла та неперервна на X, то серед розв'язків задачі

$$g(x) \to max, x \in X$$

обов'язково існує крайня точка $\bar{x}$.

Доведення цього твердження можна знайти, наприклад, в [2]. Нагадаємо, що функція, визначена на опуклій підмножині R^n, називається квазіопуклою або унімодальною, якщо всі її множини Лебега

$$X_\beta = \{x \in X | g(x) \le \beta \}$$

опуклі. Для опуклих функцій всі множини Лебега опуклі, отже опуклі функції є квазіопуклі.

Для ілюстрації розробленого алгоритму розглянемо наступну задачу.

Приклад. Знайти розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + x_2^3 + 6x_3^2 + 12x_1 - 8x_2 \to max,\\
&x_1 + x_2 \le 2,\\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 3,\\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Множина X (мал.1) допустимих розв'язків задачі є непорожньою, ранг матриці обмежень дорівнює кількості обмежень, цільова функція опукла, отже для розв'язання задачі застосуємо запропонований вище алгоритм.

Спочатку зводимо дану задачу до вигляду (2).

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + x_2^3 + 6x_3^2 + 12x_1 - 8x_2 \to max,\\
&x_1 + x_2 + x_4 = 2,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,\\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}$$

Позначимо через $I_{B_0} = \{2, 5\}$, $I_{N_0} = \{1, 3, 4\}$ – множину індексів відповідно базисних і небазисних змінних; $x^0 = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^T$ – базисний допустимий розв'язок задачі; $f(x^0) = -8$.

В точці x^0 будуємо многочлен Тейлора $P_1(x, x^0) = 12x_1 + 4x_2 - 16$ і розв'язуємо задачу

$$\begin{aligned}
&P_1(x, x^0) = 12x_1 + 4x_2 - 16 \to max,\\
&x_1 + x_2 + x_4 = 2,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,\\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}$$

Геометрично $P_1(x, x^0)$ є дотичною площиною до графіка поверхні рівня функції $f(x)$ в точці x^0(мал.2).

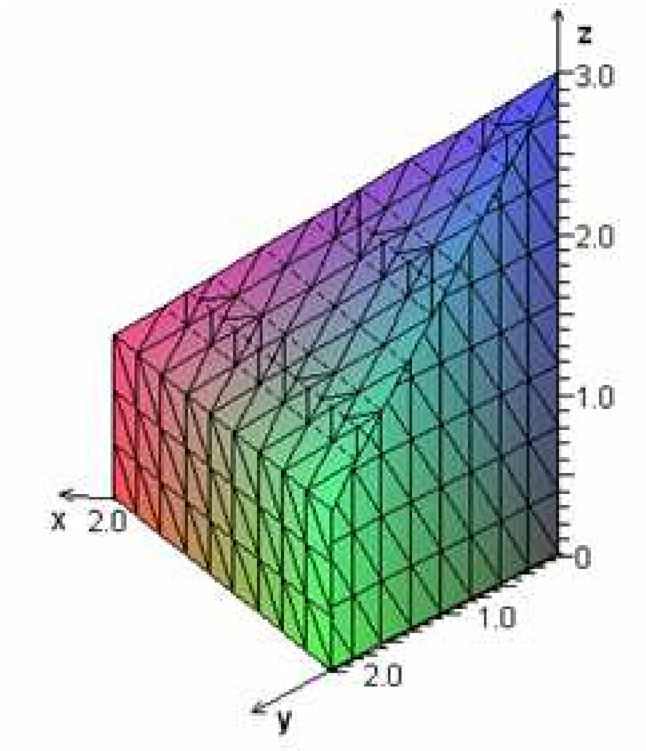

Рис. 1

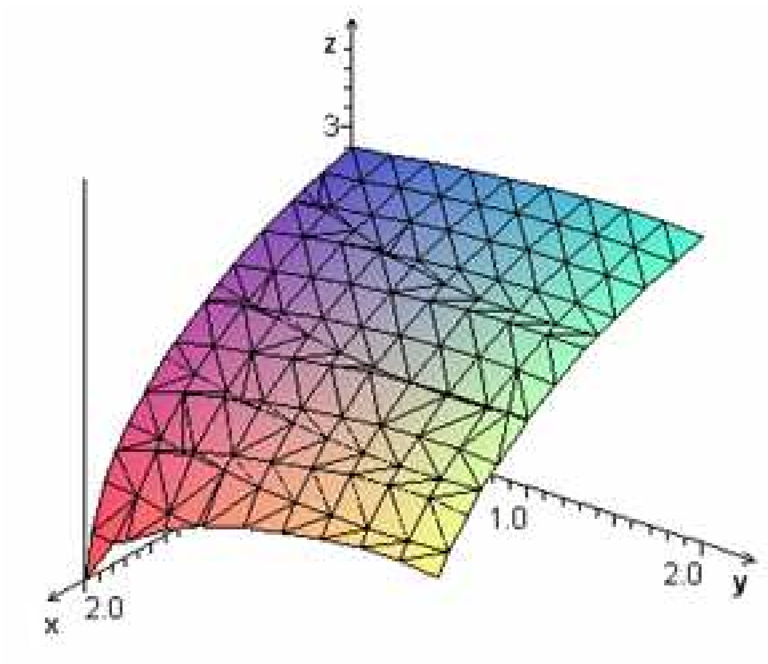

Рис. 2

Вектор відносних оцінок $\Delta_{N_0}^T \leq 0$. Виконавши одну симплексну ітерацію отримаємо $x^1 = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^T$, $I_{B_1} = \{1, 5\}$, $I_{N_1} = \{2, 3, 4\}$, $f(x^1) = 48$.

Будуємо многочлен Тейлора $P_1(x, x^1) = 36x_1 - 8x_2 - 24$ і розв'язуємо задачу

$$P_1(x, x^1) = 36x_1 - 8x_2 - 24 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Вектор відносних оцінок $\Delta^T_{N_1} \geq 0$. Шукаємо серед сусідніх x^1 крайніх точок точку x^2, в якій $f(x^2) > f(x^1)$. Ввівши в базис змінну x_3 і вивівши x_5 отримаємо $x^2 = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$, $I_{B_2} = \{1, 3\}$, $I_{N_2} = \{2, 5, 4\}$, $f(x^2) = 54$.

Розглядаємо задачу

$$P_1(x, x^2) = 36x_1 - 8x_2 + 36x_3 - 54 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Вектор відносних оцінок $\Delta^T_{N_2} \geq 0$. Порівнявши значення функції $f(x^2)$ із значеннями $f(x)$ у всіх сусідніх x^2 крайніх точках, отримаємо, що оптимальними розв'язками задачі є точки $x^2 = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$ і $x^3 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 3, & 2, & 0 \end{pmatrix}^T$.

1. *Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З.* Линейное и нелинейное программирование. – К.:Издательское обьединение "Вища школа", 1975.-372с.
2. *Моклячук М.П.* Негладкий аналіз та оптимізація:навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.-399с.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления:В 3 т. – М.: Наука, 1969, т.I.-616с.
4. *Хейдли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Издательство "Мир", 1967.-506с.
5. *Червак Ю.Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір.– Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2002.-312с.

Одержано 07.04.2011