УДК 519.21

Г. І. Сливка-Тилищак, І. В. Марина (Ужгородський нац. ун-т)

ОБГРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

The boundary-value problems for the hyperbolic type equations of mathematical physics with random initial conditions from Orlicz space are investigated in the paper. The conditions of existence of twice continuously differentiated solution of this problem with probability one are found.

Знайдено умови існування двічі неперервно диференційовного розв'язку задачі гіперболічного типу про коливання прямокутної мембрани математичної фізики з випадковими початковими умовами з простору Орліча.

Вступ. Зображення розв'язків рівняння математичної фізики з випадковими початковими умовами за допомогою випадкових функціональних рядів та вивчення їх властивостей, зокрема умов та швидкості збіжності в різних просторах є досить цікавою та важливою задачею теорії ймовірностей. В роботі розглядається крайова задача математичної фізики гіперболічного типу, а саме задача про коливання прямокутної мембрани, коли початкові умови є випадкові процеси з простору Орліча. Досліджено достатні умови існування з імовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку такої задачі.

Подібна задача для рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку коли початкові умови є процеси Орліча розглядались в [2] В монографіях [1] і [4] можна знайти посилання на інші роботи, які проводились в цьому напрямку.

1. Випадкові процеси з простору Орліча.

Означення 1 ([1]). *Нехай T - не порожня множина. Функція $\rho : T\times T \to [0;\infty)$ називається псевдометрикою, якщо вона задовольняє умовам:*

1) $\rho\left(t,s\right) = \rho\left(s,t\right)$, $t,s \in T$;

2) $\rho\left(t,s\right) \le \rho\left(t,v\right) + \rho\left(v,s\right)$, $t,s,v \in T$;

3) $\rho\left(t,s\right) = 0$, *якщо* $t = s$.

Пара (T,ρ) називається *псевдометричним простором.*

Означення 2 ([1]). *Парна неперервна опукла функція $u\left(x\right)$ називається C-функцією, якщо $u\left(0\right) = 0$ і $u\left(x\right)$ зростає при $x > 0$.*

Означення 3 ([1]). *Будемо говорити, що C-функція u задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0 > 0$, $k > 0$, $A > 0$, що для всіх $x > z_0$, $y > z_0$ виконується нерівність*

$$u(x)u(y) \le Au(kxy).$$

Означення 4 ([1]). *Нехай (T,ρ) – непустий метричний простір і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $N_\rho\left(t,\varepsilon\right)$ найменшу можливу кількість точок ε-сітки множини T відносно псевдометрики ρ. Функцію $(N_\rho\left(t,\varepsilon\right), \varepsilon > 0)$ будемо називати масивністю множини відносно псевдометрики ρ.*

Нехай $\{\Omega, \Im, P\}$ стандартний ймовірнісний простір.

Означення 5 ([1]). *Простором Орліча $L_u(\Omega)$ випадкових величин, породженим C-функсією $u(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_u(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq \infty$.*

Простір Орліча $L_u(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_u} = inf\left\{r > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 6 ([1]). *Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_u(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_u(\Omega)$.*

Означення 7 ([1]). *Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча ($E\xi = 0$), називається строго орлічевою, якщо існує стала C_Δ, що для скінченної кількості $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ і для будь-якого $\lambda_i \in \mathbf{R}^1$ виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_u} \leq C_\Delta\left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Означення 8 ([1]). *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, ($X \in L_u(\Omega)$) називається строго орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $X = \{X(t), t \in T\}$ - є строго орлічевою. Випадкові процеси $X = \{X(t), t \in T\}$ та $Y = \{Y(t), t \in T\}$ називаються сумісно строго орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ є строго орлічевою.*

Теорема 1 ([1]). *Нехай $X_i = \{X_i(t), t \in T, i \in I\}$ - сім'я сумісно строго орлічевих процесів, причому існує інтеграл в середньому квадратичному*

$$\xi_{ki} = \int_T \varphi_k(t)\, x_i(t)\, d\mu(t).$$

Тоді сім'я випадкових величин $\Delta_\xi = \left\{\xi_{ki}, i \in I, k = \overline{1,\infty}\right\}$ є строго орлічевою сім'єю.

