УДК 517.9

Ю. В. Ловейкін (КНУ імені Тараса Шевченка)

СТАЦІОНАРНІ ТОЧКИ ТВЕРДОГО ТІЛА З ВІБРУЮЧОЮ ТОЧКОЮ ЗАКРІПЛЕННЯ

A problem on rigid body motions around pinning point that execute quasi-periodic oscillations with high frequency and with small amplitude is considered. An explicit form of vibration forces potential and bifurcational parameter are discovered. The stationary points dependent on bifurcational parameter of time-averaged system potential are find.

У роботі розглядається задача про рух важкого твердого тіла навколо точки закріплення, яка здійснює квазіперіодичні коливання високої частоти і малої амплітуди. Знайдено явний вигляд потенціалу вібраційних сил, виділено біфуркаційний параметр, від якого залежить потенціал. Визначені стаціонарні точки потенціалу усередненої за часом системи в залежності від значення біфуркаційного параметра.

Вступ. Теорія твердого тіла вивчає задачі про рух важкого твердого тіла навколо нерухомої точки та споріднені з ними проблеми. Всі необхідні відомості про розв'язані задачі, відкриті проблеми і сучасний стан теорії твердого тіла можна знайти, наприклад, в [1–4].

Розуміння результатів А. Пуанкаре про неінтегровність типової гамільтонової динамічної системи призвело до розробки нових методів, зокрема, теорії збурень: метод усереднення, КАМ-теорія та ін.

Початок дослідженням впливу високочастотних коливань малої амплітуди на системи механічного типу поклав М.М. Боголюбов своєю роботою про маятник з вібруючою точкою підвісу [5]. Вплив високочастотних коливань малої амплітуди на системи механічного типу (зв'язні маятники, сферичні маятники та ін.) розглядались в [6]. Слід підкреслити, що результат М.М. Боголюбова про стабілізацію верхнього положення рівноваги за рахунок високочастотних періодичних коливань точки підвісу стосується випадку, коли в системі наявне тертя. В ідеальній системі без тертя строге обґрунтування подібного твердження вимагає застосування методів КАМ-теорії.

У даній роботі досліджується задача про рух важкого твердого тіла навколо точки закріплення, яка здійснює високочастотні квазіперіодичні коливання малої амплітуди. Для усередненої за часом системи визначаються стаціонарні точки і встановлюється їх залежність від біфуркаційного параметра.

1. Постановка проблеми та попередні перетворення. Будемо розглядати задачі про рух важкого твердого тіла навколо точки закріплення, яка здійснює квазіперіодичні коливання високої частоти і малої амплітуди. Вивчатимемо випадок, коли радіус-вектор точки закріплення змінюється за законом $r=\varepsilon\alpha\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\mathbf{l}$, де $\mathbf{l}\in\mathbb{R}^3$ – сталий вектор одиничної довжини, $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – квазіперіодична функція, ε – малий параметр $(0<\varepsilon\ll 1)$. Ця задача є узагальненням задачі про маятник з вібруючою точкою підвісу дослідженої М.М. Боголюбовим [7].

Нехай $D\subset\mathbb{R}^3$ – область, яку займає тіло в рухомому просторі, жорстко зв'язаному з тілом, і початок координат рухомого простору знаходиться в точці закріплення. Положення тіла в нерухомому просторі в кожен момент часу

t однозначно визначається ортогональним перетворенням $Q_t \in SO(3)$ – елементом групи обертань простору $\mathbb{R}^3$. Отже, якщо $R \in D$ – радіус-вектор деякої точки твердого тіла в рухомому просторі, то її радіус-вектор в нерухомому просторі – $r = Q_t R + \varepsilon\alpha\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)$. З огляду на цей факт будемо трактувати досліджуваний механічний об'єкт як систему матеріальних точок, на які накладено нестаціонарні в'язі вигляду

$$r = QR + \varepsilon\alpha\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big), \tag{1}$$

де $Q \in SO(3)$ – точка конфігураційного простору, $R \in D$ – радіус-вектор, що нумерує точки системи.

