УДК 517.3

В. Я. Рибак, Ю. Ю. Рубіш, Ю. М. Сегеда (Ужгородський нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ

The transformation of the ordinary linear fourth-order differential equations with constant coefficients by means of fractional integro-differential operator is considered. As a result the generalized Bessel functions are obtained. The problem of generalization to higher orders of the same functions is stated.

Розглядаються перетворення лінійного диференціального рівняння четвертого порядку із постійними коефіцієнтами за допомогою оператора дробового інтегро-диференціювання. Результатом перетворення є узагальнені функції Бесселя. Ставиться задача на вищий рівень узагальнення цих же функцій.

Метою роботи є популяризація можливостей дробового інтегро-диференціювання.

У статті розглядаються перетворення лінійного диференціального рівняння четвертого порядку за допомогою оператора невизначеного дробового інтегро-диференціювання. Розв'язки перетвореного рівняння узагальнюють функції Бесселя. Методика перетворень повторює дії, описані в [1] та [2]. Тому для детального ознайомлення із особливостями наступного викладу варто звернутись до згаданих джерел.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(4)}+2y''+y=0,\ \ y=y(x),$$

яке утворене додаванням двох рівнянь гармонійних коливань та двічі продиференційованого за x цього ж рівняння. Виконуємо заміну незалежної змінної:

$$z=x^2,$$

і, після очевидних перетворень, одержуємо

$$16z^2u^{(4)}+48zu'''+(12+8z)u''+4u'+u=0,\ \ u=u(z). \tag{1}$$

Позначимо через D^r оператор невизначеного дробового інтегро-диференціювання, де r – порядок оператора, $r\in\mathbb{R}$. Зважаючи на наступне диференціювання та його особливості [2], доповнюємо (1) правою частиною – додатковими функціями інтегро-диференціювання:

$$16z^2u^{(4)}+48zu'''+(12+8z)u''+4u'+u=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{z^{r-k}}{\Gamma(r+1-k)}. \tag{2}$$

Диференціюємо (2) оператором D^r.

$$16z^2D^{r+4}u+32\left(r+\tfrac{3}{2}\right)D^{r+3}u+16\left(r^2+2r+\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}z\right)D^{r+2}+$$
$$+8\left(r+\tfrac{1}{2}\right)D^{r+1}u+D^ru=\sum_{i=1}^{\infty}E_i\tfrac{z^{-r-i}}{\Gamma(r-1-i)},$$

де $E_i=const$ – довільні сталі інтегро-диференціювання (надалі вважаємо $E_i=0$).

Проводимо заміну

$$D^ru=z^sv,\ \ s=const:$$

$$16z^4 v^{(4)} + 16z^3(2r+4s+3)\nu''' +$$
$$+16z^2\left[6s(s-1) + 6s\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + \left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{1}{2}z\right]\nu'' +$$
$$+8z\left[8s(s-1)(s-2) + 12s(s-1)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + 4s\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + \left(r+2s+\tfrac{1}{2}z\right)\right]\nu' +$$
$$+\left[16s(s-1)(s-2)(s-3) + 32s(s-1)(s-2)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + 4s\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) +\right.$$
$$\left.+16s(s-1)\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + 8s\left(r+s-\tfrac{1}{2}\right)z + z^2\right]\nu = 0.$$

Нарешті, переходимо до початкової незалежної змінної

$$x = z^{\frac{1}{2}},\ \nu(z) \to W(x).$$

$$x^4W^{(4)} + 4(r+2s)x^3W''' + \left[24s(s-1) + 24s\left(r+\tfrac{3}{2}\right) - 24s + 4r(r-1) + 2x^2\right]x^2W'' +$$
$$+\left[32s(s-1)(s-2) + 48s(s-1)(r+1) + 16sr\left(r+\tfrac{2}{2}\right) - 4r(r-1) + 4(r+2s)x^2\right]xW' +$$
$$+\left[16s(s-1)(s-2)(s-3) + 32s(s-1)(s-2)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) +\right. \tag{3}$$
$$\left.+16s(s-1)\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{3}{2}\right) + 8s\left(r+s-\tfrac{1}{2}\right)x^2 + x^4\right]W = 0.$$

Розв'язок (3) шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$W = a_0x^\lambda + a_1x^{\lambda+2} + a_2x^{\lambda+4} + a_3x^{\lambda+6} + \cdots;\ \lambda = const. \tag{4}$$

Підставляємо ряд (4) у рівняння (3). Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів. Для показника λ знаходимо вираз:

$$\lambda^2 + (4r+8s-6)\lambda^2 + (24s^2 + 24rs + 4r^2 - 16r - 16s + 11)\lambda^2 +$$
$$+(32s^3 + 48rs^2 + 16r^2s - 72s^2 - 64rs - 8r^2 + 16r + 44s - 6)\lambda +$$
$$+16s^4 + 32rs^3 + 16rs^3 + 16r^2s^2 - 48s^3 - 64rs^2 - 16r^2s + 44s^2 + 32rs - 12s = 0.$$

Його розв'язками будуть чотири значення λ:

$$\lambda_1 = 1-2r-2s;\ \lambda = 3-2r-2s;\ \lambda_3 = 2-2s;\ \lambda^4 = -2s. \tag{5}$$

Знаходимо також співвідношення коефіцієнтів ряду (4).