Теорема 2 ([1]). *Нехай (T, d) - компактний метричний простір, $X_n = \{X_n(t)\ ,\ t \in T\}$ - послідовність випадкових процесів, які належать простору $L_u(\Omega)$ такому, що для функції u виконується g-умова, причому всі процеси $X_n(t)$ сепарабельні на (T, d) і*

$$\rho_n(t, s) = \|X_n(t) - X_n(s)\|_{L_u}.$$

Нехай виконуються умови:

1) $\rho(t, s) \leq z(d(t, s))$,

де $\rho(t, s) = \sup_{n\geq 1}\rho_n(t, s)$, $z = \{z(x), x > 0\}$ *така функція, що* $z(x) \to 0$ *коли* $x \to 0$;

2) $N_\rho(u)$ *- метрична масивність простору* (T,ρ)*;*

3) для будь-якого $\epsilon > 0$ $\int\limits_0^\epsilon (N_\rho(u))du < \infty$.

Тоді для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{n\geq 1} P\left\{\sup_{\substack{t,s\in T\\ d(t,s)<\epsilon}} |X_n(t)-X_n(s)| > \delta\right\} = 0.$$

Теорема 3 ([1]). *Нехай* (T,d) *- компактний метричний простір,* $C(T)$ *- простір Банаха неперервних функцій з рівномірною нормою. Нехай* $X_n = \{X_n(t), t\in T\}$, $n \geq 1$ *- послідовність випадкових величин з простору* $C(T)$*. Послідовність* $X_n(t)$ *збігається за ймовірністю в* $C(T)$*, якщо виконуються умови:*

1) для будь-якого $t \in T_s$*, де* T_s *довільна щільна в* T *множина, послідовність* $\{X_n(t), n\geq 1\}$ *збігається за ймовірністю;*

2) для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{n\geq 1} P\left\{\sup_{\substack{t,s\in T\\ d(t,s)<\epsilon}} |X_n(t)-X_n(s)| > \delta\right\} = 0.$$

Теорема 4 ([2]). *Нехай* $\mathbf{R}^k$ *-* k*-вимірний простір,*

$$d(t,s) = \max_{1\leq i\leq k} |t_i - s_i|,$$

$T = \{0 \leq t_i \leq T_i, i = 1,2,\ldots,k\}$, $X_n = \{X_n(t), t\in T\}$, $n = 1,2,\ldots$ *- послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча випадкових величин, де для функції* u *виконується* g*-умова. Нехай виконуються умови:*

1) процеси $X_n(t)$ *- сепарабельні;*

2) $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n\to\infty$, $t \in T$ *за ймовірністю;*

3) $\sup\limits_{d(t,s)\leq h}\sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \|X_n(t)-X_n(s)\| \leq \sigma(h)$*, де* $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ *така неперервна монотонна зростаюча функція, що* $\sigma(h)\to 0$ *коли* $h \to 0$*;*

4) для деякого $\epsilon > 0$

$$\int\limits_0^\epsilon u^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *- функція обернена до* $\sigma(u)$*.*

Тоді процеси $X_n(t)$ *збігаються за ймовірністю в просторі* $C(T)$*.*

Теорема 5 ([3]). *Нехай* $\xi(X)$, $E\xi(X)=0$, $X\in T$, $T=\{(x,y)\,|a_i\le x_i\le b_i, i=1,\dots,n\}$ *- неперервне з ймовірністю одиниця випадкове поле. Нехай функція* $B(X,Y)=E\xi(X)\xi(Y)$ *- кореляційна функція поля* $\xi(X)$. *Нехай існують частинні похідні* $B_{ii}(X,Y)=\frac{\partial^2 B(X,Y)}{\partial X_i \partial Y_i}$, $i=1,2$. $B_{ii}(X,Y)$ *- кореляційні функції похідних в середньому квадратичному* $\frac{\partial \xi(X)}{\partial x_i}$. *Якщо існує неперервна з ймовірністю одиниця модифікація поля* $\frac{\partial \xi(X)}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, *тоді, ця модифікація є звичайною частинною похідною випадкового поля* $\xi(X)$.