Кінетична енергія системи точок з в'язями (1) – це функція на дотичному розшаруванні $TSO(3)$, яка має вигляд

$$\frac{1}{2}\int_D \rho(R)\Big\|\dot{Q}R + \dot{\alpha}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big\|^2 dR, \tag{2}$$

де $\rho(\cdot)$ – густина тіла, $\dot{Q} \in T_Q SO(3)$ – позначення для дотичного вектора в точці Q, $\dot{\alpha}(s) = \dfrac{d\alpha(s)}{ds}$, $\|\cdot\|$ – евклідова норма, породжена стандартним скалярним добутком в просторі $\mathbb{R}^3$, який будемо позначати операцією "$\bullet$".

Як відомо [1], оператор $Q^{-1}\dot{Q}$ є кососиметричним і існує єдиний вектор $\Omega = \Omega(\dot{Q})$ – вектор кутової швидкості в тілі такий, що для кожного $R \in \mathbb{R}^3$ виконується рівність $Q^{-1}\dot{Q}R = [\Omega, R]$, де $[\cdot,\cdot]$ – операція векторного добутку в тривимірному просторі. Зауважимо, що при кожному фіксованому $Q \in SO(3)$ відображення $\Omega : T_Q SO(3) \mapsto \mathbb{R}^3$ $(\dot{Q} \mapsto \Omega(\dot{Q}))$ є лінійним ізоморфізмом.

Зважаючи на те, що до лагранжіана системи можна додавати довільну функцію, яка залежить лише від часу t, замість функції кінетичної енергії (2) можна взяти функцію

$$K = \frac{1}{2}\int_D \rho(R)\big\|[\Omega, R]\big\|^2 dR + \int_D \rho(R)\dot{\alpha}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\mathbf{l}\bullet\big(Q[\Omega, R]\big)dR = \frac{1}{2}A\Omega\bullet\Omega + \mu\Big(\frac{t}{\varepsilon}, Q\Big)\bullet\Omega,$$

де $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – оператор інерції, $\mu(s, Q) = \dot{\alpha}(s)[c, Q^{-1}\mathbf{l}]$, $c = \displaystyle\int_D \rho(R)R\,dR$ – вектор, що дорівнює добутку маси тіла на радіус-вектор його центра інерції в рухомому просторі. Потенціальна енергія задається функцією

$$\Pi_g(Q) = g\int_D \rho(R)(QR)\bullet\mathbf{e}\,dR = g(Qc)\bullet\mathbf{e},$$

де g – прискорення вільного падіння, $\mathbf{e}$ – вертикальний орт.

Розглядатимемо нетривіальний випадок, коли $c \neq 0$.

Отже, математичною моделлю досліджуваного об'єкта є лагранжева система з конфігураційним простором $SO(3)$ і лагранжіаном

$$L = K - \Pi_g = \frac{1}{2}A\Omega\bullet\Omega + \mu\Big(\frac{t}{\varepsilon}, Q\Big)\bullet\Omega - g(Qc)\bullet\mathbf{e}. \tag{3}$$

Перейдемо від лагранжевої системи на конфігураційному просторі $SO(3)$ до гамільтонової системи на кодотичному розшаруванні $T^*SO(3)$. Цей перехід здійснюється стандартним чином за допомогою перетворення Лежандра. А саме, нехай $P \in T^*_Q SO(3)$ – ковектор, його значення на векторі $\dot{Q} \in T_Q SO(3)$ позачимо $P(\dot{Q})$, тоді гамільтоніан в змінних "імпульс–положення" P, Q виражається формулою

$$H = \max_{\dot{Q}\in T_Q SO(3)} \big(P(\dot{Q}) - L\big).$$

В теорії твердого тіла більш зручними є неканонічні змінні "момент–положення" M, Q, введення яких пояснює твердження, що випливає з відомих загальних конструкцій [1, 8, 9].