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2}{(\lambda+2s+2)(\lambda+2r+2s+1)};\quad \frac{a_2}{a_1} = -\frac{3}{2(\lambda+2s+4)(\lambda+2r+2s+3)};$$
$$\frac{a_3}{a_2} = -\frac{4}{3(\lambda+2s+6)(\lambda+2r+2s+5)};\quad \cdots$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{\frac{(n+1)}{n}}{(\lambda+2s+2n)(\lambda+2r+2s+2n-1)} = -\frac{\frac{n+1}{n}}{2^2\left(\frac{\lambda}{2}+s+n\right)\left(\frac{\lambda-1}{2}+r+s+n\right)}.$$

Подаємо (4) із врахуванням (5).

$$W = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+r+s\right)} - \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+s+2\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{2}+r+s\right)} +\right.$$
$$\left.+\frac{3\left(\frac{x}{2}\right)^4}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+s+3\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+5}{2}+r+s\right)} - \cdots\right] =$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(i+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+s+1+i\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+r+s+i\right)}.$$

Зважаючи на (5), записуємо інтеграли (3) – узагальнені функції Бесселя:

$$W_1=\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2r-2s}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{i!\Gamma\left(\frac{3}{2}-r+i\right)}; \tag{6}$$

$$W_2=\left(\frac{x}{2}\right)^{3-2r-2s}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{i!\Gamma\left(\frac{5}{2}-r+i\right)};$$

$$W_3=\left(\frac{x}{2}\right)^{2-2s}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{i!\Gamma\left(\frac{3}{2}+r+i\right)};$$

$$W_4=\left(\frac{x}{2}\right)^{-2s}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}}{i!\Gamma\left(\frac{1}{2}+r+i\right)}. \tag{7}$$

Якщо $r=\frac{1}{2}$, то дві із чотирьох функцій стають лінійно залежними

$$W_1\left(\frac{1}{2},s,x\right)=W_4\left(\frac{1}{2},s,x\right);\ W_2\left(\frac{1}{2},s,x\right)=W_3\left(\frac{1}{2},s,x\right).$$

У такому випадку можна знайти лінійно незалежні логарифмічні розв'язки за відомим у математичному аналізі правилом.

Дослідимо також, як пов'язані інтеграли (1) із узагальненими функціями Бесселя. Якщо $u(z)$ – який-небудь розв'язок рівняння (1), то відповідно до виконаних перетворень, функції (6)–(7) мають таке подання:

$$W(x)=z^{-s}\,D^r u(z)|\,z=x^2.$$

Тому зворотним перетворенням

$$u(z)=D^{-r}u(z)\left(z^sW(z)\right)$$

можна встановити, які розвязки (1) генерують функції Бесселя. Покажемо це для $W_1(x)$ із (6):

$$W_1(z)=z^{\frac{1}{2}-r-s}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)z^i}{i!2^{2i}\Gamma\left(\frac{3}{2}-r+i\right)};$$

$$z^sW_1(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)z^{\frac{1}{2}-r+i}}{i!2^{2i}\Gamma\left(\frac{3}{2}-r+i\right)};$$

$$u_1(z)=D^{-r}\left(z^sW_1(z)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)z^{\frac{1}{2}+i}}{i!2^{2i}\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\right)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1!}-\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{3z^{\frac{5}{2}}}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\sin z^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\cos z^{\frac{1}{2}}\right).$$

Цілком аналогічно знаходимо інші генеруючі розв'язки:

$$u_2(z)=\frac{3!}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(\sin z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\cos z^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$u_3(z) = \frac{z^{r+1}}{\Gamma(r+2)\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} - \frac{2z^{r+2}}{2^2\Gamma(r+3)\Gamma\left(r+\frac{5}{2}\right)} + \frac{3z^{r+3}}{2^4\Gamma(r+4)\Gamma\left(r+\frac{7}{2}\right)} - \cdots;$$

$$u_4(z) = \frac{z^{r}}{\Gamma(r+1)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)} - \frac{2z^{r+1}}{\Gamma(r+2)\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} + \frac{3z^{r+2}}{\Gamma(r+3)\Gamma\left(r+\frac{5}{2}\right)} - \cdots.$$

Неважко переконатись, що $u_3(z)$ та $u_4(z)$ не справджують однорідне рівняння (1). Тому шукаємо їх серед частинних розв'язків неоднорідного рівняння (2), з якого і знаходимо, використовуючи два перших члени правої частини.

$$u_3(z) = N_1 D^{-1-r}\left[z^{\frac{1}{2}-r}D^{-r}\left(\sin z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}\cos z^{\frac{1}{2}}\right)\right.;$$

$$u_4(z) = N_2 D^{1-r}\left[z^{\frac{3}{2}-r}D^{2-r}\left(\sin z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\cos z^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

де N_1 і N_2 – нормувальні множники.