2. Основний результат.

Дослідимо коливання однорідної прямокутної мембрани із сторонами a і b, які здійснюються внаслідок початкового відхилення і початкової швидкості, якщо край мембрани нерухомо закріплений [5].

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$u=u(t,x,y),$$

$$x\in[0,a]\,,y\in[0,b]\,,t\in[0,T]\,,$$

яке задовольняє початковим умовам

$$u|_{t=0}=\xi(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta(x,y), \tag{2}$$

крайовій умові

$$u|_{x=0}=u|_{x=a}=u|_{y=0}=u|_{y=b}=0. \tag{3}$$

Початкові умови $(\xi(x,y),x\in[0;a]\,,y\in[0;b])$ і $(\eta(x,y),x\in[0;a]\,,y\in[0;b])$ є випадкові процеси з простору Орліча, для яких виконуються умови:

$$\xi(0,y)=\xi(a,y)=\xi(x,0)=\xi(x,b)=0, \tag{4}$$

$$\eta(0,y)=\eta(a,y)=\eta(x,0)=\eta(x,b)=0. \tag{5}$$

Позначимо кореляційні функції цих процесів:

$$B_\xi(x,y,x_1,y_1)=E\xi(x,y)\xi(x_1,y_1),$$

$$x,x_1\in[0;a]\,,y,y_1\in[0;b]\,;$$

$$B_\eta(x,y,x_1,y_1)=E\eta(x,y)\eta(x_1,y_1),$$

$$x,x_1\in[0;a]\,,y,y_1\in[0;b]\,;$$

При використанні методу Фур'є, незалежно від того чи є початкові умови детермінованими чи випадковими, розв'язок шукається у вигляді:

$$u=\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x,y)(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t), \tag{6}$$

де власні функції $v_i(x,y)$ є розв'язком рівняння:

$$\Delta v_i(x,y)+\lambda_i^2 v_i(x,y)=0, \tag{7}$$

які задовольняють умовам (3). Використовуючи метод відокремлення змінних власні функції v_i можна записати у вигляді:

$$v_i(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b}. \quad (8)$$

Власні функції $v_i(x,y)$ відповідають власним значенням λ_i рівняння (7):

$$\lambda_i^2 = \pi^2\left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2}\right), \quad (9)$$

де коефіцієнти a_i і b_i зображуються так:

$$a_i = \int_0^a \int_0^b \xi(x,y) v_i(x,y) dxdy;$$

$$b_i = \int_0^a \int_0^b \eta(x,y) v_i(x,y) dxdy.$$

Позначимо через $D = [0;a] \times [0;b]$.

Теорема 6. *Нехай* $(\xi(x,y),\ \ x \in [0;a]\,,\ \ y \in [0;b])$, $(\eta(x,y),\ x \in [0;a]\,,\ y \in [0;b])$ *є випадкові процеси з простору Орліча* $L_U(\Omega)$. *Для того, щоб з ймовірністю одиниця в області* D *існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)-(3), що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (6), достатньо щоб виконувались умови:*

1) існували з ймовірністю одиниця похідні:

$$\frac{\partial^2\xi(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\xi(x,y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\xi(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial\eta(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial\eta(x,y)}{\partial y};$$

2) для всіх $(x,y) \in D$ *ряд (6) і ряди*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i v_i(x,y)(a_i \sin\lambda_i t - b_i \cos\lambda_i t), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi k_i}{a} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b}(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi l_i}{b} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \cos\frac{\pi l_i y}{b}(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 v_i(x,y)(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 v_i(x,y)(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2 v_i(x,y)(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \quad (15)$$

збігалися рівномірно за ймовірністю.

Доведення. Оскільки існують підпослідовності часткових сум рядів (6), (10)-(15), які збігаються рівномірно за ймовірністю, то теорема доводиться як і в детермінованому випадку.