Твердження 1. *Лагранжева система з лагранжіаном* (3) *на конфігураційному просторі* $SO(3)$ *еквівалентна гамільтоновій системі на* $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ *з гамільтоніаном*

$$H = H\Big(\frac{t}{\varepsilon}, M, Q\Big) = \max_{\Omega\in\mathbb{R}^3}\big(M\bullet\Omega - L\big),$$

де $(M,\Omega)\in\mathbb{R}^3\times SO(3)$, *пуассонова структура на* $T^*SO(3)$ *визначається рівностями*

$$\{f(Q), g(Q)\} = 0,\ \ \{f(Q), M\bullet a\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Q\exp(ta)),\ \ \{M\bullet a, M\bullet b\} = -M\bullet[a,b]$$

для всіх функцій $f, g\in C^\infty(SO(3),\mathbb{R}^3)$ *і для всіх* $a, b\in\mathbb{R}^3$.

Через $\exp(ta)$ позначено однопараметричну групу обертань простору $\mathbb{R}^3$ з вектором кутової швидкості $a\in\mathbb{R}^3$, тобто $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(ta)R = [a,R]$ для всіх $R\in\mathbb{R}^3$.

Випишемо явний вигляд гамільтоніана H. Оскільки $\operatorname*{argmax}_{\Omega\in\mathbb{R}^3}(M\bullet\Omega - L) = A^{-1}(M-\mu)$, то $H = \frac{1}{2}A^{-1}(M-\mu)\bullet(M-\mu) + \Pi_g$. Усереднений за часом гамільтоніан (з урахуванням, що $\dot\alpha(s)$ має нульове середнє) має вигляд

$$\bar H = \mathcal{P}_T H = \frac{1}{2}A^{-1}M\bullet M + \Pi_v + \Pi_g,$$

де $\mathcal{P}_T$ – оператор усереднення за часом,

$$\Pi_v = \frac{1}{2}\mathcal{P}_T\Big(\dot\alpha^2\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)A^{-1}[c, Q^{-1}\mathbf{l}]\bullet[c, Q^{-1}\mathbf{l}].$$

Ключову роль в теорії твердого тіла з вібруючою точкою закріплення відіграє функція Π_v. Функції такого типу називають потенціалами вібраційних сил [6]. Функцію $\Pi = \Pi_g + \Pi_v$ будемо називати потенціалом усередненої за часом системи.

2. Стаціонарні точки гамільтоніана $\bar H$. Визначимо стаціонарні точки усередненого гамільтоніана $\bar H$. В першу чергу нас цікавлять точки ізольованих локальних мінімумів, вони, як відомо, відповідають стійким положенням рівноваги. Очевидно, що ця задача зводиться до відшукання точок ізольованих локальних мінімумів функції Π.

Тут варто відокремити два випадки:

Випадок 1. Точка закріплення здійснює коливання вздовж невертикальної осі, тобто $\mathbf{l}\nparallel\mathbf{e}$;

Випадок 2. Точка закріплення здійснює коливання вздовж вертикальної осі, тобто $\mathbf{l}\parallel\mathbf{e}$.

Необхідну умову стаціонарності точки $Q\in SO(3)$ функції Π можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Pi(\exp(ta)Q) = 0 \ \text{ для всіх } \ a\in\mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Похідна в лівій частині умови (4) розписується у вигляді

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Pi(\exp(ta)Q) = g(Qc)\bullet[\mathbf{e},a]+$$
$$+\frac{1}{2}\mathcal{P}_T\Big(\dot\alpha^2\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big(A^{-1}[c,Q^{-1}\mathbf{l}]\bullet\big[c,Q^{-1}[\mathbf{l},a]\big]+A^{-1}\big[c,Q^{-1}[\mathbf{l},a]\big]\bullet[c,Q^{-1}\mathbf{l}]\Big). \quad (5)$$

Твердження 2. *Будь-яка точка $Q\in SO(3)$, для якої* (5) *не обертаєтьса в нуль одночасно для всіх $a\in\mathbb{R}^3$, не є стаціонароною точкою функції* Π.