З численної множини цікавих властивостей описаних функцій розглянемо лише їх асимптотичну поведінку для достатньо великих x, яка цілком визначається співвідношенням основних параметрів r та s. Якщо, наприклад, $r+2s=1$, то амплітуда коливань асимптотично постійна. Коли ж $r+2s>1$, тоді амплітуда спадає; для $r+2s<1$ маємо асимптотичне зростання амплітуди (див. рис. 1–3).

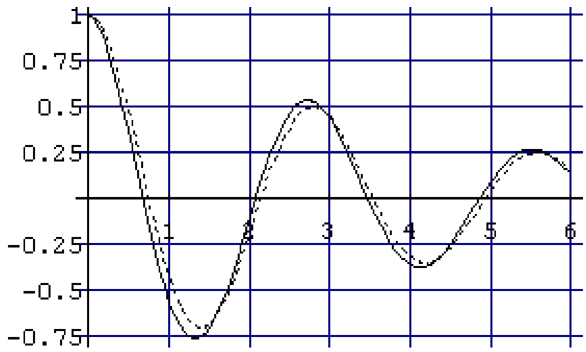

Рис. 1. $r=1,0,\ s=0$.
$W_1(x)$ – суцільна тонка крива; $W_2(x)$ – суцільна жирна крива;
$W_3(x)$ – пунктирна тонка крива; $W_4(x)$ – пунктирна жирна крива.

На закінчення відзначимо, що існує великий клас диференціальних рівнянь, розв'язки яких генерують узагальнені функції Бесселя. Цей клас описується виразом

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{2(n-k)}y(x)=0,\ n\in\mathbf{N}.$$

Ми скористалися лише одним рівнянням, що відповідає $n=2$. Канонічне рівняння Бесселя походить із рівняння гармонійних коливань ($n=1$), а відповідні його канонічні функції мають подання

$$J_v = z^{-s}D^r\left(\sin z^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{z=x^2}; \qquad J_{-v} = z^{\frac{1}{2}-r-s}D^{1-r}\left(\sin z^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{z=x^2},$$

якщо покласти $r=\frac{1}{2}-\nu$, $s=\frac{\nu}{2}$. Класичні функції Бесселя генеруються перетворенням $\sin x$. Для узагальнених функцій Бесселя твірними виступають складові $\sin x$, $x\cos x$, $x^2\sin x$, $x^3\cos x$ та ін.

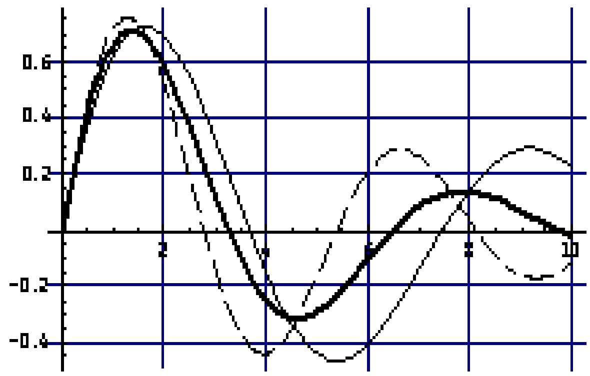

Рис. 2. $r = 1,0$, $s = 0,1$.
$W_1(x)$ – суцільна тонка крива; $W_2(x)$ – суцільна жирна крива;
$W_3(x)$ – пунктирна тонка крива; $W_4(x)$ – пунктирна жирна крива.

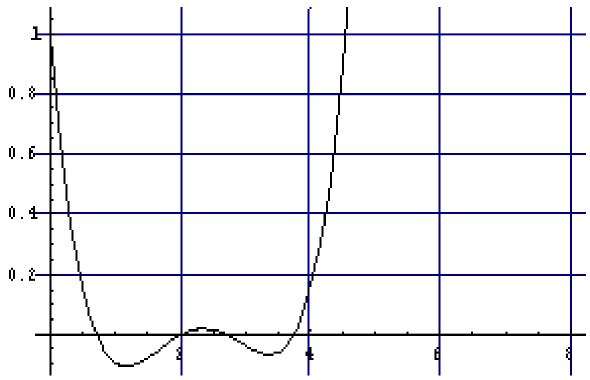

Рис. 3. $r = 1,0$, $s = 0,1$.
$W_1(x)$ – суцільна тонка крива; $W_2(x)$ – суцільна жирна крива;
$W_3(x)$ – пунктирна тонка крива; $W_4(x)$ – пунктирна жирна крива.

Висновки. Наведений метод перетворення дозволяє:

1) розвивати диференціальні рівняння і підвищувати їх інформативність внаслідок зростання порядку і введення нових параметрів;

2) узагальнювати спеціальні функції та надавати їм нові властивості.

1. *Рибак В. Я.* Перетворення диференціальних рівнянь за допомогою операторів дробового інтегро-диференціювання // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 103–108.
2. *Вірченко Н. О., Рибак В. Я.* Основи дробового інтегро-диференціювання: Навч. посібник. – К., 2007. – 364 с.

Одержано 19.04.2011