Лема 1 ([2]). *Нехай початкові умови* $(\xi(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$, $(\eta(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$ *є строго орлічеві з простору* $L_u(\Omega)$ *і виконуються умови теореми 6. Тоді суми випадкових рядів (6), (10)–(15) є також випадкові процеси із простору Орліча.*

Позначимо для $n \geq 0$

$$S_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} v_i(x,y)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(x,y)(a_i \sin \lambda_i t - b_i \cos \lambda_i t),$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi k_i}{a} \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

$$S_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi l_i}{b} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \cos \frac{\pi l_i y}{b} (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 v_i(x,y)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

$$S_n^{(5)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 v_i(x,y)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

$$S_n^{(6)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2 v_i(x,y)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t).$$

Теорема 7. *Нехай* $(\xi(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$, $(\eta(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$ *є сумісно строго Орлічеві випадкові процеси із простору* $L_u(\Omega)$. *Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок (1)-(3) в області* $[0,\ a] \times [0,\ b] \times [0;\ T]$, *що зображується у вигляді ряду (6) рівномірно збіжного за ймовірністю, достатньо, щоб виконувались умови:*

1) існували неперервні з ймовірністю одиниця похідні:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi(x,y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \xi(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y};$$

2) для всіх $(x,y) \in D$ *збігалися такі ряди:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v_i(x,y) v_j(x,y) \left(Ea_i a_j \cos \lambda_i t \cos \lambda_j t + Eb_i b_j \sin \lambda_i t \sin \lambda_j t + \right.$$

$$\left. +2Ea_i b_j \cos \lambda_i t \sin \lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i\lambda_j v_i(x,y)v_j(x,y)\left(Ea_ia_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + Eb_ib_j \cos\lambda_i t\cos\lambda_j t - \right.$$

$$\left. -2Ea_ib_j \sin\lambda_i t\cos\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi k_i}{a}\frac{\pi k_j}{a} \cos\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\cos\frac{\pi k_j x}{a}\sin\frac{\pi l_j y}{b}\left(Ea_ia_j\cos\lambda_i t\cos\lambda_j t+\right.$$

$$\left. +Eb_ib_j \sin\lambda_i t\sin\lambda_j t + 2Ea_ib_j\cos\lambda_i t\sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi l_i}{b}\frac{\pi l_j}{b} \sin\frac{\pi k_i x}{a}\cos\frac{\pi l_i y}{b}\sin\frac{\pi k_j x}{a}\cos\frac{\pi l_j y}{b}\left(Ea_ia_j\cos\lambda_i t\cos\lambda_j t+\right.$$

$$\left. +Eb_ib_j \sin\lambda_i t\sin\lambda_j t + 2Ea_ib_j\cos\lambda_i t\sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^2\lambda_j^2 v_i(x,y)v_j(x,y)\left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_ib_j \sin\lambda_i t\sin\lambda_j t + \right.$$

$$\left. +2Ea_ib_j \cos\lambda_i t\sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2\left(\frac{\pi k_j}{a}\right)^2 v_i(x,y)v_j(x,y)\left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_ib_j \sin\lambda_i t\sin\lambda_j t + \right.$$

$$\left. +2Ea_ib_j \cos\lambda_i t\sin\lambda_j t\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2\left(\frac{\pi l_j}{b}\right)^2 v_i(x,y)v_j(x,y)\left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + Eb_ib_j \sin\lambda_i t\sin\lambda_j t + \right.$$

$$\left. +2Ea_ib_j \cos\lambda_i t\sin\lambda_j t\right).$$

3) для $n \ge k = 0, 1, \ldots, 6$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h\\ |y-y_1|\le h\\ |t-t_1|\le h}} \left(E\left|S_n^{(k)}(x,y,t) - S_n^{(k)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{1/2} \le \sigma_k(h),$$

де $\sigma_k(h)$ неперервні монотонно зростаючі функції, такі, що $\sigma_k(h) \to 0$ при $h \to 0$ і виконувались умови:

$$\int_0^{\epsilon} U^{(-1)}\left[\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{b}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right]du < \infty,$$

$\sigma_k^{(-1)}(u)$ - обернені до функцій $\sigma_k(u)$.