Варто зауважити, що у *випадку 1* будь-яка точка $Q\in SO(3)$, для якої $Qc\parallel\mathbf{l}$, не є стаціонарною точкою функції Π. У *випадку 2* точка $Q\in SO(3)$, для якої $Qc\parallel\mathbf{l}$, може бути стаціонарною точкою функції Π, оскільки вираз (5) є тотожнім нулем.

Розглянемо детально *випадок 2*. При цьому вважаємо, що $\mathbf{l}=\mathbf{e}$, замінивши у разі потреби $\mathbf{l}$ на $-\mathbf{l}$. Доповнимо вектор $\mathbf{l}$ до ортонормованого базису в $\mathbb{R}^3$ векторами $\mathbf{m}$ та $\mathbf{n}$ такими, що $\mathbf{m}\perp\mathbf{l}$, $\|\mathbf{m}\|=1$, $\mathbf{n}=[\mathbf{l},\mathbf{m}]$. Без обмеження загальності будемо вважати, що одиниці групи $SO(3)$ відповідає таке положення тіла, при якому радіус-вектор його центра інерції однаково направлений з вектором $\mathbf{l}$, тобто $\mathbf{l}=\dfrac{c}{\|c\|}$, а більша піввісь еліпса, по якому площина $\mathbf{l}\bullet r=0$ перетинає еліпсоїд $A^{-1}r\bullet r=1$, направлена вздовж вектора $\mathbf{m}$.

Уведемо на $SO(3)$ локальні координати $\psi\in\mathbb{R}\bmod 2\pi$, $\theta\in(0,\pi)$, $\varphi\in\mathbb{R}\bmod 2\pi$ за правилом $Q=Q(\psi,\theta,\varphi)=\exp(\varphi\mathbf{l})\exp(\theta\mathbf{m})\exp(\psi\mathbf{l})$.

В цих координатах з урахуванням того, що

$$\exp(\theta\mathbf{m})\mathbf{l}=\mathbf{l}\cos\theta-\mathbf{n}\sin\theta,\quad \exp(\varphi\mathbf{l})\mathbf{n}=\mathbf{n}\cos\varphi-\mathbf{m}\sin\varphi,$$

функція Π_g набуває вигляду $\Pi_g=g\|c\|\cos\theta$, функція Π_v –

$$\Pi_v=\frac{1}{2}\mathcal{P}_T\Big(\dot\alpha^2\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)\|c\|^2 f(\psi)\sin^2\theta,$$

де $f(\psi)=A^{-1}\big(\exp(-\psi\mathbf{l})\mathbf{m}\big)\bullet\big(\exp(-\psi\mathbf{l})\mathbf{m}\big)$. Позначимо

$$\delta=g\|c\|,\quad \varkappa=\frac{1}{2}\mathcal{P}_T\Big(\dot\alpha^2\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)\|c\|^2,$$

тоді

$$\Pi=\delta\cos\theta+\varkappa f(\psi)\sin^2\theta.$$

Необхідна умова стаціонарних точок функції Π в координатах (ψ,θ,φ) переписується у вигляді

$$f'(\psi)\sin^2\theta=0,\quad \varkappa f(\psi)\sin 2\theta-\delta\sin\theta=0. \quad (6)$$

Оскільки функція Π залежить лише від ψ та θ, будеми розглядати її як функцію цих двох змінних.