Доведення. Умова 2) забезпечує збіжність в середньому квадратичному рядів (6), (10)–(15). Згідно теореми 4 і леми 1 ряди (6), (10)–(15) збігаються за ймовірністю в $C([0,\ a] \times [0,\ b] \times [0;\ T])$. Тоді дана теорема випливає з теореми 6.

Теорема 8. *Нехай* $(\xi(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$, $(\eta(x,y), x \in [0;a], y \in [0;b])$ *сумісно строго орлічеві процеси з простору* $L_u(\Omega)$, *де* $p > 1$. *Покладемо*

$$B_\xi(x,y,x_1,y_1) = E\xi(x,y)\xi(x_1,y_1),$$

$$B_\eta(x,y,x_1,y_1) = E\eta(x,y)\eta(x_1,y_1).$$

Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок (1)-(3) в області $[0,\ a] \times [0,\ b] \times [0;\ T]$, *що зображується у вигляді ряду (6), який є рівномірно збіжним за ймовірністю, достатньо, щоб виконувались умови:*

1) існують неперервні частинні похідні:

$$B_{\xi 11} = \frac{\partial^4 B_\xi(x,y,x_1,y_1)}{\partial x^2 \partial x_1^2},$$

$$B_{\xi 22} = \frac{\partial^4 B_\xi(x,y,x_1,y_1)}{\partial y^2 \partial y_1^2},$$

$$B_{\xi 12} = \frac{\partial^4 B_\xi(x,y,x_1,y_1)}{\partial x \partial x_1 \partial y \partial y_1},$$

$$B_{\eta 11} = \frac{\partial^2 B_\eta(x,y,x_1,y_1)}{\partial x \partial x_1},$$

$$B_{\eta 22} = \frac{\partial^2 B_\eta(x,y,x_1,y_1)}{\partial y \partial y_1},$$

і для достатньо малих h *виконуються нерівності:*

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h \\ |y-y_1|\le h}} \left(B_{\xi s}(x,y,x,y) + B_{\xi s}(x_1,y_1,x_1,y_1) - 2B_{\xi s}(x,y,x_1,y_1)\right)^{1/2} \le c_s |h|^\delta,$$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h \\ |y-y_1|\le h}} \left(B_{\eta s_1}(x,y,x,y) + B_{\eta s_1}(x_1,y_1,x_1,y_1) - 2B_{\eta s_1}(x,y,x_1,y_1)\right)^{1/2} \le c_{s_1} |h|^\delta,$$

де $\delta > \frac{3}{p}$ $s = 11,\ 12,\ 22$; $s_1 = 11,\ 22$.

2) збігаються наступні ряди:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^2 \lambda_j^2 \left[|Ea_i a_j| + |Eb_i b_j - 2\,|Ea_i b_j||\right],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k_i^2 k_j^2 \left[|Ea_i a_j| + |Eb_i b_j + 2\,|Ea_i b_j||\right],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} l_i^2 l_j^2 \left[|Ea_i a_j| + |Eb_i b_j + 2\,|Ea_i b_j||\right];$$

3) для довільних $\delta > \frac{3}{p}$ і $|h| < 1$ виконуються наступні умови:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{1/2} + \left(Eb_i^2\right)^{1/2} \right] \left((\ln k_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{1/2} + \left(Eb_i^2\right)^{1/2} \right] \left((\ln k_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{1/2} + \left(Eb_i^2\right)^{1/2} \right] \left((\ln k_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right) < \infty.$$

Доведення. Умова 1) даної теореми забезпечує виконання умови 1) теореми 7. Умова 2) даної теореми забезпечує виконання умови 2) тієї ж теореми. Доведемо, що із виконання умови 3) даної теореми випливає виконання умови 3) теореми 7. Розглянемо

$$\left(E \left| S_n^{(0)}(x,y,t) - S_n^{(0)}(x_1,y_1,t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(E \left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t_1 + b_i \sin\lambda_i t_1\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{4}{ab}} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \cos\lambda_i t - \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \cos\lambda_i t_1 \right| + \right.$$

$$\left. + \left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \sin\lambda_i t - \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \sin\lambda_i t_1 \right| \right].$$

Використаємо нерівність [4]

$$|\sin uv| \leq \frac{(\ln(|v| + e^{\delta}))^{\delta}}{(|\ln|u||)^{\delta}}, \quad \delta > 0.$$

$$\left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \cos\lambda_i t - \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \cos\lambda_i t_1 \right| \leq$$

$$\leq \left[\left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} - \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \right| + \left| \sin\frac{\pi l_i y}{b} - \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \right| + \left[\left| \cos\lambda_i t - \cos\lambda_i t_1 \right| \right] \right. \leq$$

$$\leq 2 \left(\left| \sin\frac{\pi k_i (x - x_1)}{2a} \right| + \left| \sin\frac{\pi l_i (y - y_1)}{2b} \right| + \left| \sin\frac{\lambda_i (t - t_1)}{2} \right| \right) \leq$$

$$\leq 2 \left(\frac{\left(\ln\left(\frac{\pi k_i}{2a} + e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{|\ln|x - x_1||^{\delta}} + \frac{\left(\ln\left(\frac{\pi l_i}{2b} + e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{|\ln|y - y_1||^{\delta}} \ \frac{\left(\ln\left(\frac{\lambda_i}{2} + e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{|\ln|-t_1||^{\delta}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left(\left(\ln\left(\frac{\pi k_i}{2a}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}+\left(\ln\left(\frac{\pi l_i}{2b}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}+\right.$$

$$\left.+\left(\ln\left(\frac{\pi\sqrt{\frac{k_i^2}{a^2}+\frac{l_i^2}{b^2}}}{2}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}\right)\leq$$

$$\leq \frac{2}{|\ln|h||^{\delta}}\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}+\frac{1}{2}\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{|\ln|h||^{\delta}}\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right).$$

Аналогічно можна отримати, що

$$\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\lambda_i t-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\lambda_i t_1\right|\leq$$

$$\leq\frac{3}{|\ln|h||^{\delta}}\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right).$$

Отже

$$\left(E\left|S_n^{(0)}(x,y,t)-S_n^{(0)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_0}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C_0=\sqrt{\frac{36}{ab}}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_n^{(1)}(x,y,t)-S_n^{(1)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(E\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\left(a_i\sin\lambda_i t-b_i\cos\lambda_i t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\left(a_i\sin\lambda_i t_1-b_i\cos\lambda_i t_1\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{4}{abc}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\lambda_i t\;-\;\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\lambda_i t_1\right|+\right.$$

$$\left.+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\cos\lambda_i t\;-\;\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\cos\lambda_i t_1\right|\right].$$

Тоді

$$\left(E\left|S_n^{(1)}(x,y,t)-S_n^{(1)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_1}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C_1=\sqrt{\frac{36}{ab}}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_n^{(2)}(x,y,t)-S_n^{(2)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(E\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi k_i}{a}\sqrt{\frac{4}{ab}}\cos\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\left(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi k_i}{a}\sqrt{\frac{4}{ab}}\cos\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\left(a_i\cos\lambda_i t_1+b_i\sin\lambda_i t_1\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\pi\sqrt{\frac{4}{a^3b}}\sum_{i=1}^{n}k_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\cos\lambda_i t\,-\,\cos\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\cos\lambda_i t_1\right|+\right.$$

$$\left.+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\lambda_i t\,-\,\cos\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\lambda_i t_1\right|\right].$$