Проаналізуємо перше рівняння в (6). Якщо $\sin\theta=0$, то $\theta=0$ або $\theta=\pi$. Якщо $f'(\psi)=0$, то оскільки кінець вектора $\sqrt{f(\psi)}\exp(-\psi\mathbf{l})\mathbf{m}$ при зміні ψ описує еліпс, який утворюється перетином еліпсоїда $A^{-1}r\bullet r=1$ площиною $\mathbf{l}\bullet r=0$, то норма цього вектора набуває мінімального (максимального) значення, коли він є колінеарним меншій (більшій) з півосей зазначеного еліпса. З огляду на вибір початкового положення тіла, маємо $f'(0)=f'(\frac{\pi}{2})=f'(\pi)=f'(\frac{3\pi}{2})=0$, причому точками мінімуму є $\psi=0$ і $\psi=\pi$ (в цих точках $f''>0$).

Матриця других похідних функції П в стаціонарних точках має вигляд

$$\begin{pmatrix} \varkappa f''(\psi)\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 2\varkappa f(\psi)\cos 2\theta - \delta\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

З умови додатної визначеності матриці (7) маємо, що функція П досягає локальних мінімумів в точках, в яких $\psi = 0$ або $\psi = \pi$, а значення кута θ визначається умовами

$$\sigma\sin 2\theta - \sin\theta = 0, \quad 2\sigma\cos 2\theta - \cos\theta > 0, \tag{8}$$

де $\sigma = \dfrac{\varkappa f(0)}{\delta}$ при $\psi = 0$, і $\sigma = \dfrac{\varkappa f(\pi)}{\delta}$ при $\psi = \pi$.

Умови (8) еквівалентні умові існування невиродженого локального мінімуму функції $U(\theta,\sigma) = \sigma\sin^2\theta + \cos\theta$, яка дорівнює функції П з відповідним вибором σ при $\psi = 0$ або $\psi = \pi$.

Біфуркаційні значення параметра σ визначаються умовою існування кратного кореня функції $U'_\theta(\cdot,\sigma) : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, а саме:

$$\sigma\sin 2\theta - \sin\theta = 0, \quad 2\sigma\cos 2\theta - \cos\theta = 0.$$

З цієї системи маємо $\sigma = \dfrac{1}{2}$ або $\sigma = -\dfrac{1}{2}$, $\theta = 0$ або $\theta = \pi$.

На основі проведеного дослідження дістаємо такий результат.

Теорема. *Якщо* $\sigma \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, *то функція* $U(\theta,\sigma)$ *має єдину точку мінімуму* $\theta_- = \pi$. *Якщо* $\sigma > \dfrac{1}{2}$, *то функція* $U(\theta,\sigma)$ *окрім точки* θ_- *має ще одну точку мінімуму* $\theta_+ = 0$.

Висновки. У роботі розглянута задача про рух важкого твердого тіла навколо точки закріплення, яка здійснює квазіперіодичні коливання високої частоти і малої амплітуди. Детально розглянуто випадок, коли точка закріплення здійснює коливання вздовж вертикальної осі. У процесі дослідження було знайдено явний вигляд потенціалу вібраційних сил, який відіграє ключову роль у теорії твердого тіла з вібруючою точкою закріплення. Було виділено біфуркаційний параметр, від якого залежить потенціал усередненої за часом системи. Знайдено стаціонарні точки цього потенціалу і показано, що при проходженні біфуркаційним параметром певного значення у потенціалу усередненої за часом системи з'являється додаткова точка локального мінімуму.

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. – М.: Наука, 1991. – 320 с.
3. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: РХД, 2001. – 384 с.
4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – Ижевск: РХД, 2000. – 256 с.
5. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1950. – Т. 14. – С. 9-14.
6. *Стрижак Т.Г.* Метод усреднения в задачах механики. – Киев–Донецк: Вища школа, 1982. – 254 с.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1969. – 248 с.
8. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1978. – 188 с.
9. *Abraham R., Marsden J.E.* Foundations of Mechanics, 2-nd ed. – New York–Amsterdam: Benjamin Cummings, 1978. – 806 p.

Одержано 21.04.2011