Тому

$$\left(E\left|S_n^{(2)}(x,y,t)-S_n^{(2)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_2=\pi\sqrt{\frac{36}{a^3b}}\sum_{i=1}^{\infty}k_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\left(\ln k_i\right)^{\delta}+\left(\ln l_i\right)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_n^{(3)}(x,y,t)-S_n^{(3)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(E\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi l_i}{b}\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi k_i x}{a}\cos\frac{\pi l_i y}{b}\left(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi l_i}{b}\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\cos\frac{\pi l_i y_1}{b}\left(a_i\cos\lambda_i t_1+b_i\sin\lambda_i t_1\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\pi\sqrt{\frac{8}{ab^3c}}\sum_{i=1}^{n}l_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\cos\frac{\pi l_i y}{b}\cos\lambda_i t--\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\cos\frac{\pi l_i y_1}{b}\cos\lambda_i t_1\right|+\right.$$

$$\left.+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\cos\frac{\pi l_i y}{b}\sin\lambda_i t\,-\,\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\cos\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\lambda_i t_1\right|\right].$$

Отже,

$$\left(E\left|S_n^{(3)}(x,y,t)-S_n^{(3)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_3}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_3=\pi\sqrt{\frac{72}{ab^3c}}\sum_{i=1}^{\infty}l_i\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\left(\ln k_i\right)^{\delta}+\left(\ln l_i\right)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_n^{(4)}(x,y,t)-S_n^{(4)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \left(E \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t_1 + b_i \sin\lambda_i t_1\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{4}{ab}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \cos\lambda_i t \, - \, \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \cos\lambda_i t_1 \right| + \right.$$

$$\left. + \left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \sin\lambda_i t \, - \, \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \sin\lambda_i t_1 \right| \right].$$

Тоді

$$\left(E \left| S_n^{(4)}(x,y,t) - S_n^{(4)}(x_1,y_1,t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C_4}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_4 = \sqrt{\frac{36}{ab}} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \left((\ln k_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right).$$

$$\left(E \left| S_n^{(5)}(x,y,t) - S_n^{(5)}(x_1,y_1,t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(E \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t_1 + b_i \sin\lambda_i t_1\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \pi^2 \sqrt{\frac{4}{a^5 b}} \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \cos\lambda_i t \, - \, \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \cos\lambda_i t_1 \right| + \right.$$

$$\left. + \left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \sin\lambda_i t \, - \, \sin\frac{\pi k_i x_1}{a} \sin\frac{\pi l_i y_1}{b} \sin\lambda_i t_1 \right| \right].$$

Отже,

$$\left(E \left| S_n^{(5)}(x,y,t) - S_n^{(6)}(x_1,y_1,t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C_5}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_5 = \pi^2 \sqrt{\frac{72}{a^5 b}} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 \left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \left((\ln k_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right).$$

$$\left(E \left| S_n^{(6)}(x,y,t) - S_n^{(7)}(x_1,y_1,t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(E \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi k_i}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right) - \right.\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\pi l_i}{b}\right)^2\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\left(a_i\cos\lambda_i t_1+b_i\sin\lambda_i t_1\right)\Bigg|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\pi^2\sqrt{\frac{8}{ab^5c}}\sum_{i=1}^{n}l_i^2\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\cos\lambda_i t\,-\,\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\cos\lambda_i t_1\right|+\right.$$

$$\left.+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\lambda_i t\,-\,\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\lambda_i t_1\right|\right].$$

Тому

$$\left(E\left|S_n^{(6)}(x,y,t)-S_n^{(6)}(x_1,y_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{C_6}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_6=\pi^2\sqrt{\frac{72}{ab^5c}}\sum_{i=1}^{\infty}l_i^2\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left((\ln k_i)^{\delta}+(\ln l_i)^{\delta}\right).$$

Отже, виконання умови 3) даної теореми забезпечує виконання умови 3) теореми 7.

1. *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.
2. *Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Наук. вісник. Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2008. - Вип. 16. – С 174 -183.
3. *Гладкая О. Н.* Условия дифференцируимости по направлению выборочных функций случайных полей //Теория вероятн. и мат. статистика. – 1977. - Вып. 17. – С 33 -40.
4. *Б.В. Довгай, Ю.В. Козаченко, Г.І. Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами.Монографія, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008 - 175с.
5. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.

Одержано 20.04.2011